Anno Accademico 1990-91

PROGRAMMA PARZIALE del CORSO
di
MATEMATICA
(allievi elettronici - **matricola dispari**; Prof. C. Minnaja)

FINO ALLA TRASFORMATA DI LAPLACE ESCLUSA

Variabile complessa

Testo di riferimento (sia per la teoria che per gli esercizi): C. Minnaja: "Matematica per ingegneria - 1. Variabile complessa", ed. Libreria Progetto, Padova, 1989.

Sono esclusi dal programma i n.^{i}: 1.5; 1.24; 1.35; 1.57; 1.65; la dim. di 1.66; la pag. 81 di 1.77; la parte scritta in corpo piccolo di 1.77.

Sono facoltativi gli argomenti dei n.^{i} 1.3; 1.13; 1.35; 1.59; 1.60; 1.83; 1.84; 1.86.

Spazi di Hilbert, serie di Fourier, trasformata di Fourier

Testo di riferimento (per la teoria): C. Minnaja: "Argomenti di matematica per ingegneria", ed. Libreria Progetto, Padova, 1987.

Sono esclusi dal programma gli argomenti di cui ai n.^{i}: dim. di1.1.12; dim. di1.2.3; dim. di 2.1.2; dim. di 2.2.3; dim. di 2.2.11; dim. di 2.2.19; dim. di 2.2.21; 2.3.4; dim. di 2.3.5; dim. di 2.3.8; dim. di 2.3.15; dim. di 2.3.23; 2.5.3; 3.1.5; 3.1.9; 3.1.10; 3.3.3 (dopo le formule (3.50); 3.4.6; 3.4.11; dim. di 3.5.1; dim. di 3.5.2; dim. di 3.5.6; 3.9 (intero §).

Sono facoltativi i n^{i}: 1.3.5; 2.1.3; 2.2.13; dim. di 2.3.2; 2.3.30; dim. di 3.6.4.

Testo di riferimento (per gli esercizi): C. Minnaja: "Matematica per ingegneria - 2. Serie di Fourier, trasformate e distribuzioni", ed. Libreria Progetto, Padova, 1990.

Sono esclusi dal programma i n^{i}: 3.23; 3.40; 4.6; 4.7; 4.16; 4.18; 4.27.

Sono facoltativi i n^{i}: 2.18; 3.16; 4.12; 4.13; 4.14; 4.17.

33

MATEMATICA Prof. Minnaja

1) Variabile complessa
2) Spazio di Hilbert
3) Serie di Fourier – Sviluppi in serie trigonometriche
4) Trasformazioni (Fourier – Laplace – Zeta)
5) Distribuzioni

Testi:

Progetto { Minnaja : Variabile complessa: problemi ed eserciz (ROSSO)
" Spazi di Hilbert (VERDE)
" Argomenti di matematica per ingegneria (BLU)

Cortina { Richard : Funzioni analitiche. Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.
Spiegler Eserciz di metodi matematici per l'ingegneria

---

x Cliff: $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ (isomorfi)

$(x,y) \longrightarrow x+iy$

Di derivate ho fatto solo quelle parziali (di $u(x,y)$)
se invece uso $f(z)$:

$$\left.\frac{df}{dz}\right]_{z=z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \qquad \text{se } f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right]$$ Condizioni di Cauchy-Riemann.

Una funzione si dice olomorfa in un punto se ha ivi derivata (complessa) continua.
(def. di Cauchy)

Lemma di Goursat: (raffinazione di Cauchy): una funz che ha derivata (in $\mathbb{C}$) ce l'ha continua.

Funzioni olomorfe: e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$: la derivata (complessa) di queste funzioni si esegue con var. compl. come se fosse var. reale (con tutte le proprietà di queste).

101090

Funzioni olomorfe:

Se $f(z)$ è esprimibile come $u(x,y) + i v(x,y)$ allora valgono le condizioni di Cauchy-Riemann (cond. necess.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Succedono in un punto

Se $f(z)$ è olomorfa in un aperto e connesso Ω allora le sue componenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono funzioni differenziabili in Ω

Interessa un intorno (molto di più)

Se è differenziabile la funzione (il suo incremento) si può scrivere come

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \underbrace{A(x-x_0) + B(y-y_0)}_{\text{pezzo del 1° ordine}} + o(\sqrt{\rho\rho_0^2})$$

- Se due funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono soluzioni differenziabili in un aperto e connesso Ω del sistema di Cauchy/Riemann allora la $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ è OLOMORFA in Ω.

DEF Per non trascinarci i nomi aperto e connesso si definisce REGIONE un APERTO e CONNESSO (parleremo di regione di olomorfia)

Se una funzione è olomorfa e ha parte reale costante o parte immaginaria costante è COSTANTE (Applico le condiz. di C/R)

Se una funzione olomorfa è a modulo costante allora è COSTANTE $|f(z)| = \text{cost} \Rightarrow u^2(x,y) + v^2(x,y) = \text{cost} \Rightarrow$ le 2 deriv. parziali sono nulle:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ essendo olomorfa $= \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ essendo olomorfa $= -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Ottengo: $\begin{cases} u u_x - v u_y = 0 \\ v u_x + u u_y = 0 \end{cases}$ Il syst. è omogeneo: se il det $\neq 0$ allora l'unica sol. è quella nulla.

Le incognite sono u_x e u_y: il det. dei coefficienti è $u^2 + v^2 \neq 0$ 1° caso: unica soluzione $u_x = u_y = 0 = v_x = v_y$ per le cond. C/R e quindi la f è cost.

$u^2 + v^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ e quindi la funzione non solo è costante ma addirittura nulla.

Esempio:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = e^x \qquad \arg(e^z) = y$$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$ 101090 - 2

Se le sue componenti soddisfano C/R e inoltre è differenziabile nelle sue componenti (che sono funzioni di 2 variabili reali e quindi normalizzate) $\Rightarrow$ è OLOMORFA

$$z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + \underbrace{2ixy}_{v} \quad \text{olomorfa}$$

forse meno

Fin qui la parentela con le f(variabili reali) sembra ed è chiara ma questa:

$|z|^2 = x^2 + y^2 + 0 \cdot i$ la parte immaginaria è cost.

$\Rightarrow$ se è olomorfa dovrebbe essere costante anche la parte reale ma così non è. NON è olomorfa.

Derivazione di funzioni composte: c'è differenza dalle funzioni di variabile reale a seconda degli ambienti di lavoro delle funzioni:

1)

$$\underbrace{\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C}}_{h = f \circ g}$$

Se f e g sono derivabili lo è anche la g ed è:

$$h' = f' g' ; \underbrace{[f'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(f(z_0))}_{\text{nel punto}}$$

2) $\underset{t}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \underset{z}{\mathbb{C}} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$

$z = f(t)$ se f è derivabile vuol dire che sono derivabili le sue componenti scalari ($x = x(t)$; $y = y(t)$)

$h = g \circ f$ h è funzione di t (l'unica variabile da cui h dipende).

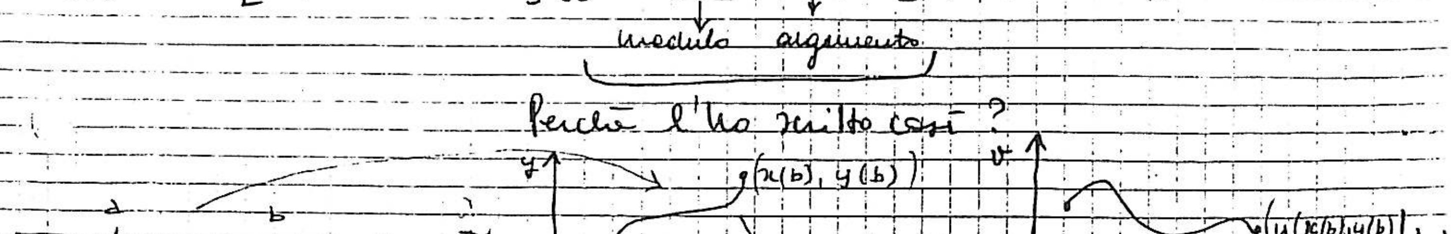
$\frac{dh}{dt} = g' f'$ Se ora la scrivo nei punti devo stare attento:

$$\left[\frac{dh}{dt}(t_0)\right] = \underbrace{\frac{dg}{dz}(x(t_0), y(t_0))} \cdot \underbrace{\frac{df}{dt}(t_0)}$$

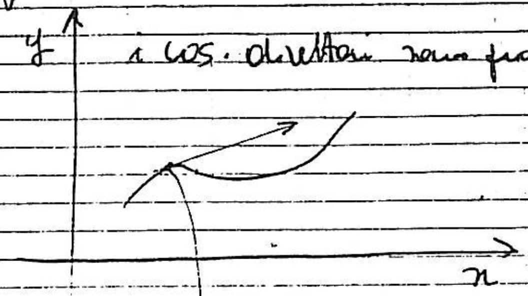
$$h = u + iv = u(t) + i v(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt}\right]_{t_0} = \underbrace{\underset{\text{modulo}}{\rho_0} \cdot \underset{\text{argomento}}{e^{i\theta_0}}} \cdot \left[\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}\right]$$

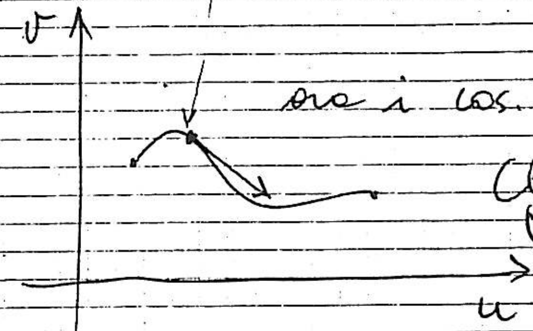
Perché l'ho scritto così?



Guardo alle derivate:



i cos. direttori sono proporzionali a $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$



ora i cos. dirett. sono prop. a $\frac{du}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$

Chiaramente la tangente non può che ruotare: di quanto? → di θ_0; di quanto è variato il modulo? di ρ_0. Si prende un'altra funzione ora si trasforma in modo che θ_0 sia sempre di θ_0.

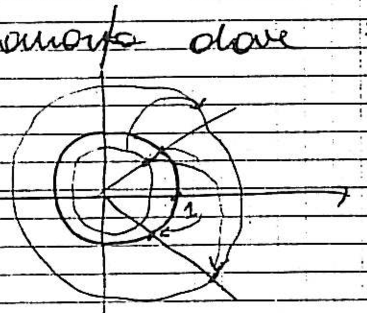
Una trasformazione che mantiene gli angoli e i versi si chiama CONFORME.

Esempi: 1) trovare dove è olomorfa $f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - \bar{z}^2$

$u(x,y) + iv(x,y) = (x+iy)^2 + 2(x+iy)(x-iy) - (x-iy)^2$

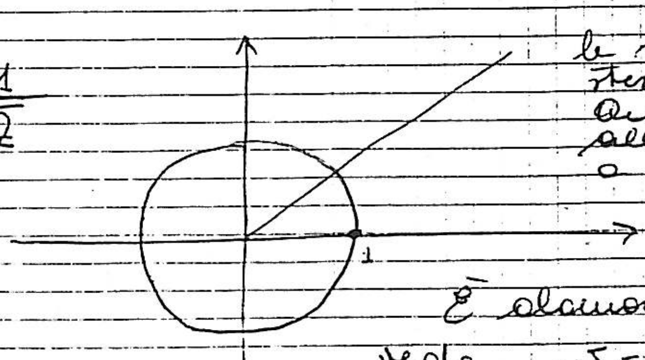
è certamente olomorfa dove z coincide con $\bar{z}$.

2) $w = \frac{1}{z}$



Gli angoli vengono mantenuti.

3) $w = \frac{1}{\bar{z}}$



le semirette restano in loro stesse, i punti no (come prima). Quello che è dentro alla circonf. unitaria va a finire fuori e viceversa.

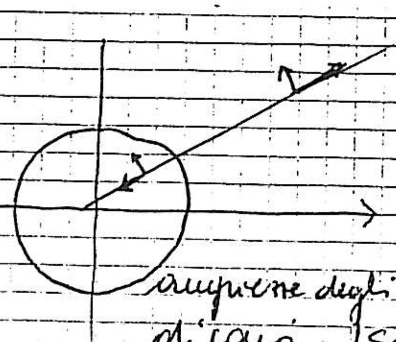
È olomorfa? Mah... adesso vedo. $w = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$

$v = \frac{iy}{x^2+y^2}$

Non sono verificate le condizioni di C/R (provare x credere) però parrebbe che gli angoli fossero mantenuti. Guardando però i VERSI

10.10.90 - 3



Variando z all'interno tende ad ruotare verso l'interno all'est. verso l'esterno.

Le funzioni che mantengono solo le ampiezze degli ANGOLI ma NON il VERSO si dicono ISOGONICHE.

Esempio:

$f(z) = z^2$

$u(x,y) + i v(x,y) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u} + i\,\underbrace{2xy}_{v}$

Vado a vedere come si trasformano gli assi e le parallele;

$u(x,y) = x^2 - y^2$ l'asse delle x si trasforma con:

$v(x,y) = 2xy$ $\quad (y=0)$: $\begin{cases} u(x,y) = x^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$ questo è

il semiasse positivo delle u quindi l'asse x si trasf nel semiasse positivo delle u.

Vedo ora l'asse delle y $(x=0)$

$\begin{cases} u(x,y) = -y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$ Come prima sono eq parametriche: $v=0 \Rightarrow$ asse u ma $u(x,y) = -y^2$ e

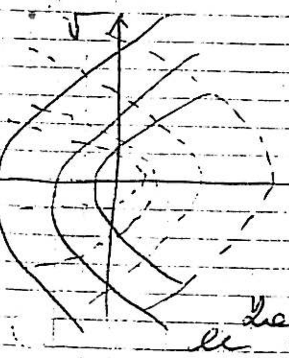
quindi ho ottenuto la parte negativa dell'asse u.

Prima in xy i due assi si incrociano ad angolo retto ora si toccano ad angolo piatto.

Qui la CONFORMITÀ non è rispettata in quanto la derivata nel punto scelto $(0,0)$ è NULLA: le formule della conformità valgono in tutti i punti che hanno derivata non nulla. Ok allora vado a prendere due rette perpendicolari che non si incrociano nell'origine

$y = y_0$ si ha $\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y_0^2 \\ v(x,y) = 2xy_0 \end{cases}$ Stavolta posso ricavare il parametro.

Dalla 2^a $x = \frac{v}{2y_0}$ $\quad u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$ (parabole) adagiate nel piano



Più piccolo è y_0 più schiacciata sull'asse u è la parabola fino a confondersi con il semiasse $\vec{u}_+$ per $y_0=0$.

Tratteggiate sono le parabole per $(x=x_0)$

La differenza dal caso precedente è che prima le trasformate si incrociavano in 1 punto $(0,0)$ ora in due punti.

I due punti d'incrocio stanno ad indicare gli incroci tra $(x=x_0)$ e $(y=y_0)$ E $(x=-x_0)$ e $(y=-y_0)$

quando [illegible] i parametri [illegible] $v = 2xy$ ecco per quadrante e quindi INCLUDO anche le 2 altre soluz.

La trasformazione NON è globalmente invertibile: infatti il piano va su sé stesso 2 volte.

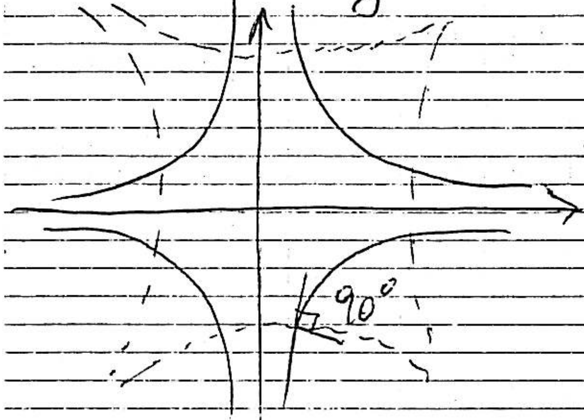
Ora mi interessa andare a vedere CHI va a finire in rette // agli assi nel piano (u, v) cioè

- Quali sono quegli enti [!?] che vanno a finire una volta trasformati in rette ~~rette~~

Questi sono IPERBOLI $u_0 = x^2 - y^2$ $\quad v = v_0$

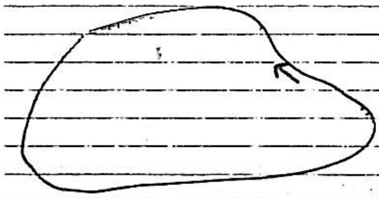
- E quali quelli che finiscono in $u = u_0$?

$v_0 = 2xy \Rightarrow$ iperboli equilatere



- E chi è che finisce proprio in $u_0 = 0$? $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$ sono le 2 bisettrici dei quadranti

- E chi è che finisce proprio in $v = v_0$? $2xy = 0 \Rightarrow$ GLI ASSI x e y. (Guarda che roba!)



Una curva in $\mathbb{C}$ chiusa e semplice si chiama curva di JORDAN.

CHIUSA: se $x(a) = x(b)$ e $y(a) = y(b)$

SEMPLICE: se $t_1 \neq t_2$ allora $x(t_1) \neq x(t_2)$ oppure $y(t_1) \neq y(t_2)$ (eccezion fatta per gli estremi nel chiuso).

Teorema di Jordan: Una curva di Jordan divide il piano in 2 insiemi disgiunti (e queste due parti vengono chiamate una interna e una esterna).

Per dire che una curva è regolare in AII ho detto che $a \le t \le b$ $\quad \gamma = \{(x,y) : x = x(t) \ y = y(t)\}$

Devo fare attenzione che non ci siano punti che derivano da molti t diversi (posso vederlo se è così, ma non lo vedo + se è così sosta nel tempo) e quindi pongo

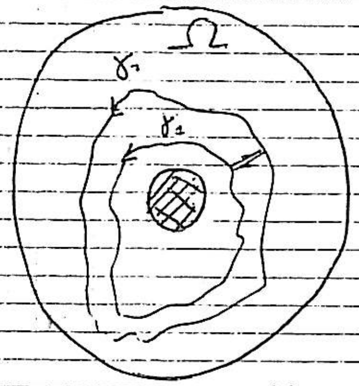
$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$

Integrazione di funzioni di variabile complessa

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \left[u(x,y) + iv(x,y)\right] d(x+iy) =$$ isolo la parte reale dalla complessa:

$$= \int_\gamma u(x,y)\,dx \underset{(i^2)}{-} v(x,y)\,dy + i\int_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

(γ è una curva regolare, f è continua) Se f è anche olomorfa cosa succede?
Se f è olomorfa in una regione Ω su ogni curva chiusa γ contenuta in Ω, l'integrale di f è nullo: $\oint f(z)\,dz = 0$
(Teorema di Cauchy)

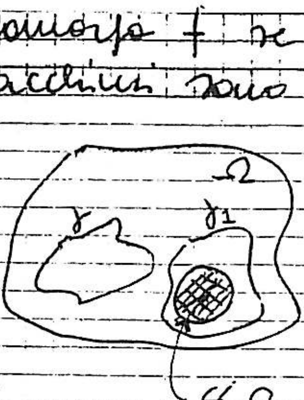


$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$$ (Teorema di Cauchy per le regioni non semplicemente connesse).

Sia γ una curva di Jordan che contenga al proprio interno le curve di Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Se f è olomorfa in Ω a cui appartengono γ, $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ allora l'$\int_\gamma f(z)\,dz$ è uguale a

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

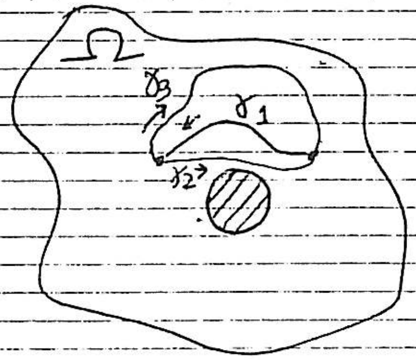
Una curva γ si dice omologa a zero per una funzione olomorfa f se 1) è di Jordan 2) tutti i punti da essa racchiusi sono di olomorfia per f.



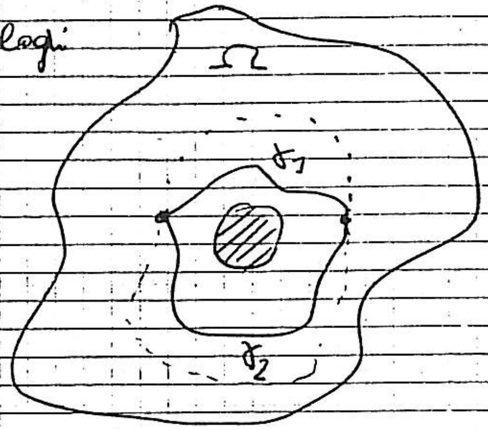
γ è omologa a zero

γ_1 NON è omologa a zero (anche se l'integrale potrebbe essere zero).

Archi omologhi : due archi $\int_{\gamma_2}^{\gamma_1}$ si dicono omologhi per una funzione f se hanno gli stessi estremi ed esiste un arco γ_3 tale che $\gamma_1-\gamma_3$ e $\gamma_2-\gamma_3$ siano omologhe a zero.



γ_1 e γ_2 sono in questo caso omologhi



In questo caso γ_1 e γ_2 non sono omologhi.

L'essere omologhi (a zero con γ_3) è una relazione di equivalenza tra archi.
Essere omologhe a zero è una relazione di equivalenza tra curve chiuse.

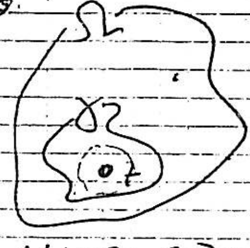
Vorrei fare una relazione di equivalenza tra curve chiuse, ma NON omologhe a zero.
Eccola qua:
- Due curve di Jordan si dicono omologhe per una funzione olomorfa f se circondano la stessa parte della frontiera di Ω (al solito Ω è la regione di olomorfia).

Formula di Cauchy: (per le regioni semplicemente connesse).
Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω (regione semplicemente connessa). Allora vale la formula:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$ per ogni γ di Jordan contenuto in Ω e per ogni z racchiuso da γ

Quando z è esterno a γ la formula non vale più:
$f(z)$ avrà un certo valore mentre $\oint$ viene zero essendo fuori olomorfa f.

Voglio dimostrare il T. di Cauchy per i punti z interni a γ



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

Visto che l'integrale all'interno di γ è = per tutti i percorsi, integro su una circonferenza C di centro z

Su C si ha: $t = z+\rho e^{i\theta}$ $\quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

$$\boxed{\oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt} = \int_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\,\rho e^{i\theta}\, i\, d\theta =$$

= [Passaggio difficile: sembrerebbe che $\oint$ dipendesse da ρ: invece essendo ρ il raggio della circonferenza ed essendo gli integrali tutti uguali all'interno di γ posso scrivere il limite per $\rho \to 0$ al posto dell'integrale (tanto non fa variare niente)] $= \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\, i\, d\theta =$

= (la f è continua $\Rightarrow$ posso portare dentro il limite) =

$= \int_0^{2\pi} \lim_{\rho\to 0} f(z+\rho e^{i\theta})\, i\, d\theta$ = (sempre per la continuità di f) $= \int_0^{2\pi} f(z)\, i\, d\theta = f(z)\, i \int_0^{2\pi} d\theta = f(z)\, i\, 2\pi$

e quindi riscrivendo il primo passaggio:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$ (valida per un qualsiasi punto z)

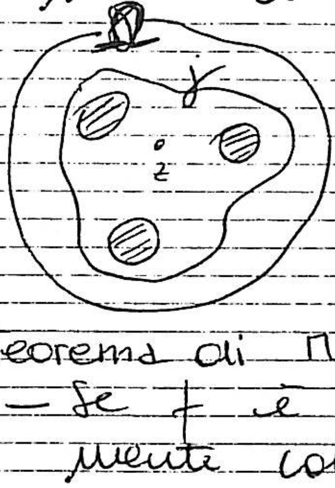
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\, i\, d\theta}$$

è la media dei valori che la z assume all'interno della circonferenza.

- Formula di Cauchy per le regioni semplicemente connesse

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \sum_{1}^{n} \oint_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right]$$

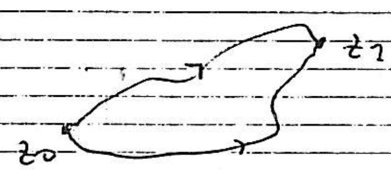
formula di Cauchy per le forme NON semplicemente connesse.



La formula è valida per quegli t che stanno dentro γ e in una zona di olomorfia (non vale per i buchi).

Teorema di Morera

- Se f è continua in una regione semplicemente connessa Ω e per ogni curva γ contenuta in Ω vale $\oint f(z)\,dz = 0$ allora la f è olomorfa in Ω



$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt$$ (Traccia della dim.)

F è cont. deriv. e quindi olomorfa. (etc.)

Teorema di Weierstrass.

→ $f_1, f_2, \dots, f_n$ olomorfe in Ω

→ K un compatto contenuto in Ω che ha per frontiera le curve $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$

→ le f_i convergono uniformemente in K ad una funzione f allora

f è olomorfa e le $f_i' \xrightarrow{\text{(converge)}} f'$, $f_i'' \longrightarrow f'', \dots, f_i^{(p)} \longrightarrow f^{(p)}$ e la convergenza è uniforme.

{saperne l'enunciato e ricordare le formule delle derivate}

$$\frac{p!}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}}\,dt = f^{(p)}(z)$$

Ci resta da dimostrare che la f è analitica (sviluppabile in serie di Taylor)

$$f(z_0+h)-f(z_0)=h\,f'(z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}h^2+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}h^n+R_{n+1}(z)$$

Taylor mi dice che se scelgo proprio quei coefficienti R_{n+1} è veramente un infinitesimo di ordine superiore almeno ad n.

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0\end{cases}$$

funzione esempio pur essendo C^∞ non ammette il tendere alla FUNZIONE NULLA del resto della serie di Taylor. Quindi: non è C^Ω (non è sviluppabile in S.d.T.)

L'insieme delle funzioni olomorfe distingue C^∞ e C^Ω.

Teorema di CAUCHY – TAYLOR

Sia f(z) olomorfa in una regione Ω semplicemente connessa: sia z_0 appartenente ad Ω: allora in un cerchio aperto di centro z_0 e contenuto in Ω vale $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$

Dimostrazione (traccia) {sapere solo l'enunciato}

L'unica cosa che mi permette di scrivere in altro modo la f(z) è la formula di Cauchy. (Bisogna che riesca a scrivere l'integrale come una serie).

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(t)}{t-z}\,dt}$$

$\frac{1}{t-z}$ mi ricorda molto la serie geometrica $\left(\frac{1}{1-r}\right)$

La serie geom. $\boxed{\text{quando } |r| \text{ è } < 1 \text{ CONVERGE (purchè tutti siamo in } \mathbb{C}\text{!)}}$

La formula vale per gli z interni. Scrivo $\frac{1}{t-z}$ come serie geom. $\frac{1}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)}$ $\quad\frac{z}{t}$ è <1 (z è interno alla circonf. t va da z e z_0...)

lo esprimo come serie geometrica quindi:
ora la serie di $\int$ o ∂ della serie è lo stesso:
la convergenza è uniforme; è garantito dal
fatto che siamo dentro il cerchio di
convergenza eccetera ...

— Tutto vale solo se la f è olomorfa.
Ma se la f è NON-olomorfa solo in un
punto? Posso salvare lo sviluppo?

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Teor: Una funzione olomorfa in un cerchio di centro z_0 è la somma della propria serie di Taylor

Osservaz. I abbiamo visto che la somma di una serie di potenze è una funzione olomorfa. Ora abbiamo visto l'inverso: ogni funzione olomorfa è somma di una serie di Taylor

Se f è olomorfa in Ω e C è omologa a zero, posto $M = \max_{t \in C} |f(t)|$ è:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^n} \quad \text{con } \rho \text{ raggio di } C$$

Dim. $$\left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \right| \leq \underbrace{\frac{n!}{2\pi} \oint \frac{|f(t)|}{\rho^{n+1}} dt}_{\text{Maggiorazione della formula di Cauchy}}$$

Di interessante c'è che:
— Più derivo, più la maggiorante diventa piccola ($\frac{1}{\rho^n}$)
(A me interessano le deriv. lontane dal punto centrale, dove con ρ piccolo farebbero essere GRANDI).

Se $f(z)$ è limitata a tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa su $\mathbb{C}$, allora è COSTANTE (teorema di LIOUVILLE)

(infatti le |derivate| sono maggiorate da un numero fisso e da un infinitesimo che aumenta di ordine coll'aumentare della distanza dal centro. Quindi quel numero ~~che~~ che è maggiorato da tutti i num. >0 è lo zero ⇒ |derivate| nulle ⇒ |funz| costante.

Attenzione: il discorso è diverso su $\mathbb{R}$. 181020-1

$|\operatorname{sen} x| \leq 1$ non implica che $\operatorname{sen} x$ è costante

$|\operatorname{sen} z| \leq 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}(z)$ è costante.

Es: $\operatorname{sen} z = 2$: $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i} = 2$ $\quad e^{z} - e^{-z} = 4i$

$e^{2z} - 1 = 4i e^{z}$ $[e^{z} = t]$

$t^2 - 4it - 1 = 0$ ha sempre soluzione : $\operatorname{sen} z$ è illimitata. (posso mettere qualsiasi cosa al posto di 2 e avrò sempre una (2) soluzione).

$|\operatorname{sen} x| \leq 1$ mi dice solo che la restrizione di $\operatorname{sen} z$ ai reali è limitata.

Esercizio: (C'è nel libro con errore di stampa).

Sia $g(z) = \oint_C \dfrac{2t^2 - t - 2}{t - z}\, dt$

con $C = \{ t \in \mathbb{C} : |t| = 3 \}$

- Si calcolino $g(2+2i)$, $g'(2-i)$, $g(30)$, $g'(e^{3}i)$.

Ho una funzione scritta tramite un integrale: se fosse scritta come $\frac{1}{2\pi i}$ .... la risolverei con Cauchy

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(t)}{t - z}\, dt$ (va bene solo per punti interni

$g(30)$ è zero perché l'integrale è nullo fuori dal cerchio. Essendo g costantemente nulla fuori dal cerchio anche $g'(e^{3}i)$ è nulla. ($e^{3} \simeq 27$)

$(2+2i)$ sta dentro al cerchio ($\sqrt{8} < \sqrt{9}$)

Manca il $2\pi i$, ma ce lo metto subito:

$g(z) = 2\pi i \cdot f(z) = 2\pi i\,(2z^2 - z - 2)$ (ho sfruttato Cauchy

$= \dots = 2\pi\,(2(2+2i)^2 - (2+2i) - 2) = -28\pi - 8\pi i$

$g'(z) = 2\pi i\, f'(z) = 2\pi i\,(4z - 1)$ etc.

Per casa: Sia f olomorfa che soddisfa $f(0) = 1$ $f'(0) = 0$ ed $f''(z) = \dfrac{1}{\pi i} \oint_C \dfrac{t^3 + 2t}{(t - z)^3}\, dt$ dove $C = \{ t \in \mathbb{C} : |t| = 4 \}$ Quanto vale $f(z)$?

Hints:

quando $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$

$g''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{g(t)}{(t-z)^3}$ Vado a costruirmi una g che tratti la stessa f'' di f:

Non ho trovato "LA g": ho trovato "UNA g" che ha la stessa derivata seconda della f.

$g(z) = z^3 + 2z$. A me non serve questa ma la primitiva della primitiva di g''. Calcolo g'' e poi la integro 2v.

$g'(z) = 3z^2 + 2$

$g''(z) = 6z = f''(z)$ ← via la integro sostituendo man mano le condiz iniziali.

$f' = \frac{z^2}{2} \cdot 6 + C_1 = 3z^2 + C_1$ $\quad f'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

(Elimino man mano le condizioni iniziali)

$f' = 3z^2$

$f = \frac{z^3}{3} \cdot 3 + C_2$ $\quad f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

$\boxed{f = z^3 + 1}$ $\quad f(2) = 9$

- Qualche altra bella qualità delle funzioni OLOMORFE. Se soddisfano le condiz di Cauchy-Riemann comportano oltre a quelle viste, molte altre proprietà: derivo le condiz di C/R

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

→ Teor. di Schwarz: $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ sommo le due eq.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ eq. di Laplace nel piano. Le funzioni che soddisfano questa eq. si chiamano FUNZIONI ARMONICHE.

$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 19/10/90 - 1

↳ Ha senso perché anche se ho sempre derivato risp. a z dato che $z = x+iy$.

Ora: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (u è armonica)

$i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = i \cdot 0$ Allora f è armonica

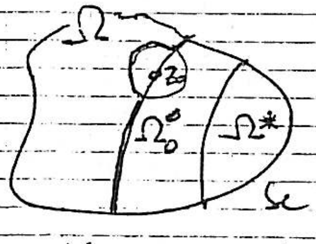
- Altra qualità delle olomorfe basata sul teorema di Cauchy-Taylor:

$$f(z) = \sum_0^\infty d_n (z-z_0)^n \qquad d_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\, dt$$

Due funzioni f_1 ed f_2 olomorfe in una regione Ω che coincidono in una sottoregione Ω^* coincidono su tutto Ω. (Principio di identità per le funz. olomorfe è una generalizzazione del teorema (principio di id. per i polinomi) $P_1(x)$, $P_2(x)$ di grado n se hanno valori uguali in $n+1$ punti allora sono uguali.

- Alcuni spunti per la dim. (da non sapere).

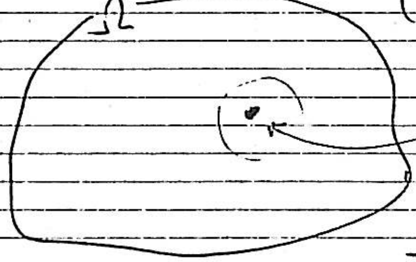
Lui dimostrerà questa equivalente: Una funzione olomorfa in Ω che si annulla in una regione Ω^* si annulla in tutto Ω ($f_1 = f$; $f_2 = 0$);



Prendo la massima regione in cui f si annulla (Ω_0^*). Se $\Omega_0 \equiv \Omega$ ho finito; altrimenti vedo se arrivo ad un assurdo: Se non è Ω allora ci sarà un punto sulla frontiera di Ω^o che non è su quella di Ω (è INTERNO A Ω) $\Rightarrow$ Per i punti INTERNI a Ω sono valide la S. di Taylor per questa funz.: come sono i coefficienti? TUTTI NULLI: a dx di z_0 si annulla ed essendo olomorfa è continua e quindi è (continua e) nulla a sx. Lo sviluppo di Taylor mi da la f nulla. Giusto a DX (me l'aspettavo), ma a SX NO che non me l'aspettavo. Si annulla anche nella restante parte di intorno che sta a sx. Ma allora non si annulla solo in Ω_0, ma almeno anche nell'intorno Γ e quindi sono ...

arrivato ad un assurdo, in quanto avevo asserito che Ω_0 era la MAX regione dove f si annullava.
(N.B. se nell'enunciato c'era SOTTOINSIEME invece di SOTTOREGIONE il teorema non valeva più: anche se si annulla in un punto poco mi interessa).

TEOREMA DEGLI ZERI:
- Gli zeri di una funzione olomorfa sono isolati
- Se una funzione olomorfa in Ω si annulla in un sottoinsieme che ha un punto di accumulazione in Ω, si annulla su tutto Ω. (è il principio di identità con un'ipotesi molto più debole).
(Si chiama principio di identità ristretto).



punto di accumulazione di zeri: non sono isolati
$\Rightarrow$ la funzione è nulla dappertutto.

Questo principio ci permette splendide cose:
- Due funzioni che coincidono su un sottoinsieme che ha punto di accumulazione nella regione di olomorfia Ω, coincidono su tutto Ω

Applicazioni:

$\operatorname{sen} x$

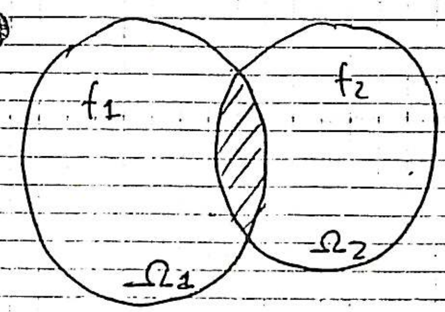
$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2i} \overset{?}{=} z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Come posso esprimerlo? Come $\frac{e^{z}-e^{-z}}{2i}$, e come serie di potenze come $\operatorname{sen} x$ sostituendo a x z??
Dato che $\operatorname{sen} z$ COINCIDE con $\operatorname{sen} x$ nell'asse reale allora per il principio appena fatto posso affermare che $\operatorname{sen} z$ è il prolungamento a $\mathbb{C}$ del $\operatorname{sen} x$ con $x \in \mathbb{R}$. (Quindi posso "ricopiare" gli sviluppi di Taylor).

ORDINE DEGLI ZERI

Si dice che f ha uno zero [illegible]

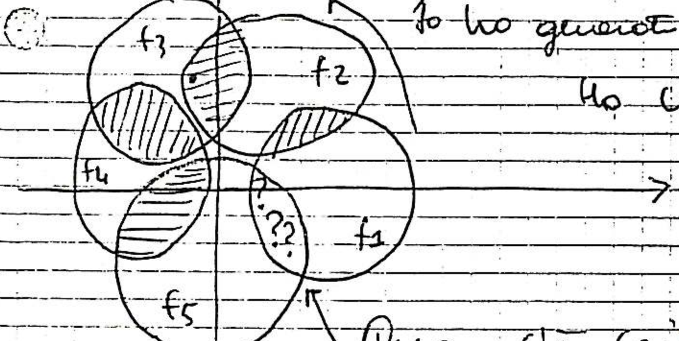
se $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$



f_1 olomorfa in Ω_1
f_2 " in Ω_2

Devo riuscire a legarle se esse coincidono nell'intersezione.

- Se $f_1 = f_2$ su $\Omega_1 \cap \Omega_2$, f_1 si dice prolungamento di f_2 ad Ω_1 ed f_2 si dice prolungamento di f_1 ad Ω_2. (Quindi + forte del prolungamento di funzioni)



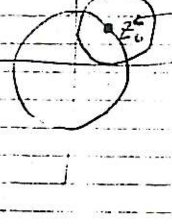
Io ho generato regioni da f_1 in poi
Ho coincidenza tra f_1 ed f_2, f_2 ed f ecc. ecc. fino a f_4 conts.

Qui c'è coincidenza? Nessuno me lo garantisce.

Tutti questi prolungamenti costituiscono una funzione monodroma se la coincidenza f_5 ed f_1 è verificata: se c'è almeno un modo di ~~non~~ tornare ad f_1 la f. è ~~polidroma~~ polidroma.

Funzione analitica: uno sviluppo in serie di potenze assieme e tutti i suoi prolungamenti.

$\sum_0^\infty z^n = \dfrac{1}{1-z}$ è def. anche dove la Σ non converge.



prolungamento: la serie non sarà la stessa, ma sarà del tipo: $\sum a_n (z-z_0)^n$.

Esempio di funzione polidroma: logaritmo

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$|e^z| = e^x$

$\arg(e^z) = y$ $\quad e^z$ è periodica con periodo $2\pi i$

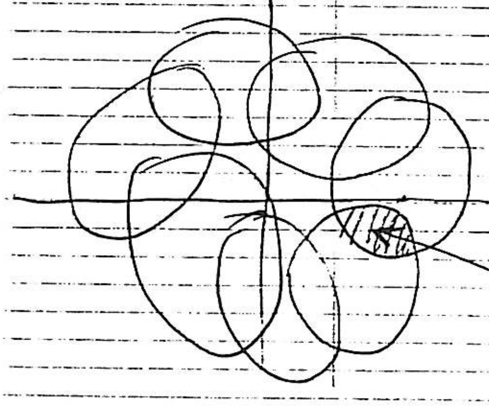
Ora definisco la funzione log come inversa di e^z

$w = e^z \quad z = \lg w \quad \lg w = \lg|w| + i\arg(w) + 2\pi k i$

logaritmo dei numeri reali >0 (solito logaritmo)

Però $\lg w$ ha infiniti valori (per colpa di k): quali sono quei valori del logaritmo che danno come valori quelli del ln reale? quelli per $k=0$

Quindi i valori del logaritmo per $k=0$ costituiscono il RAMO principale (cfr. scale di un palazzo: nella tromba non è definito niente e ogni giro salgo di un piano ≡ RAMO)



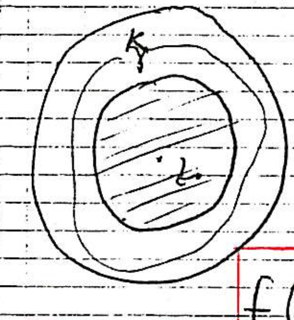
qui sono tornato al ES: $\log 1 = 0$? NO! $0 + 2k\pi i$ (sono del piano di sopra)

Altro modo di definire il logaritmo z:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{1}{z}\,dz = \lg z - \lg z_0$$ se fossi in $\mathbb{R}$: ma

dato che sono in $\mathbb{C}$ devo distinguere se la f è olomorfa dappertutto OK: ma c'è lo zero $\Rightarrow$ dipende se il mio cammino di integrazione racchiude o non racchiude l'0. Se il mio cammino è omologo a zero tutto ok se invece NO ho problemi.

Attenzione al ramo: l'olomorfia dipende dal ~~...~~ ramo: $\frac{1}{\lg z}$ è olomorfa per tutti i rami escluso quello $\lg z$ principale (dove $\lg 1 = 0$).



f olomorfa in K: posso esprimerla con somma di serie di potenze anche se non è olomorfa su un cerchio, ma su una corona circolare? SI

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}}$$

$$\boxed{d_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{1-n}}\,dt}$$

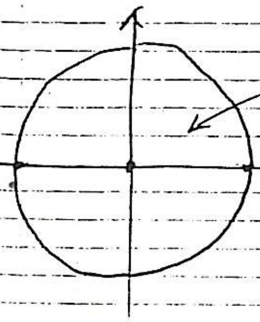
~~Traccia di dimostrazione (non richiesta)~~

Questo si chiama teorema di Cauchy-Laurent

Esempi: 1) $f(z) = \frac{1}{z}$ è già una serie di C/L: il pezzo di Cauchy è nullo: quello di Laurent ha $b_n = 1$, z_0 è zero

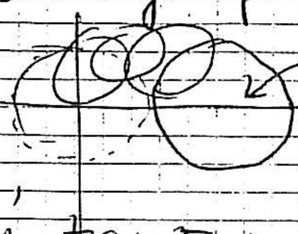
2) $\frac{1}{\sin z}$?? be, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

$\frac{1}{\sin z}$ ha punti di $\overline{\text{olomorfia}}$ (= NOT. olomorfia) dove $\sin(z)$ vale 0.



Sviluppandola qui: $\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$

E se invece la prolungo qua? Viene $\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-2\pi)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z-2\pi)^{-n}$



Ma è la stessa roba in sostanza, perché la seconda trovata è ottenibile tramite successivi prolungamenti (anche se i coeff sono $\neq$).

Se i b_n fossero tutti nulli avrei la serie di Cauchy.
Ho tre casi possibili comunque:

1) i b_n sono tutti nulli
2) i b_n sono nulli tranne che per un numero finito di punti
3) Ho infiniti $b_n \neq 0$

Questi 3 casi mi danno alcune proprietà della funzione:

1) z_0 f è limitata in un intorno di z_0
2) z_0 $f \to \infty$ per $z \to z_0$
3) z_0 f è illimitata e non ho limite per $z \to z_0$

1) Vale anche il viceversa: se f è limitata i b_n sono tutti nulli. Infatti $a_n(z-z_0)^n$ per $z \to z_0$ va a zero, $(z-z_0)^{-n}$ va a ∞, per essere limitata $\Rightarrow$ tutti i termini in $-n$ $\left(= \frac{1}{\dots}\right)$ devono essere nulli.

2) IDEM C.S.

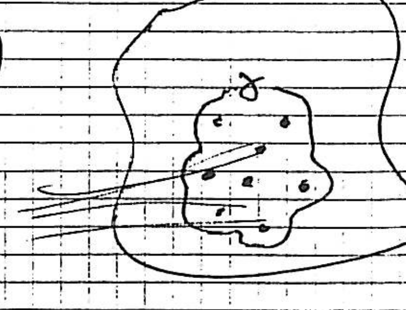
3) IDEM C.S.

Se z_0 è una singolarità isolata b_1 ha una particolare importanza: si dice RESIDUO.

Teorema dei RESIDUI:
Siano $z_0, z_1, \dots z_k$ punti di non olomorfia nell'interno di una curva γ. Allora:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{1}^{k} r(z_j)$$

dove i r sono i "b_1" dei VARI sviluppi ($\neq$ per ogni punto).



punti cattivi

221090-2

Osservo però che $\oint$ = alla somma
di tutti gli integraletti attorno ai punti cattivi
Ma b_1 = proprio a $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{p.c.}} \frac{f(t)}{(t-z_0)} dt$.

Vedo se trovo un modo facile di calcolare i residui: nel caso 1) è banale: $f(z)$ è come fosse olomorfa. 2) A seconda di quanti sono $\neq 0$ le scorciatoie sono diverse: se b_1 è L'UNICO $\neq 0$ è facile; se l'ultimo $\neq 0$ è il k-esimo la sol. è + difficile: comunque devo riuscire a calcolare i residui SENZA FARE INTEGRALI.

Nomenclatura:

1 — Se tutti i b_n sono nulli si dice che in z_0 c'è una singolarità ELIMINABILE {è come se non ci fosse}. (Metto in $f(z_0)$ il valore del limite per $z \to z_0$) (funzioni fatte per dispetto, in genere)

2 — Se i b_n sono $\neq 0$ solo in numero FINITO si dice che in z_0 c'è una singolarità POLARE o che c'è un polo: se l'indice maggiore per cui il B_n sono $\neq 0$ è k si dice che in z_0 c'è un polo di ordine k

3 — Se ci sono ∞ $b_n \neq 0$ si dice che in z_0 c'è una singolarità ESSENZIALE (non ci sono scorciatoie per calcolare i b_n)

Scorciatoie per calcolare i residui:

1° caso: i residui sono tutti nulli: non ci sono problemi.

2° caso (il + interessante): il calcolo è diverso a seconda dell'ordine del polo.

Se z_n è un polo si ha:

1) Se il polo è del 1° ordine $b_1 = \lim_{z \to z_n} (z - z_n) f($

2) Se il polo è di ordine r ~~$b_1 = \lim_{z \to z_n} \frac{1}{(r-1)!} f^{(r-1)}$~~

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{(r-1)}}{dz^{r-1}} \left[(z-z_0)^r f(z) \right]$$

Dimostrazione (parziale) (z_0 = punto cattivo)

— Se il polo è del 1° ordine

$$f(z) = \sum_0^{\infty} {}_n a_n (z-z_0)^n + b_1 (z-z_0)^{-1}$$

moltiplico per $(z-z_0)$ la $f(z)$ (entrambi i membri) e passo al limite: rimane proprio $b_1 = (z-z_0) f(z)$

— Se il polo è di ordine r

$$f(z) = \sum_0^{\infty} {}_n a_n (z-z_0)^n + b_1 (z-z_0)^{-1} + \dots + b_r (z-z_0)^{-r}$$ e basta

Se moltiplico per $(z-z_0)^r$ tutto (più analogia...) ottengo NON b_1, ma b_r in quanto tutti quelli prima vanno a zero passando al limite.

moltiplico:

$$f(z) \cdot (z-z_0)^r = (z-z_0)^r \sum_0^{\infty} {}_n a_n (z-z_0)^n +$$
$$+ b_1 (z-z_0)^{r-1} + b_2 (z-z_0)^{r-2} + \dots + b_r \cancel{(z-z_0)}^0$$

e mi pialliamo: se voglio b_1 derivo, derivo, derivo mandando via b_r, b_{r-1} etc etc. Per avere b_1 devo derivare $(r-1)$ volte: a forza di derivare però, cadono tutti gli esponenti e quindi ottengo $b_1 \cdot (r-1)!$: per avere b_1 devo dividere per $(r-1)$

— Quando ho i residui nei vari punti cattivi posso calcolare l' $\oint f(z)\, dz$ SENZA INTEGRARE col teorema dei residui. $\oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum_1^{k} {}_n r(z_n)$ $r(z_i) = b_1$.

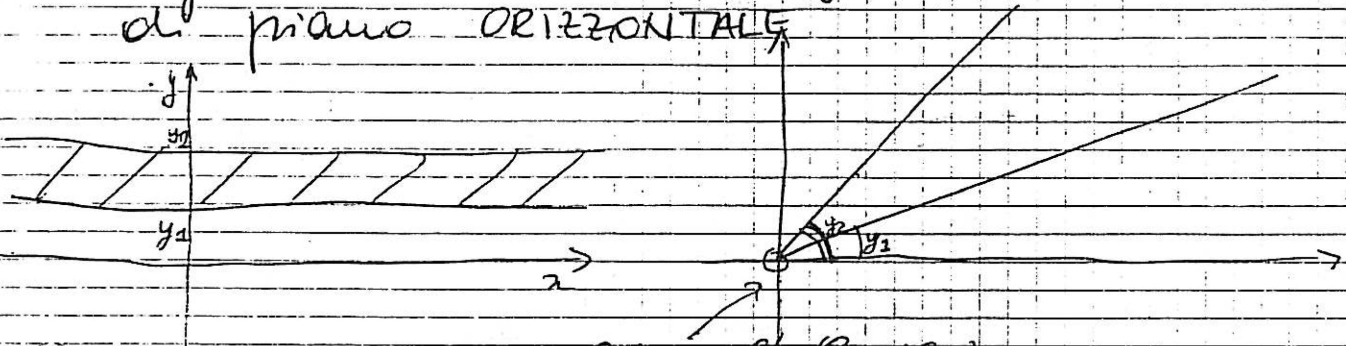
— Ma è sempre facile calcolare i limiti in $\mathbb{C}$? Be, anche in $\mathbb{C}$ vale la regola dell' HOSPITAL (per funzioni olomorfe).

Alcuni esempi di discontinuità:

• $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ periodo $2\pi i$:

$|z| = e^x \qquad \arg(e^z) = y$

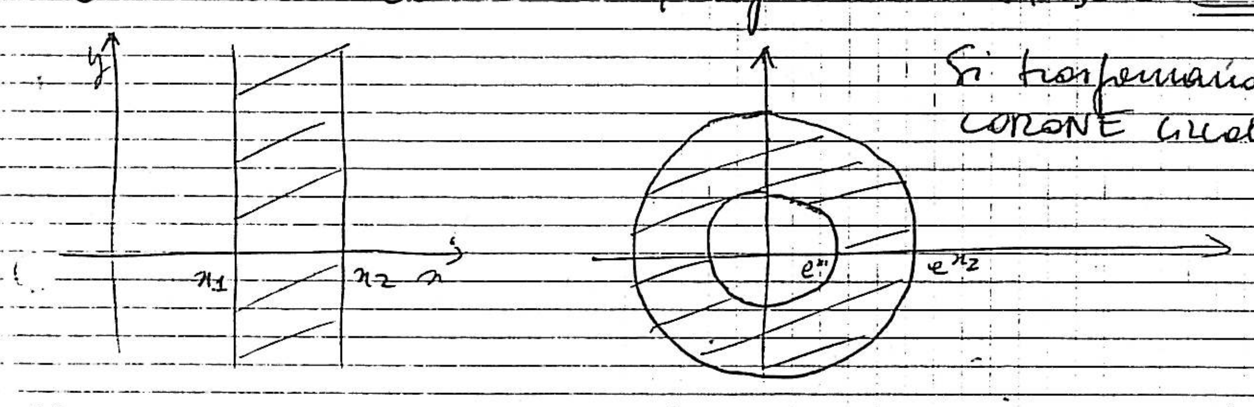
- Voglio vedere come trasforma una striscia di piano ORIZZONTALE



Origine $\notin$ Cod(f)

Se $y_2 - y_1$ è $< 2\pi$ ho uno spicchio, se è $= 2\pi$ ho tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ se è $> 2\pi$ ho più del piano (piano ripassato più volte).

- Ora vedo come si trasformano strisce verticali:



Si trasformano in CORONE circolari.

Un RETTANGOLO verrà trasformato in una fetta di ciambella: si manterranno sempre $\perp$ gli $f(x)$ con gli $f(y)$? Sì perché il T. di conformità dice che gli angoli sono mantenuti se la derivata è $\neq 0$: $\frac{\partial}{\partial z} e^z$ è e^z e quindi è sempre $\neq 0 \Rightarrow$ gli angoli sono retti in xy e restano retti in $\mathbb{C}$.

Definizione: FUNZIONE POTENZA

$z^{\alpha} = e^{\alpha \lg z}$ ma c'è il lg: ho sempre infiniti numeri? Boh.

Provo con z^n $n \in \mathbb{N}$

$z^n = e^{n \lg z} = e^{n[\lg|z| + i \arg z + \boxed{2\pi k i}]}$

1 numero solo

Questo PORTEREBBE gli ∞ numeri; MA:

e^z è periodico con periodo $2\pi i$ e quindi aggiungendo $2\pi k i$ all'esponente RESTA LO STESSO NUMERO. z^n è MONODROMA.

È monodroma anche per $n \in \mathbb{Z}$ (interi).

Vediamo per i Razionali

$q \in \mathbb{Q}$:

$z^q = e^{q \lg z}$ essendo q razionale posso scriverlo come una frazione di interi:

$z^q = e^{\frac{n}{m} \lg z} = e^{\frac{n}{m}[\lg|z| + i \arg z + 2k\pi i]}$

n non darà mai fastidio (aggiungerò un $2k\pi i n$)

m: rende la funz. polidroma perché aggiunge m valori: (quando $m = k$ si semplifica e torna a zero)

z^q è polidroma: se $q = \frac{n}{m}$ ridotta ai min. termini ho m valori (la $\sqrt{z} = z^{1/2}$ ho due valori).

Se α non è né intero né razionale ho ∞ valori.

Ma allora

$e^{\alpha} = e^{\alpha(\lg e)} = e^{\alpha[\ln|e| + i \arg e + 2k\pi i]}$ ho ∞ valori. Ma allora l'e^z di prima cos'è?

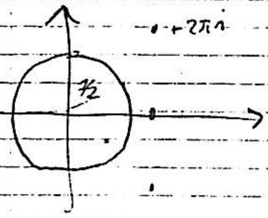
E' IL RAMO PRINCIPALE di queste e^{α}

Perché allora ho def. PRIMA e^z? Perché mi serviva per definire la potenza.

quando ho definito $z^2 = e^{2\lg z}$ per poterlo definire mi serviva la conoscenza del 2° membro (se no non definivo un bel niente).

Esercizio:

– Si calcoli $\oint_\gamma \frac{\operatorname{tg} z + 10}{e^z - 2}\, dz$ con $\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2$



– Il numeratore è sempre definito all'interno di γ.

– Il denominatore: se si annulla fuori (non mi interessa); se si annulla dentro vado a vedere che tipo di singolarità porta;

risolvo $e^z = 2$; $z = \lg 2 = \ln 2 + i \underbrace{\arg(2)}_{0} + 2k\pi i$

$\ln 2 \simeq 0.69 + 2k\pi i$ sono tutti fuori.

Dentro non c'è nessuna singolarità $\Rightarrow$ l'$\oint$ è ZERO.

– Se fosse invece: $\oint_\gamma \frac{\operatorname{tg} z + 10}{e^z - 1}$ ho una discontinuità nell'origine: sotto ho un infinitesimo del 1° ordine.

vedo se il polo è proprio del primo ordine:

$$\frac{M}{kz + o(z)} = \frac{1}{z} \frac{M}{k + \underbrace{\varepsilon(z)}_{\text{del 1° ordine}}} \qquad \frac{1}{z} = (z-0)^{-1} \ldots$$

Se al denominatore (una volta fatte le semplificaz.) c'è un infinitesimo di ordine k, la f ha in un polo di ordine k.

– Esercizio: dire se $\operatorname{sen} z$ è limitato in $\mathbb{C}$?

Risp. NO:

Funzione limitata in una regione $E \Leftrightarrow |f|$ limitata in E: $m \leq |f| \leq M$

$\sin z = k$ ha sempre soluzioni: scelgo k in

modulo grande quanto voglio $\Rightarrow \nexists\, M$:
$|f| \leq M$

sen z è limitato in ogni intorno di z_0: non è limitata in $\mathbb{C}$.

- Teor. di Liouville:
  - Se una funzione f è olomorfa e limitata in TUTTO $\mathbb{C}$ allora è costante.

- Teorema fondamentale dell'algebra:

Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$

Se non avesse nemmeno uno zero, $\frac{1}{P(z)}$ sarebbe olomorfa $\Rightarrow$ in un cerchio è limitata $P(z)$ (T. di Weierstrass: un cerchio è un compatto).
Al di fuori del cerchio la funzione tende a 0 (per $z \to \infty$ $P(z) \to \infty$) $\Rightarrow$ Allora se è limitata all'interno (per Weierstrass) e all'est. è limitata su tutto $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ essendo olomorfa è costante: ASSURDO! (L'assurdo è stato porre la cond. che $P(z)$ non si annullasse MAI $\Rightarrow$ si annulla almeno in un punto).

{Non è una dim. truffaldina in quanto tutta l'algebra complessa fatta finora non si è mai basata sulla validità del T. fond. dell'algebra}

Esercizio: $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ { Ha singolarità? dove? di che tipo?

Essendo $\frac{1}{z}$ olomorfa per $z \neq 0$ $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ ha come unica singolarità (eventuale) ~~z~~ $z=0$
Vado a vedere in $z=0$ cosa succede:
In $\mathbb{R}$ non ha limite $\Rightarrow$ non ce l'ha neanche nei complessi. Non è il caso 2) perché il limite non è ∞: è il caso 3): SINGOLARITÀ ESSENZIALE

Vado a vedere che la serie di Laurent ha pieno di termini: (lo sviluppo dà solo termini di Laurent - espon negativo)

Sviluppo: $\operatorname{sen}\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}$

(Ho sostituito $\frac{1}{z}$ a z nello sviluppo del sen z: non posso sempre farlo: con certi casi patologici non giro).

- Esercizio:

$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2iz}-1}$ Vado a vedere dove sono le sing.

$e^{2iz} = 1$,

$2iz = \lg 1 = \underbrace{\ln|1|}_{0} + i\underbrace{\cancel{\arg} 1}_{0} + 2k\pi i$

$z = k\pi$

Sotto ho un inf.mo di 1° ordine, MA anche sopra per $z \to z_0$ il lim viene un numero finito $\Rrightarrow$ sono tante, ma sono singolarità tutte eliminabili

Oppure più rigidamente calcolo il limite e con (H) ottengo:

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2iz}-1} = (H) = \lim_{z \to k\pi} \frac{\cos z}{2ie^{2iz}} = \begin{cases} \frac{1}{2i} & k \text{ par.} \\ -\frac{1}{2i} & k \text{ disp.} \end{cases}$$

Estensione dell'Hospital:

[so già di $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$] VALE ANCHE per $\frac{\text{non so}}{\infty}$

Compattificazione di $\mathbb{C}$ $(\mathbb{C}^*)$

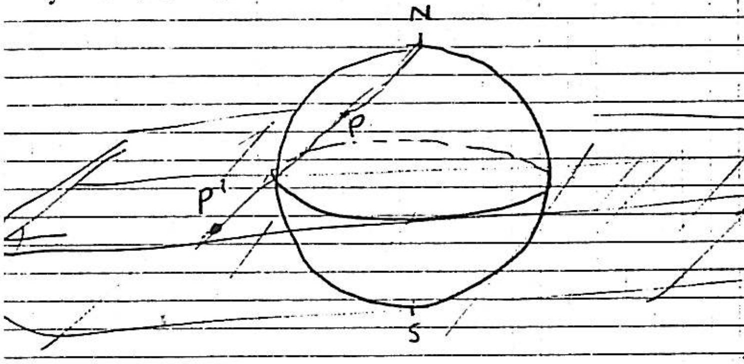
Ho RIUNITO i punti all'∞ in un unico punto chiamato appunto ∞

- Devo ridefinire alcuni concetti come continuità, olomorfia etc.

→ Una funzione $f(z)$ si dice olomorfa nel punto all'infinito (o per $z=\infty$) quando $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ è olomorfa per $\xi=0$.

→ Se voglio avere anche 0 nel D allora devo andare $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ $\quad f(\infty)=0$

- A cosa mi serve tutto ciò? Esempio:



Faccio la proiezione di un punto P tramite N (retta per P ed N). Più mi avvicino con P ad N, più P' si allontana. Ad N associo il punto all'∞.

- OLOMORFIA:

$f(z)$ si dice olomorfa in $z=\infty$ se $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ è olomorfa in $\xi=0$

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n+\sum_1^\infty b_n(z-z_0)^{-n}$$ Può darsi che funzioni anche per il punto all'∞.

Succederà (in intorni di ∞) che (dovendo porre per $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$) la prima parte verrà ad avere esponente negativo, la seconda parte positivo.

Es: $\sin z$: $\quad \sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\dots$

$\sin\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi^{3}}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1}{\xi^5}\cdot\frac{1}{5!}\dots$ ha infiniti termini di Laurent: ad ∞ c'è una singolarità non eliminabile. (Dovevo aspettarmelo: $\sin z$ in $\mathbb{R}$ non ha limite all'∞).

Prendo ora un polinomio $P(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$ in $\mathbb{C}^*$ all'∞ la serie di termini di Laurent avrà un numero FINITO di termini $\Rightarrow$ all'∞ c'è un POLO. Funzionano ancora i teoremi sui residui? Cosa significa curva γ che circonda il punto all'∞? (Devo stare attento all'orient. di

Teorema dell'indicatore logaritmico (principio dell'argomento).

Sia f olomorfa in Ω e γ curva di Jordan in Ω, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ siano gli zeri di f dentro a γ; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ siano i poli di f dentro a γ (e non vi siano singolarità essenziali entro γ) Allora vale:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt}_{} = k - p$$

visto che posso applicare le stesse logg. di $\mathbb{R}$ mi parrebbe una derivata di un $\log(f(t))$

Il logaritmo è così fatto: $\lg(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2\pi k i$ e quindi

$$\lg(f(t)) = \underbrace{\ln|f(t)|}_{\text{numero reale}} + i\arg(f(t)) + i2k\pi$$

Dopo un giro di γ, $|f(t)|$ non varia: il resto: – Se ho girato attorno all'origine VARIA

– Se non ho racchiuso l'origine è zero.

Dopo un giro faccio la differenza della funzione da un giro all'altro:

$\ln|f(t)|$ c'era prima e c'è dopo (VA VIA)

$2k\pi i$ " " " " "

$i\arg f(t)$ varia di TANTE VOLTE QUANTI SONO I GIRI attorno al punto

A cosa mi serve ??

Be, al contrario è comodo: se fossi certo che

NON ci sono poli allora, calcolando l'$\oint$ saprei QUANTI ZERI cascano dentro a γ. Avendo visto che l'integrale vale la VARIAZIONE dell'argomento, potrebbe essere facile calcolare quest'ultimo. (L'integrale è di solito duro).

Teor. di Rouché:

f e g olomorfe in Ω, γ contenuto in Ω, se su γ è $|f(z)| > |g(z)|$ allora entro γ le equazioni $f(z)=0$ ed $(f+g)(z)=0$ hanno lo stesso numero di soluzioni.

n numero di zeri di $f+g$

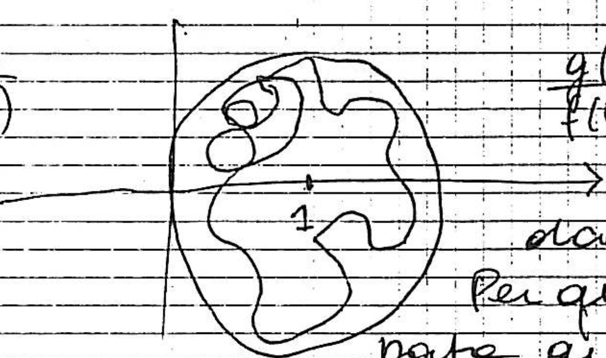
n' " " " f

Applico l'indic. logaritmico ponendomi nel caso in cui NON CI SONO POLI

$$n - n' = \Delta \arg [f(t)+g(t)] - \Delta \arg [f(t)] =$$
$$= \Delta \arg \frac{f(t)+g(t)}{f(t)} = \Delta \arg \left[1 + \frac{g(t)}{f(t)} \right]$$

e questo è ZERO. Perché?

è $1 + \frac{g(t)}{f(t)}$



$\frac{g(t)}{f(t)}$ è compreso nel cerchio di $r=1$ (guardo i moduli dall'ipotesi...) Per quanto ingroppata questa curva NON girerà MAI attorno all'origine $\Rightarrow \Delta \arg = 0$

Teorema del massimo modulo:

Se f è olomorfa in Ω, γ di Jordan contenuto in Ω, il modulo di f ha massimo su γ rispetto ai punti interni a γ

TRUCCHI TECNICI :

$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ Vediamo dove ho singolarità :

Ricordo che $\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = k\pi$ In 0 c'è un polo

$g(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$ $\lim_{z \to 0} g(z) = 1$

è un polo del 1° ordi. $\Longrightarrow$ è il residuo.

Mi aspetto che lo sviluppo in S. di L. sia $g(z) = \frac{1}{z} + \sum d_n z^n$

Voglio trovare lo sviluppo attorno al polo 0 di $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$: Conosco quello di sen z

$$\frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} = \frac{1}{z} \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)}}_{\text{è una f. olomorfa}}$$

è una f. olomorfa $\Rightarrow$ posso scrivere la serie di Cauchy-Taylor $\dots = \frac{1}{z}\left(\sum_0 B_n z^n\right)$

ovviamente non conosco i coefficienti.

Voglio trovare una serie che sia l'inversa di quel denominatore e quindi $\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots\right)\left(B_0 + B_1 z + B_2 z^2 \dots\right) =$

$B_0 \cdot 1 \overset{\text{residuo}}{=} 1 \Rightarrow B_0 = 1$

$B_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$

$-B_0 \cdot \frac{1}{3!} + B_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_2 = 1/6$

$B_3 - \frac{1}{3!} B_1 = 0 \Rightarrow B_3 = 0$

e quindi i primi pezzi dello sviluppo di Cauchy-Laurent

$$= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{6} z^2 + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} z$$

Vediamo per gli altri poli ! $z = k\pi$

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} z} = (H) = \lim_{k \to k\pi} \frac{1}{\cos z} = \begin{cases} +1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ disp.} \end{cases}$$

In π : $-\frac{1}{(z-\pi)} + \sum_0^\infty \beta_n (z-\pi)^n$

in 2π : $+\frac{1}{(z-2\pi)} + \sum_0^\infty \alpha_n (z-2\pi)^n$

Esempio 2) :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$e^z - 1 = 0 \qquad e^z = 1$

$z = \lg 1 = \cancel{\lg |1|} + i \cancel{\arg 1} +$
$+ 2k\pi i$

Per $k = 0$;

$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = (H) = 1 \Rightarrow$ C'è una singolarità eliminabile in $z = 0$

$\lim_{z \to 2k\pi i} f(z) = \infty \Rightarrow$ con $z = 2k\pi i$ ci sono dei poli: di che ordine?

$$g(z) = (z - 2k\pi i) \cdot \frac{z}{e^z - 1}$$

$\lim_{z \to 2k\pi i} g(z) = (H) = 2k\pi i \lim_{z \to 2k\pi i} \frac{1}{e^z} =$ numero finito

$\Rightarrow$ in $z = 2k\pi i$ ci sono poli di 1° ordine.

Per $k = 0$

$$f(z) = \frac{z}{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$ per $z \to 0$ tende a 1

$$\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots\right)\left(B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots\right) = 1$$

$B_0 \cdot 1 = 1 \qquad B_0 = 1$

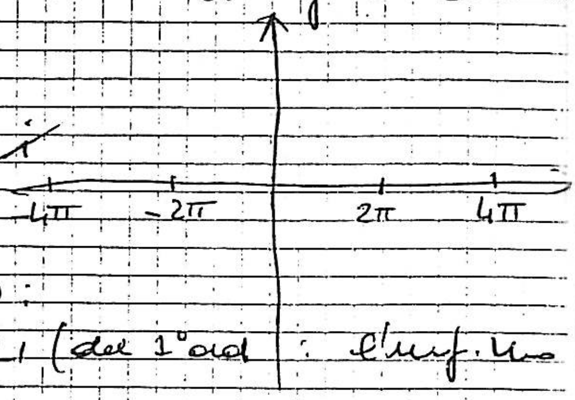
$B_0 \cdot \frac{1}{2!} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$

$B_2 \cdot 1 + B_0 \frac{1}{3!} + B_1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \qquad B_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$

$$\frac{2k\pi i}{z - 2k\pi i} + \sum_n^{\infty} d_n (z - 2k\pi i)^n$$

Calcolare $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{e^{iz}-1}\,dz$ 291090-2

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio R:



$e^{iz} = 1 \quad iz = \lg 1 = 2k\pi \cancel{i}$

In 0 c'è una sing. eliminabile ed il limite è addirittura 0:
negli altri $2k\pi$ ci saranno POLI (del 1° ord : l'inf.mo del denom. è di ordine 1).

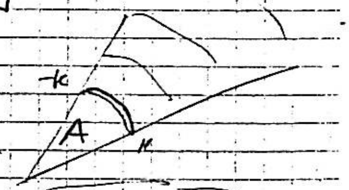
Vediamo il residuo in $z = 2\pi$

$$\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)\frac{z^2}{e^{iz}-1} = 4\pi^2 \lim \frac{z-2\pi}{e^{iz}-1} = (H)$$

$$= 4\pi^2 \cdot \lim_{z\to 2\pi} \frac{1}{ie^{iz}} \overset{(Ho)}{=} 4\pi^2$$

Per trasportare un polinomio di 2° grado sviluppato risp. a zero ad uno sviluppo risp. a un altro punto ad es. 2π posso scrivere:

$$z^2 = (z-2\pi+2\pi)^2 = [(z-2\pi)+2\pi]^2 =$$
$$= (z-2\pi)^2 + 4\pi(z-2\pi) + 4\pi^2$$



- Lemma dell'arco di cerchio grande:

Se nella regione angolare A è $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ per $z \in A$ allora è $\lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 0$

la f deve tirare a zero molto forte

L'integrale di una f può essere ∞ se: 1) la f ha dom. illimitato 2) la f va ad ∞ in qualche punto "schiacciandosi" troppo debolmente (l'∞ è troppo forte)

- Lemma dell'arco di cerchio piccolo:

- Se nella regione angolare A è $\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$ allora è $\lim_{\rho\to 0} \oint_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 0$

!!

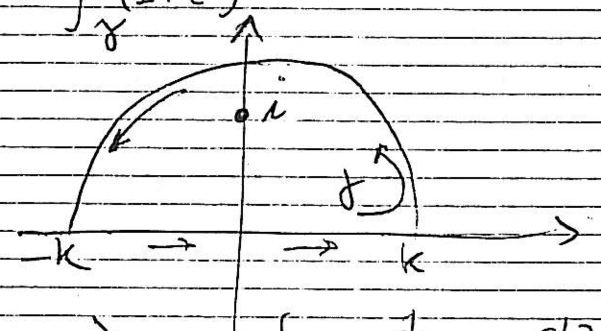
- Mentre il teorema in grande risolve il problema di calcolare $\int$ da $-\infty$ a ∞ come limite di integrali da $-k$ a k, quello in piccolo risolve il problema del calcolo di $\int$ in prossimità dei POLI.

ESERCIZIO:
Si calcoli $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ So che è sommabile (va a 0 del 4° ordine) ma non so calcolare il limite.

- Questo integrale dato che il den non si annulla mai in $\mathbb{R}$ rischia di essere ∞ per colpa degli estremi di integrazione.

$$\oint_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i \sum r_j$$

r_j sono i residui dei punti che cascano all'interno della semicirconf superiore



Dentro cascherà sempre e solo il polo in $z = i$
Quindi $\sum r_j = r(i)$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i\, r(i)$$

$$\oint_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{-k}^{k} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{d_k} \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz$$

Il polo è doppio $\Rightarrow$ devo derivare

$$r(i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] =$$

$$\lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right] = \left.\frac{-2}{(z-i)^2}\right]_{z=i} = -\frac{i}{4}$$

Quindi l'$\oint$ sarà $2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \pi/2$

DOVEVO trovare un numero REALE e positivo, perché la f è reale e positiva. (Verifica x gli errori di calcolo).
Se prendevi la semicirconf. di sotto avrei preso $-\gamma \Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty}$ (l'opposto).

– Altro esercizio

051190-1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+d^2}\,dx$$ (c'è sommabilità essendo $< \frac{1}{x^2+d^2}$) è inf. ma di ord. 2

Il $\cos x$ è duro da trattare: prendo $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+d^2}$

non coincide con la f nell'asse dei reali: infatti $g(z)\Big]_{z=x} = \frac{e^{ix}}{x^2+d^2}$

$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}e^{ix}$ quando $\underbrace{y\to\infty}$ va a zero

e quindi siamo nelle ip.

delle ti dell'arco di cerchio grande (Allargando l'arco di integrazione)

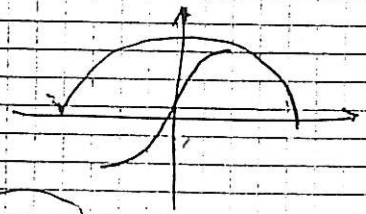
$$\oint \frac{e^{iz}}{z^2+d^2}\,dz = 2\pi i\, r(id) \quad (\text{con } d>0)$$

$$r(id) = \lim_{z\to id} \cancel{(z-id)} \frac{e^{iz}}{(z+id)\cancel{(z-id)}} = \frac{e^{-d}}{2id}$$

(doveva uscire un complesso puro x che poi va moltiplicato per i).

$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$



$$g(z)\Big|_{z=x} = \frac{e^{ix}}{x^2+d^2} = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x^2+d^2}$$

la parte immaginaria è una funzione dispari = l'integrale è nullo.

Quindi il mio integrale è la somma dell'integrale di $\frac{\cos x}{x^2+d^2}$ (parte reale = funzione di pari tutto) + l'integrale della parte immaginaria è NULLA

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+d^2}\,dx = \left(\text{la } \underset{\text{è}}{\text{funzione}} \text{ PARI}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+d^2}\,dx$$

Prendo come funzione aux:

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2+d^2}$$ Applico il lemma di Jordan:

Se $\phi(z)$ tende a zero per $z\to\infty$ allora

$$\oint_{\gamma_k} \phi(z)\, e^{iz}\,dz \longrightarrow 0 \text{ per } z\to\infty$$

$$\oint \frac{z e^{iz}}{z^2+\alpha^2}\,dz = 2\pi i \; r(\alpha i)$$ (Non ho ancora usato Jordan: solo il T. dei res.)

$$r(\alpha i) = \lim_{z\to \alpha i} \cancel{(z-\alpha i)} \frac{z e^{iz}}{\cancel{(z-\alpha i)}(z+\alpha i)}$$ (polo del 1° ord.)

$$= \frac{\cancel{\alpha i}\, e^{-\alpha}}{2\cancel{\alpha i}} = \frac{e^{-\alpha}}{2}$$ (reale puro) molt. per i (ho trovato il coeff. dell'im.)

$$\oint = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\alpha}}{2}$$ ~~è tutto immaginario puro~~.

Me lo dovevo aspettare infatti:

$$g(z)\Big|_{z=x} = \frac{x e^{ix}}{x^2+\alpha^2} = x\,\frac{\cos x + i \sin x}{x^2+\alpha^2} = \frac{x\cos x}{x^2+\alpha^2} + \frac{i x \sin x}{x^2+\alpha^2}$$

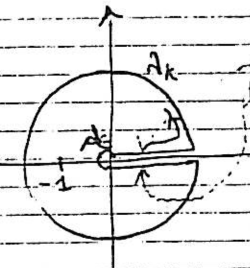
dispari $\Rightarrow \oint$ è NULLO

resta il pezzo immaginario

QUANDO INTEGRO FUNZ. SULL'ASSE $\mathbb{R}$ l'$\int$ DEVE essere REALE !!

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \qquad (0<\alpha<1)$$

Come faccio? la f non è pari. Come la trasformo l'int. da 0 a ∞ in uno da $-\infty$ a $+\infty$?



in realtà si appoggiano una nell'altra sopra l'asse x

$z g(z)$ va a zero ($\alpha-1$ è <0)

Vedo se riesco ad applicare il T. Arco c. Grande a ∂_R e il T.A.C.p. a ∂_ε.

$\to$ sono nelle ip. dei teoremi.

$$g(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$$

Come faccio per il tratto orizzontale? Gli $\int$ sono gli stessi? NO c'è un $2\pi i$ di differenza perché HO FATTO UN GIRO ATTORNO ALL'ORIGINE.

(z^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ è una funz. a ∞ valori).

$$r(-1) = \lim_{z\to -1} \cancel{(1+z)} \frac{z^{\alpha-1}}{\cancel{(1+z)}} = \lim_{z\to -1} (\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z)$$

NOTA

$\arg(z) = \pi$ in quanto

$\alpha = 180° = \pi$

NON c'è $2\pi i$ perché sono ancora sul ramo principale quando calcolo il $\lim_{z\to -1}$ (non ho girato attorno all'origine)

051190-2

$$\lim = e^{(\alpha-1)i\pi} = e^{i\pi\alpha} \cdot \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1} = -e^{i\pi\alpha} \quad \text{e basta.}$$

$$\left(e^{-i\pi} = \frac{1}{e^{i\pi}} = \frac{1}{e^{\lg(-1)}} = -1\right)$$

Compongo tutti i pezzi e calcolo l'$\oint$ di PAC-MAN

$$\oint_\gamma \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\,dz = \int_\epsilon^\rho \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_{\partial_\rho} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\,dz + \int_{\partial\rho}^{\epsilon} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}e^{2\pi i\alpha}\,dx$$

Qui dovrebbe essere un $\int$ in dz: mi accorgo che gli z sono gli x di prima MA un GIRO SOPRA (ho girato attorno all'origine). Per fare il giro molt. per $e^{2\pi i\alpha}$

Sono un $\int$ sopra

Se non c'era α qui è lo stesso: è come molt. per 1

Adesso faccio tendere $\epsilon \to 0$ e $\rho \to \infty$

$\int_{\partial\rho}$ va via (2 integrali uguali percorsi in senso inverso).

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} \left[\int_\epsilon^\rho \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx - \int_\epsilon^\rho \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \cdot \left(e^{2\pi i\alpha}\right)\right] =$$

ho invertito gli estremi.

$$= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) \int_\epsilon^\rho \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$$

quando $\epsilon \to 0$, $\rho \to \infty$ ho proprio l'$\int$ cercato

$$\left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) \int_\epsilon^\rho \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i \underbrace{\left(-e^{i\pi\alpha}\right)}_{\text{residuo}} \Longrightarrow$$

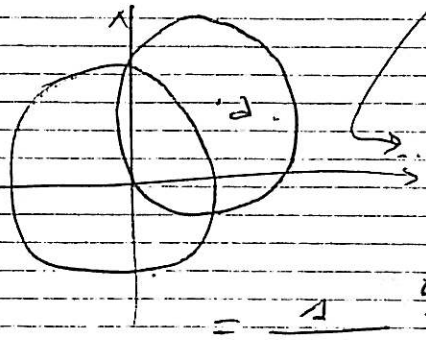
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = -\frac{2\pi i\, e^{i\pi\alpha}}{\underbrace{1 - e^{2\pi i\alpha}}_{\text{diff. di quadrati}}}$$

Devo riconoscere che è un numero reale.

$$\ldots = -\frac{2\pi i\, e^{i\pi\alpha}}{\left(1 - e^{\pi i\alpha}\right)\left(1 + e^{\pi i\alpha}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Ancora su prolungamenti di serie di PxR:

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$$



Per prolungarla in $z - a$

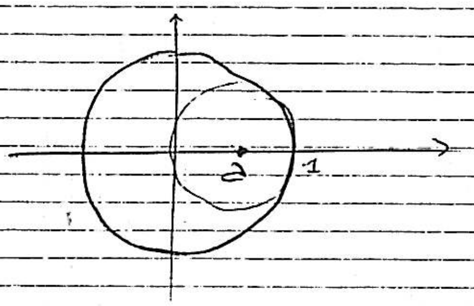
$$= \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} =$$

$$= \frac{1}{1-a}\sum_0^\infty \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{(1-a)^{n+1}}\,(z-a)^n$$

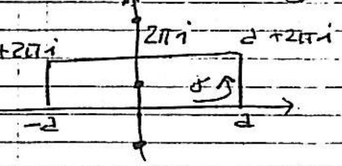
E il raggio di convergenza?

$$\left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1 \qquad |z-a| < |1-a|$$

Ho sempre un prolungamento con questo metodo?
Sì, basta che a non sia meno que:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$$ Stavolta, invece di una semicirconf. prendo un rettangolo:



Basta far tendere a ∞ la base.
Vado a vedere quante singolarità cascano all'interno di γ:

$$\oint_\gamma \frac{e^{az}}{1+e^z}\,dz$$ (Cambio x in z perché $f(x)$ è l'unico prolungament di $f(z)$ nell'asse reale).

$$= 2\pi i\, r(i\pi)$$

Calcolo i p. di sing.

$e^z = -1 \quad z = \lg(-1) = \cancel{\ln|-1|} + i\arg(-1) + 2k\pi i$ C'è n'è solo uno che casca dentro al rettangolo.

- Non posso far tendere all'∞ anche l'altezza altrimenti avrei ∞ punti di discontinuità.

08 11 90 - 1

$$\boxed{0 < \alpha < 1}$$

$$\oint_\gamma \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} = 2\pi i\, r(i\pi) = -2\pi i\, e^{\alpha i \pi}$$

$$\oint_\gamma \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz = \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx}_{\text{Quello che mi interessa.}} + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(x+iy)}}{1+e^{a+iy}}\,dy \; + $$

dove $x = a$ e varia solo y

il dx non si muove.

$$+ \int_{a}^{-a} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx + i\int_{2\pi}^{0} \frac{e^{\alpha(-a+iy)}}{1+e^{-a+iy}}\,dy =$$

$y = \text{costante} = 2\pi i$

$e^{2\pi i} = 1$

$$= -2\pi i\, e^{\alpha i \pi};$$ Separo la parte reale dalla parte immaginaria:

$$\oint_\gamma = \cancel{\int_{-a}^{a} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx} + \int_{-a}^{a} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx \underbrace{\left[1 - e^{2\pi\alpha i}\right]}_{\text{(fuori dall'integrale)}} +$$

$$+ i\int_0^{2\pi} e^{\alpha i y}\left(\frac{e^{\alpha a}}{1+e^{a+iy}} - \boxed{\frac{e^{-\alpha a}}{1+e^{-a+iy}}}\right) dy = -2\pi i\, e^{\alpha i \pi}$$

$\to 0$ l'ordine di ∞ del den è > del num. $\Rightarrow$ va a 0 $\quad \to 0$

Ora faccio tendere $a \to \infty$: Ho risolto:

Quando faccio tendere $a \to \infty$ ottengo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx = \frac{-2\pi i\, e^{\alpha i \pi}}{\left[1 - e^{2\pi\alpha i}\right]} = $$ (Bisogna riconoscere un numero reale ($\sin x$))

$$= -2\pi \frac{2i}{e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

Ho ottenuto lo STESSO $\int$ dell'altra volta; vedo se la $f(x)$ dell'altra volta ha qualche parentela con questa:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \qquad \text{pongo } x = e^{\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\xi-\xi}}{1+e^{\xi}}\, e^{\xi}\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\xi}}{1+e^{\xi}}\, d\xi$$ che è quello che ho appena calcolato.

L'es. di oggi è $\neq$ da quello di ieri: che non avevo a disposizione il T.d.C.G. in quanto ho fatto tendere a ∞ solo un lato dell'insieme: non potevo far tendere a ∞ anche l'altro lato altrimenti avrei acchiappato ∞ singolarità.

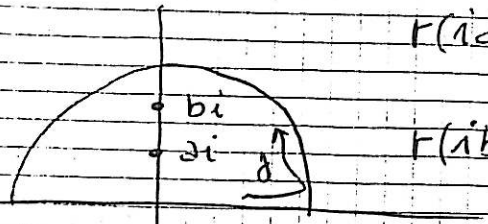
Proposto:

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = (\text{funzione pari}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

Il den. non si annulla mai nella retta reale: non ho poli (è un polinomio: i punti disc. sono poli rimanenti) e quindi non mi serve il lemma dell'arco di C piccolo. Il T. Arco di C. Grande vale sì e quindi:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} =$$



$$r(ia) = \frac{1}{2ia(-a^2+b^2)}$$

$$r(ib) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

$$= 2\pi i \left(r(ia) + r(ib) \right)$$

081190-2

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \pi\left(\frac{1}{(b^2-a^2)a} + \frac{1}{(a^2-b^2)b}\right)$$ facilmente si verifica che ho ottenuto un numero reale positivo.

Prolungamenti (continuo).

$$f_1(z) = \sum_1^\infty{}_k\, 2^{k-1} z^k$$

$$f_2(z) = \sum_1^\infty{}_k \left(\frac{z}{1-z}\right)^k$$

$$f_3(z) = \frac{z}{1-2z}$$

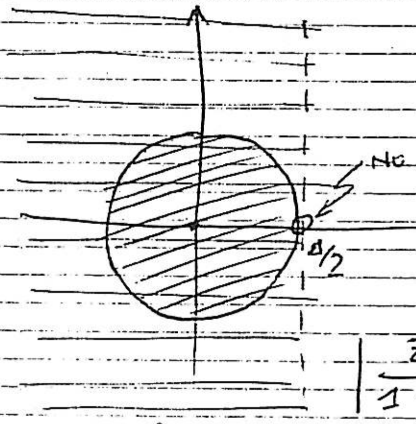
Cerchiamo di vedere che queste funzioni apparentemente diverse sono la stessa funzione dove esistono.

Dove convergono?

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty (2z)^k$$ è un resto (manca il 1° termine) della serie geometrica di rag. $2z$

Converge per $|2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$

Converge a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2z} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-1+2z}{1-2z} = \frac{z}{1-2z} = f_3$



$f_3 \;\exists$ in $\mathbb{C}$, $z \neq \frac{1}{2}$

Anche f_2 è un resto di una serie geometrica $\Rightarrow$ converge dove converge la serie geom.

$$\left|\frac{z}{1-z}\right| < 1 \Rightarrow |z| < |1-z| \Rightarrow$$

$x^2 + \cancel{y^2} < (1-x)^2 + \cancel{y^2}$; $\cancel{x^2} < 1 + \cancel{x^2} - 2x$; $\boxed{x < \frac{1}{2}}$

f_2 converge, nel semipiano trovato, a $\left(\frac{1}{1-\frac{z}{1-z}} - 1\right) =$

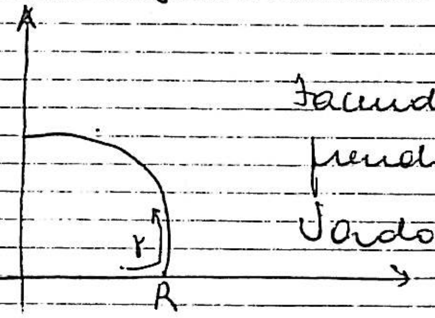
$$= \frac{1}{1-2z} - 1 = \frac{z}{1-2z}$$

Quanti zeri ha il polinomio $f(z) = z^8 + z^3 + 2z + 3$ nel primo quadrante?

Uso il T. dell'indicatore logaritmico

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = n - p$$

zeri poli



Facendo tendere $R \to \infty$ gli zeri li prendo proprio tutti perché sono al + R. Vado a vedere se c'è qualche 0 su γ: (non sull'arco, quello lo faccio variare e quindi non mi interessa).

Asse $\mathbb{R}$:

$x^8 + x^3 + 2x + 3 > 0$ per $x \geq 0$

Asse i

$$(iy)^8 + (iy)^3 + 2iy + 3 = y^8 - iy^3 + 2iy + 3 =$$

$$= (y^8 + 3) + i(-y^3 + 2y)$$ Perché si annulli devono annullarsi sia la parte reale che quella immaginaria, ma la parte reale NON si annulla MAI.

Voglio interessarmi della variazione dell'argomento.

$z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ riscrivo il polinomio usando questo cambio di var.:

$$f(z) = R^8 e^{8i\theta} + R^3 e^{3i\theta} + 2R e^{i\theta} + 3 =$$

$$= R^8 \left(\boxed{e^{8i\theta}} + \frac{e^{3i\theta}}{R^5} + \frac{2e^{i\theta}}{R^7} + \frac{3}{R^8} \right)$$ faccio tendere $R \to \infty$

non completano un giro (vanno a zero)

varia tra 0 e 4π = 2 giri

Vado a vedere la Δ arg. tra 0 e il punto dell'arco che sta nell'asse i

$$\arg f(0) = \operatorname{arctg}\left[\frac{-y^3 + 2y}{y^8 + 3}\right]_{y=0} = 0$$

$\arg(i\infty) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}\left[\frac{-y^3+2y}{y^8+3}\right] \to 0$ 081190-3

$\Delta \arg = 0$ la variazione è quindi nulla.

Su <u>TUTTA</u> γ allora c'è variazione nulla sull'arco.

Quindi il polinomio ha 2 zeri nel 1° quadrante.

Riprendo T. di Rouché: sulla frontiera $|f(z)| > |g(z)|$
$\Rightarrow$ all'interno di γ $f(z) = 0$ $(f+g)(z) = 0$
hanno lo stesso numero di soluzioni (contate con le dovute molteplicità).

Se ho $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ Prendo quella con grado max $a_n z^n$ e il resto $\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$
f g

L'Ip. è verificata sicuramente.

Spazio vettoriale normato

- Quando scrivo la formula di Taylor di $f(x)$ e prendo lo spazio dei polinomi n bloccando lo sviluppo a n termini è come se avessi proiettato la funzione su tutte le q. assi dello spazio di dim. n. Ho sempre comunque una approx: per stimare la bontà della proiezione ho il Resto. Più derivo (finchè c'è derivata c'è speranza) più miglioro la proiezione (xchè aumento la dimensione dello spazio)

Per vedere com'è l'approx in uno spazio normato uso la norma e vedo che sia minima

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{K} c_j \vec{u}_j \right\|$$

Differenza tra distanza e norma:

$d: S\times S \to \mathbb{R}^+$ $d(x,y) \geq 0$ $d(x,y) = d(y,x)$
Spazio qualsiasi $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\| \ \| : V \to \mathbb{R}^+$ $\|x\| \geq 0$ $\|x\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0_{V}$

$\|x-y\| = \|y-x\|$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

la norma c'è solo in uno spazio vettoriale ed essa genera una distanza (NON viceversa)
Come? Con:
la $\boxed{d(x,y) = \|x-y\|}$

Uno spazio dotato di dist. si chiama metrico, uno avente norma si chiama normato.
Uno spazio normato può essere reso metrico.
Spazi metrici principali: $\mathbb{R}$ (la dist. è il modulo), $\mathbb{C}$ (idem)

- In uno spazio metrico, $\{x_n\}$ si dice convergente secondo Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall p, q > \bar{n}$: $d(x_p, x_q) < \varepsilon$;

—— ooo ——

Sp. metrico
$\{x_n\}$ converge a $d(x)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall p > \bar{n}$
$$d(x_p, x) < \varepsilon$$
Sp. normato:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall p > \bar{n} \quad \|x_p - x\| < \varepsilon$$
Teor. di Cauchy sull'esistenza del limite finito: $\mathbb{R}$ è completo
Ogni succ. che converge secondo Cauchy converge in maniera ordinaria.

~~Teorema~~ Def.: Si dice completo rispetto ad una norma uno sp. vettoriale tale che ogni succ. convergente secondo Cauchy converge anche in senso ordinario.

- Vediamo un po' di spazi che conosciamo e che norma abbiamo loro:

$C^0(I)$ è lo spazio delle funzioni continue su I dotato della norma $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$
(norma della convergenza uniforme) perché?
perché la sup è proprio quella norma che se prendo una succ. convergente $\|f_n - f_m\| \to 0$
ho detto che $\sup |f_n(t) - f_m(t)| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$)

Rispetto a questa norma lo spazio C^0 è completo.

Su C^0 posso mettere altre norme, es:

$L^1(I)$ è lo spazio delle funzioni sommabili su I dotato della norma $\|f\|_{L^1} = \int_I |f(t)|\,dt$

C^0 è un ssv. di $L^1 \Rightarrow$ posso fornire questa norma su C^0, ma NON è detto che C^0 risulti completo.

- Convergenza in media (di ordine 1)

$$\|f_n - f_m\|_{L^1(I)} \longrightarrow 0 \qquad \int_I |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \longrightarrow 0$$

- Come aggiustare I affinché renda $C^0(I)$ completo:

Teorema: Se una succ. (f_n) di $C^0(I)$ converge nella norma di $C^0(I)$ ed I ha misura finita, allora converge anche nella norma di L^1

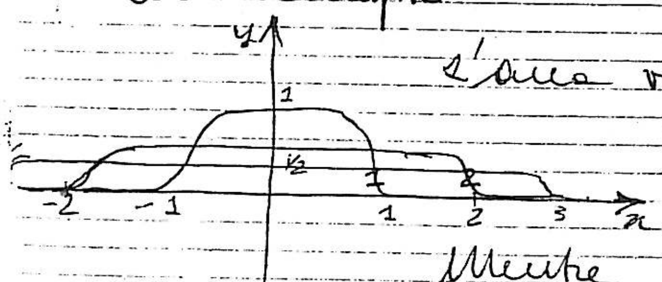
$$\int_I |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \le \int_I \underbrace{\sup |f_n(t) - f_m(t)|}_{M}\,dt = M\int_I dt$$

$$= M \,\mathrm{mis}(I)$$

$M \to 0$, $\mathrm{mis}(I)$ se cost. $\to 0$ e resta a forte.

Se $\mathrm{mis}(I)$ è finito tutto converge.

Controesempio:



L'area vale sempre 2 e quindi $\int_I |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \not\longrightarrow 0$

Mentre la norma di $C^0(I)$ funziona perché il sup delle funzioni tende proprio alla funzione nulla

Sugli intervalli chiusi e limitati invece la conv. uniforme IMPLICA SEMPRE anche la convergenza in media.

La norma di $C^1(I)$ è $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}$ (non si usa mai).

ℓ^2 e L^2

in $\mathbb{R}$ $\|x\|_{\mathbb{R}} = |x|$

in $\mathbb{R}^2$ $\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ ed essendo $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ anche tutto ciò per $\mathbb{C}^n$

in $\mathbb{R}^n$ $\|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

in $\mathbb{C}^n$ $\|\vec{x}\|_{\mathbb{C}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Vado a definire uno spazio che ha come componenti ... di n-uple delle successioni di numeri complessi.

ℓ^2 è lo spazio di successioni $\{x_n\}$ di numeri complessi tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$

Vedo ora se riesco ad appioppare a questo spazio (è uno spazio, è facile da verificare) una norma in maniera da renderlo uno S.V. normato

$\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$ ci sarebbe da verificare che questa è effettivamente una norma.

E per la completezza?

- Teorema di HAUSDORFF:
  ℓ^2 con la sua norma è completo

Prodotto scalare:

$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$

$\langle x, \beta y \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle$ $\quad (\langle x, \beta y \rangle = \overline{\langle \beta y, x \rangle} = \overline{\beta \langle y, x \rangle} = \overline{\beta} \langle x, y \rangle)$

$\langle x, x \rangle$ = numero Reale

- Due vettori di uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

- Su $\mathbb{R}^n$ poniamo il seguente prodotto scalare:

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

091190-2

Su $\mathbb{C}^n$ fondamentale il seguente prodotto scalare:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Su uno spazio con prod. scalare io ci piazzo una norma così definita:
e questa è proprio una norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Su ℓ^2 si definisce il seguente prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

Spazio pre-Hilbertiano := uno spazio dotato di prodotto scalare!

Spazio Hilbertiano := uno spazio pre-Hilbertiano completo e base numerabile e di dimensione infinito.

Come faccio con le basi? Prima, se dim = n n+1 vettori erano al più lin. indipendenti. Ora, non più: ogni M-upla è lin. dipendente
come faccio?

__Def:__ si dice __base__ (o sistema di riferimento completo) di uno spazio normato una successione di vettori u_i tale che $\forall\, \varepsilon > 0$ e per ogni x dello spazio $\exists$ una n-upla di vettori estratti dagli u_i e una n-pla di coefficienti λ_i tale che:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right\| < \varepsilon$$

Se prendo $\lambda_k = \langle x, u_k \rangle$ allora $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|$ è minimo.

Base di ℓ^2: 1, 0, 0, 0, ...
0, 1, 0, 0, ...
0, 0, 1, 0, ...

Vediamo ora com'è fatto $L^2(I)$

$L^2(I)$ è lo spazio delle funzioni il cui quadrato è sommabile in I: $\int_I |f(t)|^2 \, dt < +\infty$

Su $\bar{L}^2$ si fa uso della seguente norma

$$\boxed{\|f\|_{\bar{L}^2(I)} = \left\{ \int_I |f(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2}}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)\, \overline{g(t)} \, dt$$ è un prodotto scalare (non lo dimostro).

$\bar{L}^1$ è completo nella sua norma.

l^2 è completo nella sua (T. di Hausdorff).

$\bar{L}^2$ è completo nella sua.

$\bar{L}^p(I)$ è lo spazio delle funzioni la cui potenza p-esima è sommabile in I.

$$\int_I |f(t)|^p \, dt < +\infty \qquad \|f\|_{\bar{L}^p} = \left\{ \int_I |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$$

Questa norma NON deriva da un prodotto scalare

Dato un vettore x di uno spazio di Hilbert H e dato un sistema di vettori $\{u_i\}$ di H indipendente, allora la migliore approssimazione in norma di x è data da

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad \text{dove} \quad c_i = \langle x_i, u_i \rangle$$

T: Dato un sistema di vettori u_i esiste un sistema ortonormale v_j tale che ogni u_i è comb. lineare finita degli v_j

(Processo di ortogonalizzazione di SCHMIDT

Potrebbe utilizzare come sistema $\sin nt$ $\cos nt$ in I $[-\pi, \pi]$ essendo $\sin nt$ e $\cos nt$ ortogonali.

Il sistema costituito da $\sin nt$ e $\cos nt$ è ortogonale in $L^2(-\pi,\pi)$ 12 11 90 - 1

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = 0 \quad n \neq m$$

Il sistema ~~...~~ è ortogonale e NON ortonormale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt \, dt = 0 \quad n \neq m$$

Lo spazio $L^p(I)$ è lo spazio in cui la potenza p-esima è sommabile in I.
La norma relativa è $\int_I |f(t)|^p dt < +\infty$

Di tutti questi solo L^2 ha la norma che proviene da un prodotto scalare, anche se ciascuno degli L^p è completo nella sua norma.

Teorema della migliore approssimazione in norma.

Dato un vettore x di uno spazio di Hilbert H, e dato un sistema di vettori indipendenti di H, per esempio $\{u_i\}$ allora la migliore approssimazione in norma di x è data da

$$\sum^{\infty} c_i u_i \quad \text{dove } c_i = \langle x, u_i \rangle$$

$\| x - \sum^{\infty} c_i u_i \|$ è minima.

La dimostraz. si imposta con:

$0 \leq \| x - \sum^{\infty} c_i u_i \|^2 = \langle x - \sum^{\infty} c_i u_i, x - \sum^{\infty} c_i u_i \rangle = \langle x, x \rangle$
$- \langle x, \sum^{\infty} c_i u_i \rangle - \langle \sum^{\infty} c_i u_i, x \rangle + \sum^{\infty} c_i^2 \langle u_i, u_i \rangle =$
$= \| x \|^2 - 2 \langle x, \sum c_i u_i \rangle + \sum c_i^2 = \| x^2 \| - 2 \sum c_i \langle x, u_i \rangle$
$+ \sum c_i^2$ ..... ovviamente tale primo pezzo di dimostrazione si è potuto svolgere facendo delle ipotesi semplificative come ad esempio considerare i vettori normali e in uno spazio di Hilbert reale. Tali semplificazioni non rendono la dimostrazione restrittiva.

T. Dato un sistema di vettori u_i $\exists$ sempre un sistema di vettori ortonormali $\vec{u}_j$ tale che ogni $\vec{u}_i$ è comb. lin. finita degli u_j

Consideriamo $I = [-1,1]$ $\quad 1, t, t^2, t^3, \dots t^n, \dots$

$$\left\{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt\right\}^{1/2} = \sqrt{2}$$ Tale successione non ha norma

$$\{1,t\} = \int_{-1}^{1} 1\cdot t\,dt = 0$$ i vettori sono tra loro ortogonali.

$$\{1,t^2\} = \int_{-1}^{1} 1\cdot t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$$ non sono ortogonali

Il teorema precedente viene detto Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

- Vediamo ora cosa può essere comodo in L^2

Consideriamo l'intervallo $[-\pi,\pi]$

Utilizziamo funzioni del genere $\sin nt$, $\cos nt$. Tali funz. sono comode in quanto il sistema costituito da $\sin nt$ e $\cos nt$ è ortogonale in $[-\pi,\pi]$ di L^2

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = 0 \quad \forall n, m \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = 0 \quad n \neq m$$

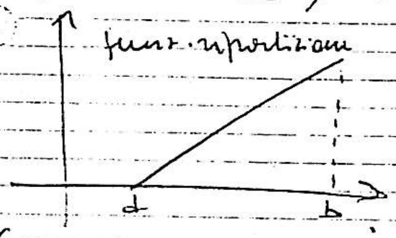
Con $\sin nt$ e $\cos nt$ riesco ad esprimere elementi di L^2 e L^1. Tra l^2 ed L^2 c'è un forte legame: Preso una base in l^2 ed una in L^2 $\exists$ sempre un isomorfismo che mi permette di passare da una base all'altra.

Mentre la base cos nt, sin nt è comoda in $L^2_t[-\pi,\pi]$ potrebbe essere interessante trovare una base che ci permette di avere delle comodità in $L^2([0,+\infty])$ ed $L^2((-\infty,+\infty))$. Quando di un intervallo $[a,b]$ si dice che la sua lunghezza è $\int_a^b dt = b-a$ alla sua misura si associa sempre una funzione che prende l'insieme e lo manda nei numeri reali positivi.

$\mu : E \to \mathbb{R}^+$ inoltre siamo abituati alla seguente proprietà della misura: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ inoltre $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Tale proprietà viene detta SUBADDITIVITÀ.

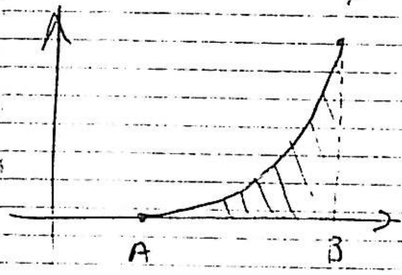
Consideriamo una situazione del genere:



La misura di tale segmento è

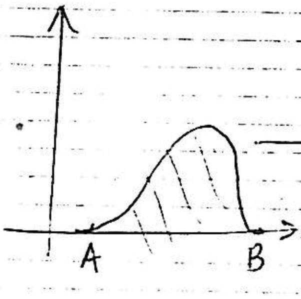
$$\mu([a,b]) = b-a = \int_a^b 1\,dt$$

Consideriamo invece

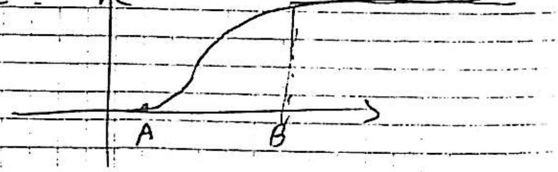


$$\mu([A,B]) = \int_a^b w(t)\,dt$$

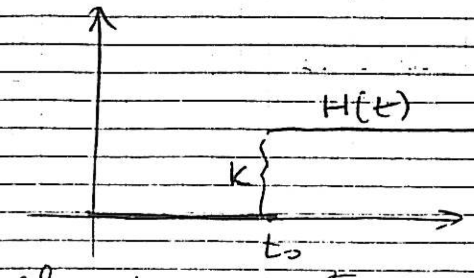
Quindi a misure diverse sono associate funzioni diverse. Tali funzioni hanno l'obbligo di essere crescenti, o perlomeno di non essere decrescenti; ovviamente ogni funzione ha $\neq$ derivata



→ Questa potrebbe essere la derivata di una funzione tipo questa:



Tale funzione è detta FUNZIONE DI RIPARTIZIONE. Dunque una tale funzione è una funzione che associa la misura ad un segmento ed ha derivata (una funzione di ripartizione è la densità e.g.).

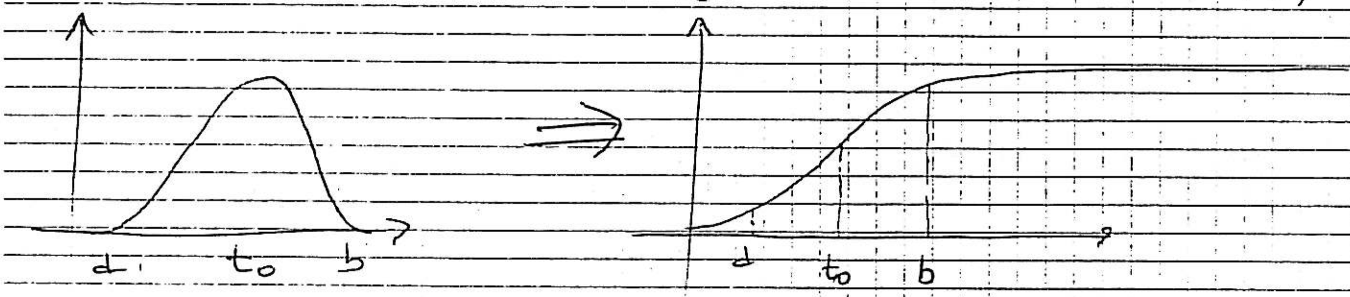


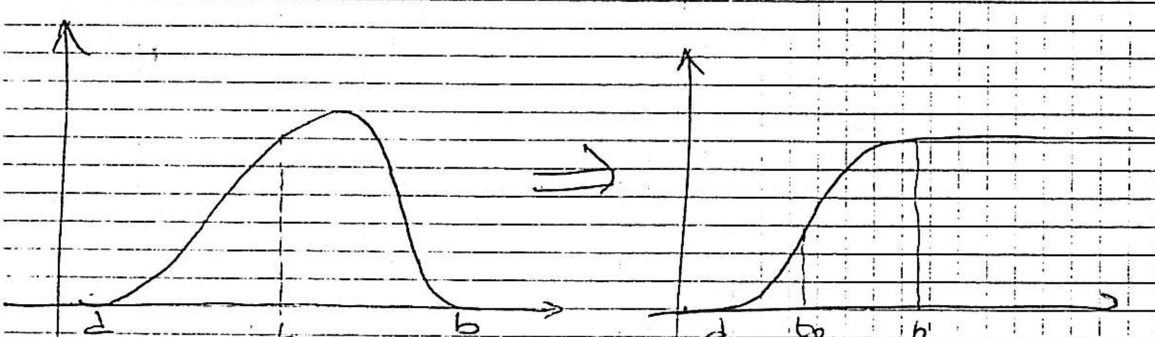
$$\mu([a,b]) = H(b) - H(a)$$

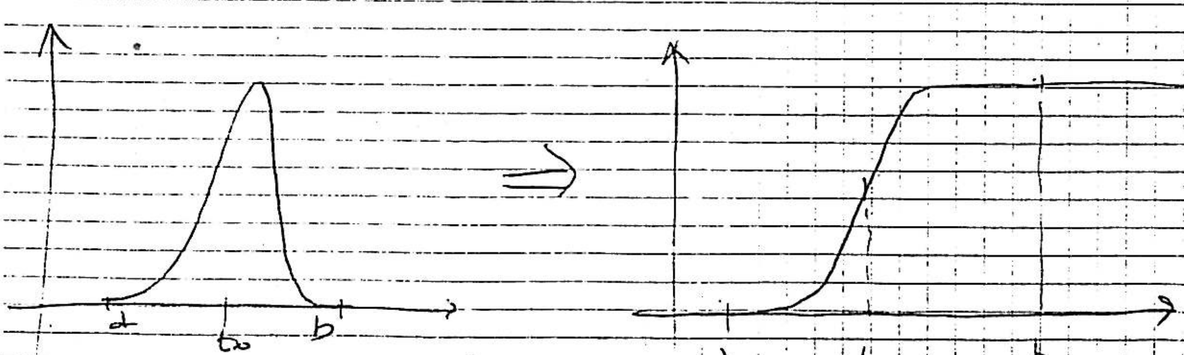
La misura associata a tale segmento dipende dall'intervallo considerato, infatti tutti i segmenti che non contengono t_0 hanno misura nulla, mentre tutti i segmenti che lo contengono hanno misura K come se la massa di tutto il sistema (considerando la situazione in termini di densità) fosse concentrata in t_0. Tale misura la si può scrivere ERRONEAMENTE nella maniera seguente:

$$\mu([a,b]) = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(t)\,dt$$

Questo è un abuso di scrittura in quanto la funzione non ha derivata in t_0 (non è continua in t_0).





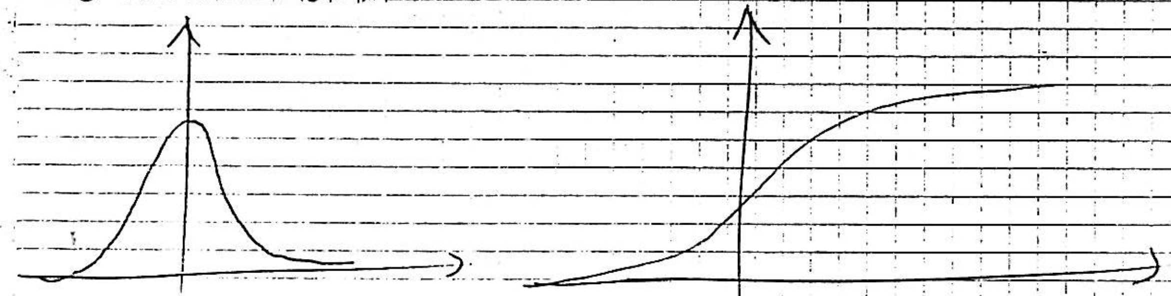


Ne segue che H è una particolare funzione di ripartizione.

Mi posso chiedere allora se in L^2 posso considerare l'integrale dei polinomi. Questo lo posso fare se considero una funzione $w(t)$ in modo tale che i polinomi considerati costituiscano una base di L^2; $w(t)$ è una funzione di densità.

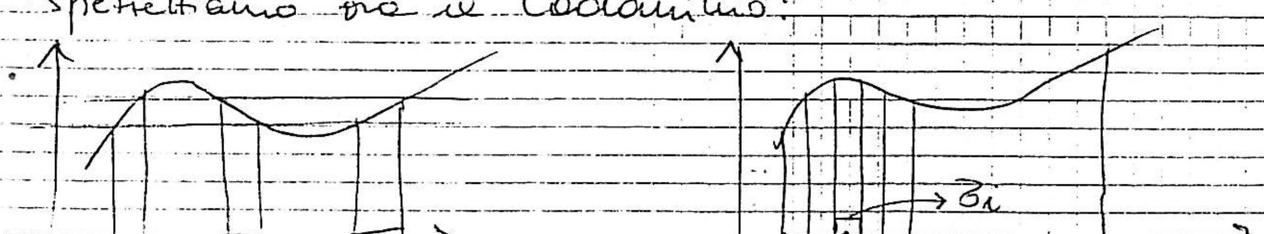
$$\int_0^{+\infty} t^n w(t)\,dt$$

Se considero $w(t) = e^{-t} t^{\alpha}$ i polinomi che ottengo formano una base di $L^2([0,+\infty])$. Tali polinomi si dicono polinomi di Laguerre. Oltre ai polinomi di Laguerre, in $L^2([a,b])$ esistono anche i polinomi di CHEBYSHEV che formano una base di $L^2([a,b])$.
In $L^2(+\infty,-\infty)$ i polinomi che formano una base ORTONORMALE sono detti polinomi di Hermite. In tal caso $w(t) = e^{-t^2}$.



Tale funzione somiglia ad una gaussiana. La misura di una curva si ottiene "spezzando" il dominio e sommando poi tutti i rettangolini ottenuti.

Spezzettiamo ora il codominio:

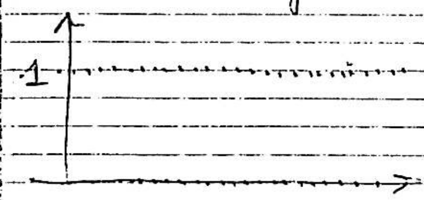


In tal caso ottengo un insieme di intervalli. ξ_i $\left|\sum f(\xi_i)\,\text{mis}\,\delta_i - L\right| < \varepsilon$

La famiglia di tutti tali insiemi si dice famiglia degli insiemi misurabili secondo LEBESGUE.

Consideriamo le funzioni tali che l'immagine inversa degli intervalli sia un insieme misurabile secondo Lebesgue; esse si dicono funzioni misurabili secondo Lebesgue.

Consideriamo la funzione di Diriclet (vale 1 sui $\mathbb{Q}$ ed ∅ sugli irrazionali: $f(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{su } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{su } \mathbb{Q} \end{cases}$



L'intervallo che contiene 1 è tutto l'insieme dei razionali, mentre l'intervallo che contiene lo ∅ è tutto l'insieme degli irrazionali. Ne risulta che la funzione di Diriclet è misurabile secondo Lebesgue. Vediamo di associare tale misurabilità all'integrabilità.

Voglio comunque che: $I(A \cup B) \leq I(A) + I(B)$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow I(A \cup B) = I(A) + I(B)$

Proviamo a definire l'integrale della f di Diriclet: tale integrale vale ∅ in quanto i punti razionali sono troppo pochi. Se consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

L'integrale di $f(x)$ $\exists$ e vale 1

Il modo di fare l'$\int$ è un modo di fare una misura.

Per quanto strane possano essere le funzioni, le controimmagini del codominio $\in$ sempre alla famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Ciò indica che tale famiglia è ricchissima.

Disuguaglianza di Bessel: $\boxed{\|x\|^2 \geq \sum^{\infty} |d_i|^2}$

dice che $d_i = \langle x_i, u_i \rangle$ costituiscano un elemento l^2 (la successione di tali d_i costituisce un elemento di l^2). Ne segue che l^2 è una buona approssimazione di uno spazio di Hilbert generico. Tali coefficienti $d_i = \langle x_i, u_i \rangle$ sono detti coefficienti di Fourier.

Teorema: Dato un sistema completo, indipendente ed ortonormale in L^2, e dato un elemento $\{d_i\} \in l^2$, esiste una funzione di L^2 tale che gli d_i siano i suoi coefficienti di Fourier rispetto al sistema.

Questo è il teorema di Fisher - Riesz.

Con questo teorema si può quindi dire che L^2 è completo rispetto alla sua norma. Se considero la base $\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$, rispetto ai coseni:

$\alpha_i = \langle f, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle$ Posso allora scrivere la serie:

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n \langle f, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum \left(\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt \, dt \right) \cos n$$

$$= \sum \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nt \, dt \right) \cos nt$$

Tale serie è la serie di Fourier e l'integrale in termine rappresenta i coeff. di Fourier.

Vediamo quand'è che nella disuguaglianza di Bessel c'è l'uguale: questo si verifica quando il sistema è completo.

$\|x\|^2 = \sum^{\infty} \|\alpha_i\|^2$ Tale uguaglianza si dice di PARSEVAL.

La disuguaglianza di Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ è vera in qualunque spazio di Hilbert e vale l'uguaglianza se x ed y sono linearmente dipendenti.

$|\alpha_1 a_2 + b_1 b_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + b_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + b_2^2}$

La dimostrazione si esegue tenendo presente che $(\alpha + b)^2 \geq 0$

ooo

Esercizi:

- Si dica dov'è conforme la trasformazione indotta da $f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

R: Essa è conforme dove $f(z)$ è olomorfa con derivata

La $f(z)$ è olomorfa per $z \neq 1$,

$$f'(z) = 2\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \cdot \frac{(z-1)-(z+1)}{(z-1)^2} = -4\,\frac{z+1}{(z-1)^3}$$

$$f'(1) \neq 0 \Rightarrow z \neq -1$$

— ooo —

Si calcoli un residuo in $z=1$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^3}$$

Per $z=1$ si ha un polo del 3° ordine. Quindi:

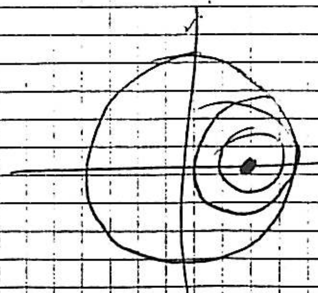
$$r(1) = \frac{d^2}{dz^2} \cdot \frac{1}{2!}\left(\cancel{(z-1)^3}\,\frac{1}{z^2\cancel{(z-1)^3}}\right)_{z=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{z^4}\right)_{z=1} = 3$$

— ooo —

Si ~~calcoli~~ consideri la serie di potenze $\sum_{k=2}^{\infty}(2z)^k$

È valida la derivazione per serie nel cerchio chiuso di centro $z=\frac{1}{4}$ e raggio $=\frac{1}{4}$? È valida nel cerchio chiuso di centro $z=\frac{1}{4}$ e raggio $r=\frac{3}{17}$?

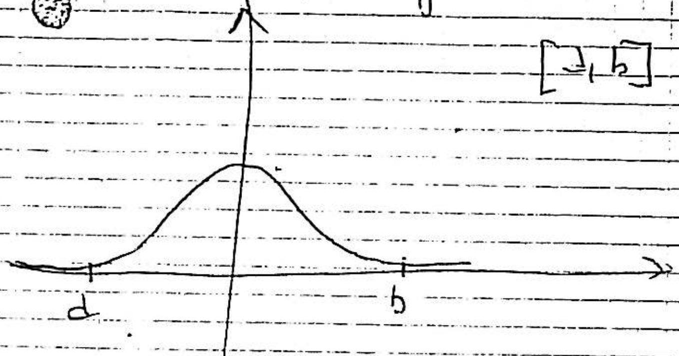
So che una serie converge in un cerchio aperto, converge in ogni punto interno del cerchio. Devo trovare che il cerchio chiuso sia contenuto in un cerchio aperto in cui la serie converge.
La serie è geometrica e converge nel cerchio di centro 0 e raggio $r=\frac{1}{2}$. Dunque nel primo cerchio chiuso la serie <u>non</u> converge. Nel secondo cerchio converge perché $\frac{3}{17} < \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$



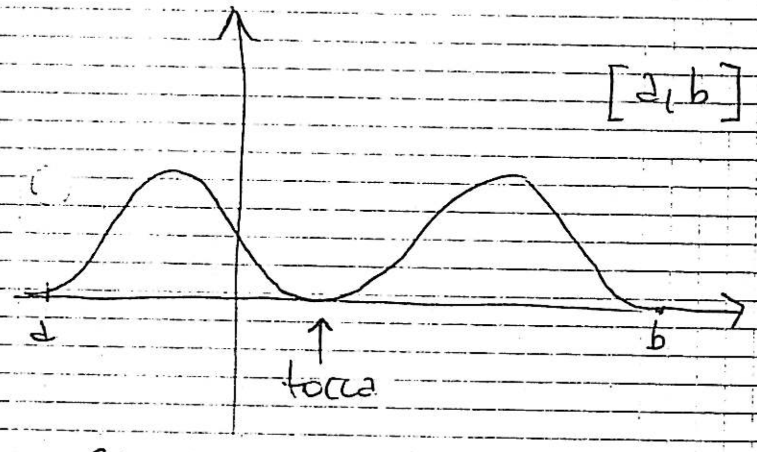
151190 - 4

Si dice SUPPORTO di una funzione f il più piccolo chiuso al di fuori del quale la funzione è nulla

$[a,b]$ supporto di f



$[a,b]$ è ancora il supporto di f



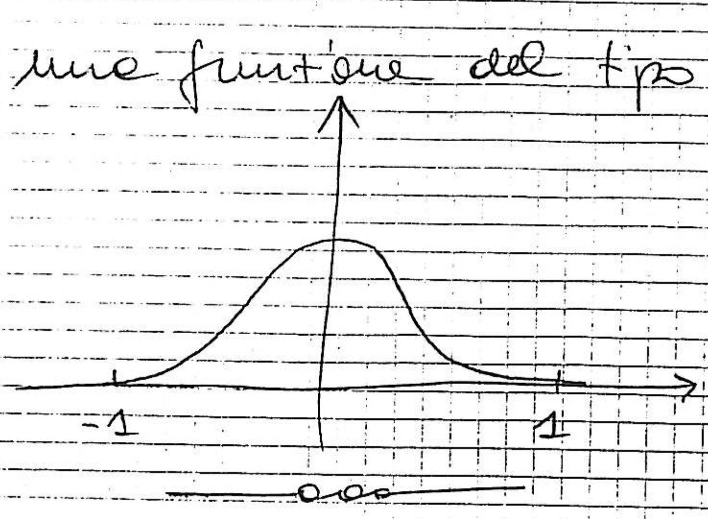
Si dia un esempio di funzione non nulla che sia $C^{\infty}(\mathbb{R})$ ed a supporto compatto.

Non posso usare una funzione analitica in quanto queste non hanno supporto compatto in $\mathbb{R}$

Una funzione adatta allo scopo può essere:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Questa è una funzione del tipo



— o o o —

Si dia la definizione di convergenza nella norma di $C^0[-1,1]$ e nella norma di $L^1[-1,1]$. Una successione di funzioni che converge nella prima delle due norme sopracitate converge anche nella seconda?

$$\| f_n - f \|_{C^0[-1,1]} = \sup | f_n(t) - f(t) | \to 0$$

$$\| f_n - f \|_{L^1([-1,1])} = \int_{-1}^{1} | f_n(t) - f(t) | \, dt \to 0$$

Si perché l'insieme su cui sto ha misura finita.

— ooo —

Sia $f(z)$ una funzione (non identicamente nulla nella sua regione di olomorfia) che vale zero nei punti $\frac{1}{n} + \frac{i}{n}$ $(n = \pm 1, \pm 2 \dots)$

Tale regione può coincidere con $\mathbb{C}$?

Tale regione può contenere il punto $z=0$?

Tale regione può contenere il punto $z = 1 + i$?

— o —

Riassunto di quanto abbiamo imparato:

- Uno spazio normato e completo si dice di BANACH

$\{u_i\}$ sistema di riferimento ortonormale di L^2

$\{d_i\} : \sum |d_i|^2 < +\infty \Rightarrow \exists f \in L^2 \ \langle f, u_i \rangle = d_i$

$l^2 \rightleftarrows L^2$ $\quad \{d_i\} + \{b_i\} = \{d_i + b_i\} \to f + g$

$\{d_i\} \to f$ $\quad$ (trasformazione tra spazi di Hilbert).

$\{b_i\} \to g$

$\langle \{d_i\}, \{b_i\} \rangle = \sum d_i \overline{b_i} \to \langle f, g \rangle$

19/11/90 - 1

$\{\cos nt, \operatorname{sen} nt\}$ ($n \geq 1$ altrimenti avrei il vettore nullo che non è a nessuna base).

Voglio vedere che questo è un sistema ortogonale in $[-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ $\| f - \sum (d_i \cos nt + b_i \operatorname{sen} nt) \| < \varepsilon$

Ho già visto che $\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$ e $\frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}}$ hanno norma unitaria.

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi = \| 1 \|^2 \text{ e quindi } \| 1 \| = \sqrt{2\pi}$$

Se:

$$f \overset{*}{=} \sum_{1}^{\infty} (d_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad \text{e anche}$$

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \left(\text{serie bilatera: } \sum_{-\infty}^{+\infty} r_n = r_0 + r_1 + r_{-1} + r_2 + r_{-2} + \dots + r_n + r_{-n}\right)$$

$*$ l'uguale è verificato a meno di qualche punto.

Come sono legati gli d_n, b_n con i c_n?

Anche se f è Reale i c_i sono lo stesso complessi

$e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$

armonica di ordine k: $\to d_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt$

che corrisponde all'arm. di ord. k: $c_{-k} e^{-ikt} + \dots + c_k e^{ikt}$

$$\sum_{1}^{\infty} |d_n| < +\infty \quad \sum |b_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n d_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt \text{ è}$$

convergente uniformemente.

Una serie trigonometrica se converge converge ad una funzione periodica di periodo non maggiore di 2π

Se conv. uniformemente, converge ad una f che oltre ad essere periodica è anche continua.

Teorema di FOURIER:
Se una serie trigonometrica $\sum(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)^*$ converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$ ad una funzione f, allora i suoi coefficienti sono:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

(univocamente determinati)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$$

sono proprio quelli della volta scorsa:

$$a_n = \langle f, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \qquad b_n = \langle f, \frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}} \rangle$$

(sono fatti col sistema ortonormale):

$$f = \sum \langle f, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \langle f, \frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \frac{\operatorname{sen} nt}{\sqrt{\pi}}$$

— Se f è pari $[f(-x) = f(x)]$ i b_n sono nulli.
(il prodotto di 2 funz. una pari e una disp. è disp. $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) = -f(-a) \Rightarrow \int = 0$).
e quindi la serie si esprime solo in coseni.

— Se f è dispari $[f(-x) = -f(x)]$ la $\sum$ risulta di soli seni

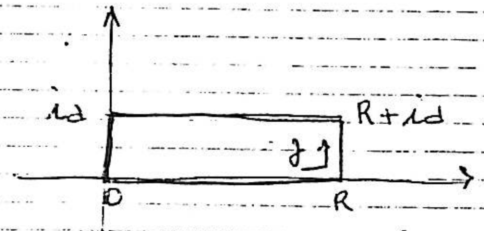
— Se f è pari posso scrivere $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$

— Se f è dispari " " $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$

Esercizi: 191190-2

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

Potrei usare e^{-z^2} ma questa non va a zero per $z \to \infty$ (va a 0 nell'asse $\mathbb{R}$, ma non altrove) e così non posso usare il lemma dell'arco di cerchio grande. Uso un altro sistema:



$$\oint_\gamma e^{-z^2}\,dz = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx + \int_R^{R+i\alpha} e^{-R^2+y^2}\,dy + \int_{R+i\alpha}^{i\alpha}\right)$$

$$= \int_0^R e^{-x^2}\,dx - e^{\alpha^2}\overbrace{\int_0^R e^{-x^2}(\cos 2\alpha x - i\sin 2\alpha x)}^{\text{QUEL CHE CERCO}}\,dx \;+$$

$$+\; \underbrace{i\int_0^\alpha e^{-R^2} e^{-2iRy+y^2}\,dy}_{\to 0} - i\int_0^\alpha e^{y^2}\,dy = 0$$

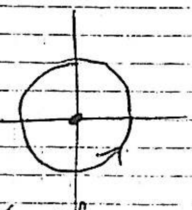
(non ci sono SING.)

Ora

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(integrale fondamentale).}$$

TRUCCHETTO:

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ Quanto fa $\int_\gamma \frac{1}{z^2}$ dove γ è



è zero. È zero anche per tutte le curve γ che non contengono la origine. Ma allora per il T. di Morera è olomorfa? No deve essere continua la funzione: o meglio la f è olomorfa in tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{\cos t^2+1}{t-1}\,dt \quad 1)\ \text{dove } \gamma \text{ è } \left\{z : |z| \le \frac{1}{2}\right\}$$

2) Quanto vale invece se $\gamma = \{z : |z| = 4\}$

Vado a vedere dove c'è discontinuità: c'è discon in $t=1$: è fuori da γ. R1) ZERO.

2) Posso applicare la formula di Cauchy:

$$\oint_\gamma \frac{\cos t^2+1}{t-1}\,dt = 2\pi i\,[\cos 1 + 1]$$

Dati i vettori $x = x_1u_1 + x_2u_2$ e $y = y_2u_2 + y_3u_3$ in $\mathbb{R}^3$

a) Si scrive la disuguaglianza di Schwarz relativa a tali vettori

b) Si trovino le relazioni che devono intercorrere tra i coefficienti x_1, x_2, y_2 e y_3 affinché tale disuguaglianza risulti una uguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\| \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad |x_2y_2| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_2^2+y_3^2}$$

La diseg. diventa = quando x e y sono linearm. dipendenti

$x_2 = ky_2$ $\quad \boxed{x_1 = 0 \quad y_3 = 0}$

vale sempre. Queste sono le condizioni necessarie e suff.

---

1) Si scriva lo sviluppo in serie di Cauchy/Laurent fino al termine di grado 1 compreso per la funzione $f(z) = \frac{z e^z}{(z-i)^2}$ in un intorno di $z = i$

2) Quale è l'insieme di convergenza Ω di tale sviluppo?

R2) : $\mathbb{C} \setminus \{z = i\}$

R1)

$$\frac{b_2}{(z-i)^2} + \frac{b_1}{(z-i)} + a_0 + a_1(z-i)$$

Trucco: $f(z) = \frac{(z-i+i)e^{z-i+i}}{(z-i)^2} =$

$= \frac{e^i}{(z-i)^2}\left[e^{z-i}(z-i) + e^{z-i}\cdot i\right] =$

$= e^i\left[i\frac{1}{(z-i)^2}\left(1+(z-i)+\frac{(z-i)^2}{2!}+\frac{(z-i)^3}{3!}+o((z-i)^3)+\right.\right.$

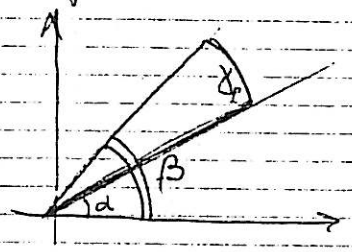
$$= e^{i}\left[i\frac{1}{(z-i)^2}\left[1+(z-i)+\frac{(z-i)^2}{2!}+\frac{(z-i)^3}{3!}+o((z-i)^3)\right] + \frac{1}{zi}\left[1+(z-i)+\frac{(z-i)^2}{2}+o\right.\right.$$

$$= \underset{b_2}{\frac{ie^{i}}{(z-i)^2}} + e^{i}\underset{b_1}{\frac{(1+i)}{(z-i)}} + \underset{a_0}{e^{i}\left(1+\frac{i}{2!}\right)} + e^{i}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{3!}\right)(z-i)$$

ooo

- Si enunci il lemma di Jordan:

$g(z)$ è olomorfa nel semipiano superiore (di $\mathbb{C}$ ovv.) salvo un numero finito di poli, inoltre $g(z)\to 0$ per $z\to\infty$ uniformemente per $\alpha \le \arg(z) \le \beta$, segue che $\lim_{\rho\to+\infty}\int_{\gamma_\rho} g(z)e^{imz}\,dz = 0 \quad \forall m\in\mathbb{N}$



ooo

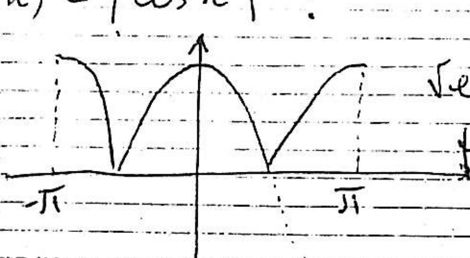
$$f(x) \overset{\text{sperochè}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{0}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) =$$

$=$ (per poi vedere che b_0 non c'è) $= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Osservo che:
$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad \left[\text{sapendo che } \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = g(\xi)\right]$$
è la media dei val. assunti da f nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.

Domanda: Quanto vale la media in $[-\pi,\pi]$ di $f(x)=|\cos x|$?



Vedo che ha periodo π ed è pari $\Rightarrow$ basta andare da 0 a $\frac{\pi}{2}$ e molt. per 4:

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

— Per quali valori di k naturale i due vettori t^k e t^{2k} sono ortogonali in $L^2[-1,1]$?

$$0 = \int_{-1}^{1} t^k \cdot t^{2k} \, dt = \int_{-1}^{1} t^{3k}$$

deve essere dispari $\Rightarrow k$ dispari

Sia $g(t)$ il prolungamento per periodicità su $\mathbb{R}$ della funzione $f(t) = t^2 + t^3$ con $t \in [-\pi, \pi]$. Qual è lo sviluppo di Fourier di $g(t)$?

(Periodicità = prendo quello che succede tra $-\pi$ e π e lo ripeto; es.: per $t \in [\pi, 3\pi]$ $g(t) = f(t - 2\pi)$)

I problemi ci sono solo sugli estremi: allora la funzione la do su un chiuso, il prolungamento lo definisco però nell'aperto corrispondente.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t^3) \cos nt \, dt$$ Osservo che $t^3 \cos nt$ dà contributo NULLO

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t^3) \sin nt \, dt$$ $t^2 \sin nt$ dà contrib. NULLO.

Quindi.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin nt \, dt$$

Se $P(x)$ è un polinomio generico di grado dispari la sua serie di Fourier è SEMPRE una funzione di soli seni??

R: Io so che una FUNZIONE dispari è fatta di seni: un pol. generico di g. dispari contiene anche termini di gr. pari

- Si dia la definizione di polo di ord. k (posto vedere)
- Si dia un esempio di funzione che abbia simultaneamente un polo di ordine 1 in $z=1$, un polo di ord. 3 in $z=0$ e una singolarità essenziale in $z=2i$;

$$\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{z^3} + e^{\frac{1}{z-2i}}$$

(meglio sommare) Tutte le funz. che avrebbero ∞ termini di Taylor, portati in Z vanno bene.

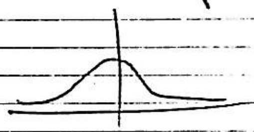
ooo

- Quanto vale la media M dei valori assunti dalla funzione $f(z) = z^4 - 2iz^3 + (1-i)z^2 + (1-2i)$ sulla circonferenza di centro il punto $a=2i$ e raggio 2.

La media di una funz. ~~circonf.~~ olomorfa su $\mathbb{C}$ corrisponde con la $f(\text{centro circonf.}) = f(2i)$ $\quad M = -3+2i$

ooo

- Si dia la def. di supporto.
- $\exists$ funzioni sommabili su $\mathbb{R}$ che abbiano per supporto tutto $\mathbb{R}$? Risp. SI es: e^{-x^2}



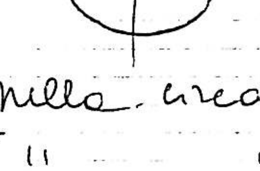
oppure $\frac{1}{1+x^2}$

ooo

Si dimostri che se $a \in \mathbb{R}$ $a > e$ allora l'equaz. $e^z = a z^n$ ha n radici entro il cerchio di converg.

Ho a disposizione: - Il t. dell'indicatore logaritmico.
- Il T. di Rouché: Se f e g sono olomorfe su γ e nella regione ~~racc~~ racchiusa $|f|>|g|$ su $\gamma \Rightarrow f=0$ $g+f=0$ hanno lo stesso numero di radici entro γ.

$|e^z| = e^x$



$e^{-1} \leq e^x \leq e^1 < a$

$|az^n| = a$ (nella circonferenza unitaria) $\Rightarrow$

$|az^n| > |e^z|$ (" " ")

$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1[0,1]$?? SI $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ è sommabile} \right)$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^2[0,1]$? $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \in L^1$? NO e quindi NO

$s_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ $s_2 = \left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1,2,\ldots}$

$s_3 = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1,2,\ldots}$ $s_4 = \left\{ i^n \right\}$ $s_5 = \left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$

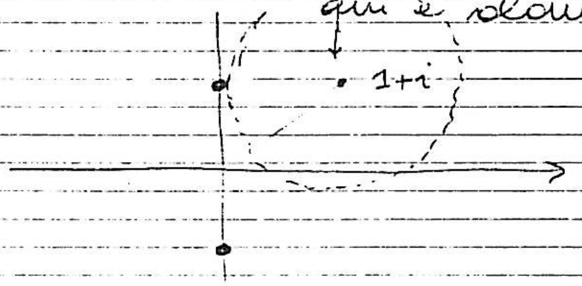
Dire quali tra queste sono elementi di ℓ^2
(converge la serie dei quadrati dei moduli?)

s_1 : NO s_2 : NO $\left(\frac{1}{n} \text{ non converge} \right)$; s_3 $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ SI

s_4 (1) NO s_5 $\left(\left| \frac{\cos^2 n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{SI} \right)$.

Si consideri una funzione olomorfa f che abbia come singolarità soltanto 2 poli nei punti $z = i$ e $z = -i$: 1) se ne può scrivere lo sviluppo di Cauchy-Taylor di punto iniziale $z = (1+i)$? Se SI 2) qual è l'insieme di convergenza di tale sviluppo?

qui è olomorfa e quindi R1 = SI



R2 =

Si consideri $f(z) = \operatorname{senh} z + z^2 + 2 \operatorname{sen} z + \pi$
Trovare la media dei valori assunti sulla circonf. di centro 0 e raggio 3 $M = f(0) = \pi$ $[\operatorname{senh} 0 = 0]$

Si dia un esempio per ognuno dei 3 tipi di singolarità di una funz. olomorfa monodroma.

ELIMINABILE $\longrightarrow$ $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ in $z=0$

POLARE $\longrightarrow$ $\frac{1}{z}$ in $z=0$

ESSENZIALE $\longrightarrow$ $\operatorname{sen} \frac{1}{z}$ in $z=0$

221190-3

— Si trovi una funzione olomorfa $f = u(x,y) + i v(x,y)$ tale che $u(x,y) = 4x$

verifico che $4x$ sia armonica $\frac{\partial u}{\partial x} = 4$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

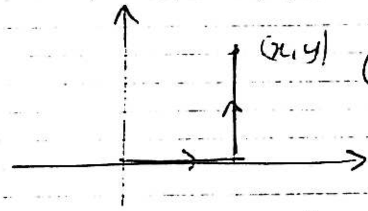
e quindi ~~sono~~ è soddisfatta la eq. di Laplace. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Devo cercare la $v(x,y)$: ne cerco il suo differenziale: $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

Ma io so che $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4$

$dv = 0\,dx + 4dy$ $\quad v_0(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4dy = 4y$



Ci vado così:

Ne trovo una, ma mi è sufficiente dato che il problema richiede UNA funzione olomorfa.

$f = 4x + i4y$

ooo

Determinare le costanti reali α e β, γ che rendano olomorfa la funzione $f(z) = \alpha \cosh y + i \beta \cosh \gamma x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \cosh y) = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \cosh y) = \alpha \operatorname{senh} y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha \cosh y) = \alpha \cosh y$

Dovendo essere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \alpha \cosh y = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Il guardare l'armonicità dà subito la sol.

Infatti vedo per $v(x,y)$ che affinché sia armonica deve essere $(\beta \text{ .OR. } \gamma) = 0$

34

Se non avessi voluto verificare l'armonicità dovevo controllare le condiz. di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \underbrace{\beta \gamma}_{} \operatorname{senh} \gamma x = \underbrace{-\alpha}_{} \operatorname{senh} y$$

Devono essere la funzione nulla.

$(\alpha \text{ . AND. } \beta) = 0 \quad \forall \gamma$

oppure

$(\alpha \text{ . AND. } \gamma) = 0 \quad \forall \beta$

Si dimostri che $u(x,y) = \cos x \cdot \cosh y$ è armonica e si trovi l'armonica coniugata tale che $f(1) = u(1,0) + i v(1,0) = i$

Lasciando stare la facile dim. dell'armonicità passo a trovare la arm. coniugata:

Cerco armoniche coniugate:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

So che $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x \operatorname{senh} y$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \cosh y$

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 0\, dx + (-\operatorname{sen} x \cosh y)\, dy =$$

$-\cos x \operatorname{senh} y$

$\downarrow$

$= 0$

$$= \int_0^y -\operatorname{sen} x \cosh y\, dy = -\operatorname{sen} x (\operatorname{senh} y) =$$

$$= -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

Quindi TUTTE le armoniche coniugate sono:

$-\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y + C = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y + (\alpha + i\beta)$

$$\underset{u}{f(1) = \cos 1} + \underset{iv}{i(\alpha + i\beta)} = i \qquad \begin{cases} \cos 1 - \beta = 0 \\ i\alpha = i \end{cases}$$

$C = 1 + i \cos 1$

- Sviluppo di Cauchy-Laurent fino al termine di grado 2 compreso per la funzione $\frac{z \operatorname{sen} z}{(z-3i)^2}$ in un intorno di $z=3i$

Si vede la presenza di un polo doppio, dunque:

$$\frac{b_2}{(z-3i)^2} + \frac{b_1}{(z-3i)} + a_0 + a_1(z-3i) + a_2(z-3i)^2$$

$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}[(z-3i)+3i] =$ (mantiene il segno della somma e distrib. le funzioni ...)

$$= \operatorname{sen}(z-3i)\cos 3i + \cos(z-3i)\cdot\operatorname{sen} 3i$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3i)^2}\Big\{(z-3i)\left[\operatorname{sen}(z-3i)\cos 3i + \cos(z-3i)\operatorname{sen} 3i\right] +$$

$$+ 3i\left[\operatorname{sen}(z-3i)\cos 3i + \cos(z-3i)\operatorname{sen} 3i\right]\Big\}$$

Tutto questo mi serve xchè devo trovare b_2; se mi servisse solo b_1 col teorema dei residui:

$$b_1 = \lim_{z\to 3i}\left[\frac{d}{dz}(z \operatorname{sen} z)\right]$$

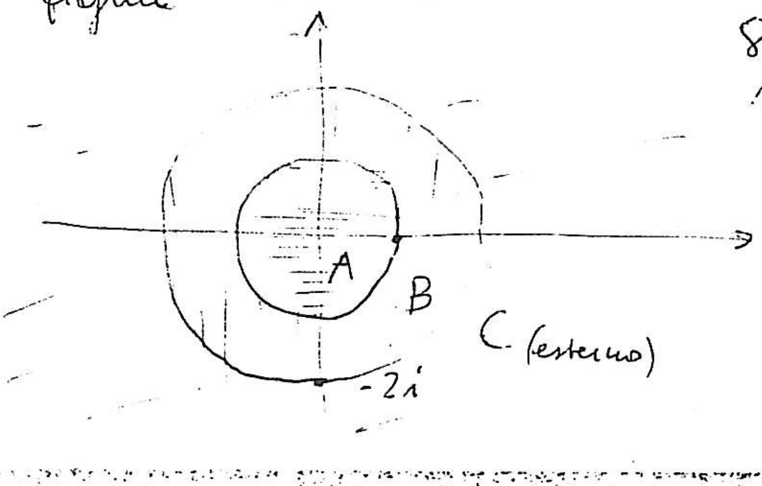
Se volessi scrivere lo sviluppo della stessa funzione in un intorno di $z=0$: in un int. di $z=0$ è olomorfa $\Rightarrow$ c'è solo il pezzo di Cauchy: $d_1 z + d_2 z^2$

c'è uno zero del 2° ord.

$$f(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{\left[3i\left(\frac{z}{3i}-1\right)\right]^2} = -\frac{z \operatorname{sen} z}{9\left(1-\frac{z}{3i}\right)^2} = \text{(prodotto di una serie geom. x se stessa)}$$

$$= -\frac{1}{9} z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3i}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3i}\right)^n$$

- Si scrivano gli sviluppi di Cauchy-Laurent per la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2i)}$ nei 3 insiemi A, B, C della figura



Spezzo la $f(z)$ in 2 fratti semplici:

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z+2i}$$

In A: $f(z) = -\alpha\sum_0^{\infty} z^n + \frac{\beta}{2i}\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2i}\right)} =$

$$= \underbrace{\alpha\sum_0^{\infty} z^n}_{\text{conv. in A}} + \beta\sum_0^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{(2i)^{2n+1}}$$

conv. in un cerchio di raggio 2 ($|z|<2$)

B) Il secondo pezzo andrebbe bene anche in B: non così per il primo pezzo:

$$\text{In B}: f(z) = -\frac{\alpha}{1-z} + \frac{\beta}{z+2i} = -\frac{\alpha}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} + \frac{\beta}{z+2i} =$$

$$= \frac{\alpha}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{\beta}{z+2i} = \alpha \underbrace{\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}}_{\text{serie in } \frac{1}{z} \Rightarrow \text{conv. in } \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow z>1} + \frac{\beta}{z+2i}$$

$$f(z) = \alpha \frac{1}{z} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \beta \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2i)^{n+1}} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2i)^{n+1}}$$

C) Il primo pezzo ora è OK: devo mettere a posto il 2° in modo che converga al di fuori di B.

$$\text{In C}: f(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \beta \frac{1}{z\left(1+\frac{2i}{z}\right)} =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \beta \frac{1/z}{1+\frac{2i}{z}} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \beta \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{z^n}$$

{ovviamente (!) ci sono ∞ termini di Laurent anche in presenza di 2 poli soli ~~...~~ a causa dello sviluppo in un punto diverso dai poli}

Se avessi tenuto il prodotto e l'avessi maneggiato come prodotto di 2 serie sarebbe stato OK in A (non ci sono termini di Laurent), ma disastroso fuori per calcolare i coefficienti.

ooo

Sia z_0 un punto di singolarità essenziale isolata per $f(z)$ (altrimenti olomorfa). Cosa si può dire del residuo?

A. È sempre 0
B. È " $\neq 0$
C. può essere zero oppure no
D. non ha senso parlare di residuo.

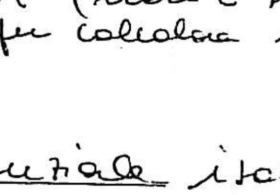
Allora: D. = falsa: il b_1 c'è sempre (NON ha senso per i punti di diramazione delle funzioni polidrome) e quindi ..

A e B sono false: se la sing. è essenziale sta a significare che ha ∞ termini, ma nulla mi dice su b_1.

ooo

Si calcoli:

$$I = \oint_\gamma \frac{t^2 - e^{t^2}}{(t-4)^3}\, dt \quad \text{dove } \gamma = \{z : |z| = 2\pi\}$$



in $[0, T]$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x \, dx \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x \, dx$$

e la serie risulta: $\frac{1}{2} a_0 + \sum_0^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\frac{2\pi n x}{T} \right)$

PROBLEMA: Trovare

1) Quando ~~…~~ una serie trigonometrica converge a qualcosa.

2) Quando una serie di FOURIER converge ad una serie data (e come).

1) Esistono serie trigonometriche che non sono serie di Fourier di alcuna funzione di $L^1([-\pi, \pi])$

Esempio: $\sum_2^{\infty} \frac{\sin n x}{\lg n}$ il term. generale $\to 0$ ma non converge a niente.

Teorema: - Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π la sua serie di Fourier converge in media quadratica ad f.

La serie c'è sempre perché la f è continua.

Teorema: Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ periodica con periodo 2π la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{R}$

Teorema Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π e la sua serie di Fourier converge ad f in $\mathbb{R}$

Abbozzo di dimostrazione:

Voglio maggiorare $|a_n| < k_n$: $\sum^{\infty} k_n < +\infty$

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \, dx \right| \overset{P.P.}{=} \frac{1}{\pi} \left\{ \left| \left[f(x) \frac{\sin n x}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int f'(x) \sin n x \, dx \right. \right.$$

$$\overset{PP}{=} \frac{1}{\pi} \left| \left\{ -\frac{1}{n} \left[-f'(x) \frac{\cos n x}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos n x \, dx}_{\text{posso maggiorarlo con un numero } (\max f'') \text{ che non dipende da } n} \right\} \right|$$

ottengo una roba del tipo $\frac{k}{n^2}$ e $\sum \frac{k}{n^2}$ converge.

Più la f è liscia (ha derivate di ord grande continue), più la $\sum$ converge.

Se solo è $f \in C^1$ ho una roba k $\Rightarrow$ la convergenza NON è garantita. con $f \in C^2$ invece sono sicuro della convergenza.

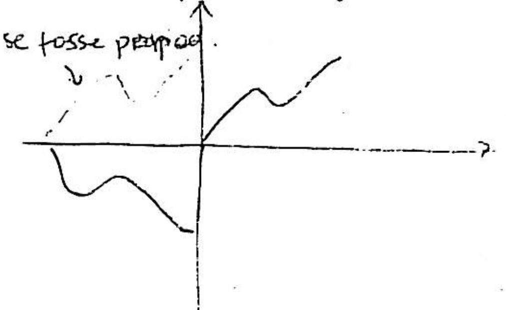
Teorema (distruttivo): Esistono serie di Fourier che non convergono in alcun punto.
(Basta trovare un controesempio: è duro e nemmeno nonce lo fa).

Funzione pari : $f(-x) = f(x) \Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$

" dispari : $f(-x) = -f(x) \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

Altro tipo di funzioni : $f(x) = -f(x+\pi)$

(non ha nome).



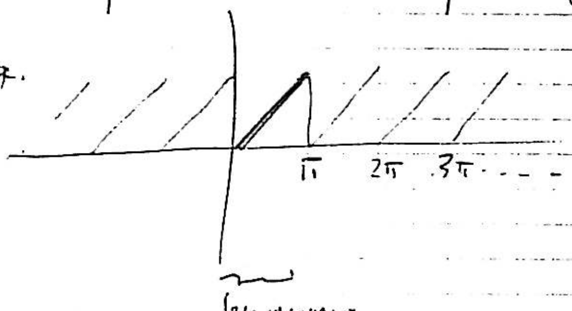
Ha una proprietà interessante:
Ha solo le ARMONICHE DISPARI

$f(x) = f(x+\pi)$ ha periodo π e la serie di F. ha solo le ARMONICHE PARI

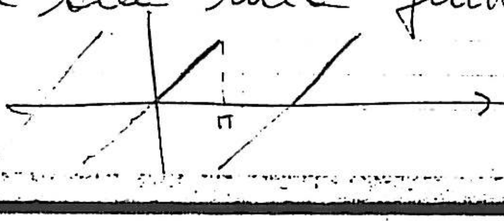
Io sto studiando tutta una moltitudine di robe che sono periodiche e vanno da $-\infty$ a ∞. Ma i fenomeni fisici hanno inizio e fine. Come fa? Prolungo il fenomeno che va da 0 a T considerandolo come un periodo di una funz. di periodo T.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum\left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nx\right).$$

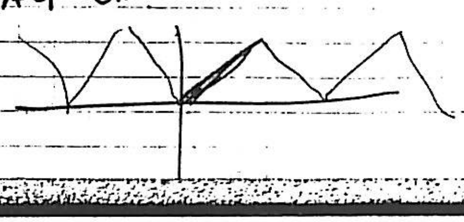
Prima una prolung. di un fenomeno:



Posso costruirmi una S.d.F che su un SOTTOINTERV. C converge alla mia funzione. Ad es:



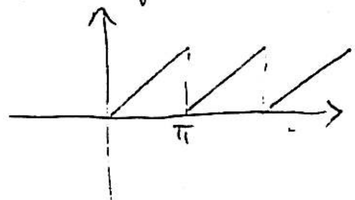
oppure



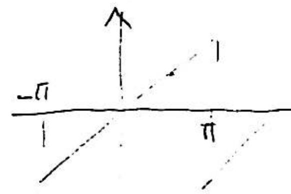
261190-2

Le funz. date in sotto int. $[0,\pi]$ convergono alla una f.

Espressione delle f. date:



$$\frac{\pi}{2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2nx}{n}$$ (solo armoniche pari non si tratta più di funz. dispari).



$$\sum(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{sen} nx$$ funz. dispari (ha tutte le armoniche)

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$ (Se non ci fosse $\frac{\pi}{2}$ che è la 1^ armonica pari così se la "tiro giù di $\pi/2$" sarebbe una funz. dispari (~~tutte armoniche dispari~~).

Se riuscissi a scoprire che una serie di Fourier è la restrizione di una serie di Cauchy-Laurent (def. in una corona circolare) ad una circonferenza, avrei parecchie conseguenze positive. (ad es. so dove converge)

Una serie di C/L la posso scrivere come:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad r_1 < |z| < r_2$$ $F(z)$ funz. olomorfa in una corona circolare, di centro?

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{F(t)}{t^{n+1}}\,dt$$

dove $\gamma \ni |t| = r$

(L'ho scritta in maniera compatta avendo una serie bilatera di potenze).

- Inizio le manipolazioni:

$z = re^{iu} \qquad -\pi \leq u < \pi$ ho ristretto ad una circonf. di raggio r

Su tale circonf. si ha:

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=r}\frac{F(t)}{t^{n+1}}\,dt}\cdot r^n e^{niu}$$

Se li battezzassi c_n otterrei una serie TRIGONOM. bilatera (di Fourier? Boh devo vedere se i c_i sono proprio di Fourier).

posto $t = re^{i\varphi}$ si ha $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ $\quad dt = rie^{i\varphi}d\varphi$

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(t)}{r^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}\, rie^{i\varphi}\, d\varphi \cdot r^n e^{niu} =$$

(si va costruendo proprio il coeff. di Fourier).

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(re^{i\varphi})}{e^{in\varphi}}\, d\varphi \cdot e^{inu}$$

Ora questo è proprio un "c_n"

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi})e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

con $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

Allora siamo arrivati in fondo: dato che $F(z)$ convergeva nella corona circolare si ragiona converge su una circonf. compresa nella corona.

Esempio: vedere se converge su $|r| = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nu}{2^n}$ Trigonometrica, converge uniformemente e anche totalmente $\left(\left|\frac{\cos nu}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow$ è una serie di Fourier.
Gli a_n e b_n sono proprio gli $\int$ etc...

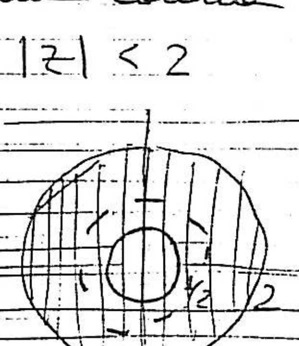
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2^{n+1}} = (\text{posto } e^{ix} = z) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n + z^{-n}}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

potrei aver scritto due serie che non convergono a nulla: vedo se convergono in una corona circ.

La prima deve avere $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$

La 2ª: $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \quad |z| > \frac{1}{2}$



E quindi ho convergenza all'interno della corona $\frac{1}{2} < |z| < 2$

Quindi la circonf. data $(|r| = 1)$ è compresa nella corona.

$= (\text{faccio la somma}) = \frac{1}{2-z} + \frac{z}{2z-1}$ Questa è in z, a me serve in x: devo restringere alla circonf.

$F(e^{ix}) = \frac{2(2-\cos x)}{5 - 4\cos x}$ (dopo l'eliminazione degli e^{ix}...)

- Richiamo sulle serie:

$\{a_n\}$ successione di a_n

L'operazione di serie consta di 2 operazioni:

1) Costruzione di una nuova successione di somme parziali s_k
2) Ricerca dell'eventuale limite di s_k

- Introduco un nuovo algoritmo che ottiene lo stesso risultato (somma) se la serie a_n converge.

Data una succ. $\{a_n\}$ si dice che un algoritmo T definisce una somma generalizzata se 1) a_n è trasformata in un'altra successione $\{\sigma_n\}$
2) viene ricercato l'eventuale limite di $\{\sigma_n\}$
3) Se ~~tale~~ il limite esiste finito o infinito per la serie $(\sum a_n = \lambda)$ allora esiste anche per σ_n e vale λ (COINCIDONO)
4) Può esistere $\lim \{\sigma_n\}$ senza che esista la somma $\sum a_n$

Le prime due operazioni sono comuni ai due algoritmi. σ_n però non è (sempre) la succ. delle somme parziali.

Come trovare queste successioni delle somme parziali:

Teorema di Cesàro

Data la successione $\{a_n\}$, se è $\sum_0^\infty a_n = \lambda$ (finito o no) allora è ~~[illegible]~~

$$\lim_{k\to\infty} \{\sigma_k\} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_0+s_1+\dots+s_{k-1}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_0^{k-1} s_r = \lambda$$

(è la media delle somme parziali)

- le σ_k si chiamano somme di Cesàro (sono le MEDIE delle somme parziali).
- se limite (se c'è) $\lambda = \lim_{k\to\infty} \sigma_k$ si dice SOMMA secondo Cesàro (delle a_n).
- Se λ è finito si dice che la "serie delle a_n" converge secondo Cesàro.

Esempio in cui la σ_k converge e la a_k NO:

$a_n = (-1)^n$ $\quad s_0 = 1 \quad s_1 = 1-1=0 \quad s_2 = 1 \dots$ il lim s_k non c'è

Vediamo le σ_k: $\quad \sigma_1 = \frac{s_0+s_1}{2} = \frac{1}{2} \dots$

le $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$ e le $\sigma_{2k+1} = \frac{k}{2k-1}$ $\quad \lim_{k\to\infty} \sigma_k = \frac{1}{2}$

e quindi non c'è la serie di a_n ma c'è la somma secondo Cesàro.

— Teorema (1° di Fejer)

$f \in L([-\pi,\pi])$ prolungata per periodicità ad $\mathbb{R}$, se f è continua in x_0, la sua serie di Fourier converge secondo Cesaro in x_0 al valore $f(x_0)$

— 2° Teorema di Fejer:

Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π la successione delle somme di Cesaro converge uniformemente ad $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

— Teorema (1° di Weierstrass)

$f \in C^0([a,b])$ allora esiste una successione di polinomi trigonometrici che converge uniformemente in $[a,b]$ ad f.

— 2° teorema di Weierstrass:

Ipotesi come sopra; Tesi: esiste una successione di polinomi ordinari che converge uniformemente in $[a,b]$ ad f.

Un insieme D si dice DENSO in un insieme M se ogni elemento di M è limite di una successione fatta di elementi di D ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$).

Il teorema di prima ci dice che i polinomi sono densi in uno spazio di funzioni continue (rispetto ad una norma tale) $\Rightarrow$ una funzione continua è approssimabile in modo unif. da una succ. di polinomi.

Teorema di Riemann - Lebesgue:

$f \in L([a,b])$ allora è $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, dx = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\underbrace{\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx}_{\text{parte reale}} = 0 = \underbrace{\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx}_{\text{parte immaginaria}}$$

I coeff. della serie di Fourier tendono a zero (condiz. necessaria x la convergenza).

Struttura della dimostrazione:

Si comincia a dimostrare la tesi per delle f particolari: si scelgono che $f \in C^1[a,b]$

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = \underbrace{f(x) \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda x} \Big]_a^b}_{\substack{\text{va a zero} \\ (|e^{i\lambda x}| = 1)}} \underbrace{- \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda x} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{esiste, è continua e limitata in } [a,b]} dx}_{\text{riesco a maggiorarlo con un numero.}}$$

e quindi il tutto va a zero perlomeno come $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \to \infty)$

$C^1([a,b])$ è denso in $L^2([a,b])$ (ogni funz. di $L^2([a,b])$ è limite di una successione fatta di elementi di C^1 (secondo la norma di L^2))

Riesco ad approssimare bene la funz. di L^2 con delle funz. C^1: se l'integr. di funz. di C^1 è zero quello fatto con funz. L^2 ~~sarà~~ zero (o poco distante).

$L^2([a,b])$ è denso in $L^1([a,b])$ $\Rightarrow$ C^1 è denso in L^1

e quindi l'aver dimostrato tutto per funzioni C^1 va bene: i risultati funzionano anche in generale.

$$\left| S_k(x) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx) - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi} \sum \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \underbrace{\cos nt}_{\text{non è integrato}} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx \sin nt \right) - f \right.$$

$$= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi} \sum_1^k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n(x-t)\,dx - f(t) \right|$$ Voglio vedere dove si annulla per approssimare la $f(x)$ al meglio

Dopo tante manipolazioni resta $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} dz$ $(\delta > 0$

<u>Teorema (DINI)</u>: Se f soddisfa in x la condizione che $\left| \int_{-\delta} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} dz \right| < +\infty$ per $0 < \delta < k$ allora la serie di Fourier di f converge in x a $f(x)$. (NB: la ipotesi è ≠ dalla continuità che non è richiesta).

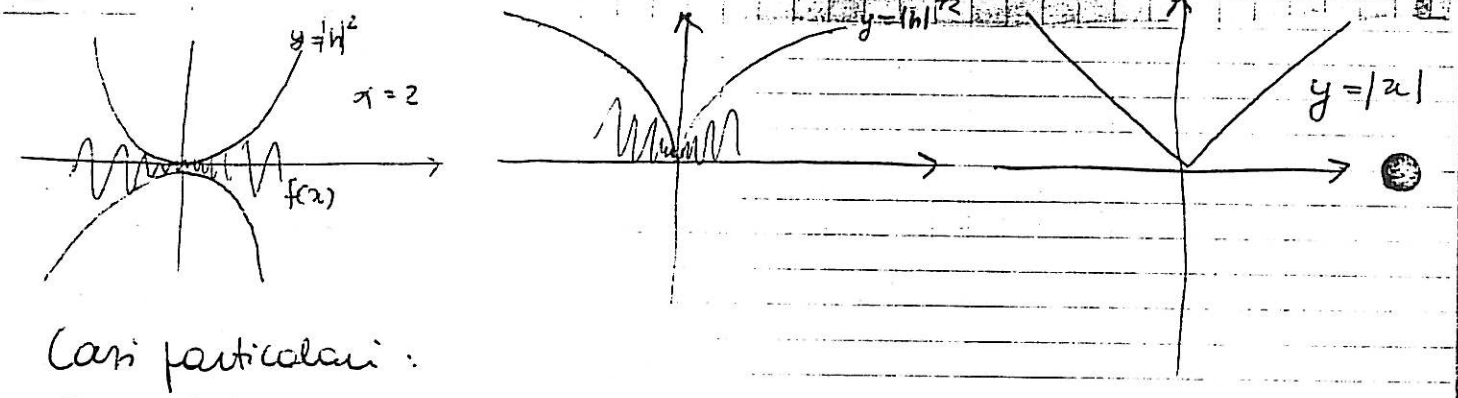
Osservazione di Riemann sul carattere locale della convergenza delle serie di Fourier. I coeff. della serie dipendono da tutti i valori assunti da f in un intervallo mentre la convergenza dipende dal comportamento in un punto.

Famiglie di funzioni

$$C^0 \supset \text{DER.} \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^k \supset C^\omega \text{ (analitiche)}$$

Una f si dice Holderiana di ordine α in un punto x se esistono tre numeri >0 A, α, δ tali che

$$|f(x+h) - f(x)| \leq A|h|^\alpha \quad \forall h : |h| < \delta$$



Casi particolari:

$\alpha = 1$ f si dice lipschitziana

$f(x) = |x|$ è lipschitziana in qualsiasi punto in particolare in $x=0$

Vado a vedere il rapporto incrementale per una f holderiana:

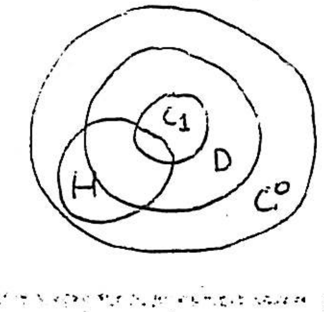
$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq A|h|^{\alpha-1}$$ Se $\alpha = 1$ il r.i. è LIMITATO

Le holderiane sono continue, ma non generalmente derivabili: (hanno le lipschitziane r.i. limitato.)

Se $\alpha > 1$ la f è derivabile e la $f'(0)$ è 0

Se $\alpha = 1$ non sempre è ~~[illegible]~~ derivabile ma il r.i. è limitato.

Se $\alpha < 1$ non è deriv. in generale e il r.i. non è limitato in generale (può anche essere limitato comunque).



Teorema: se f è Holderiana in x di qualche ordine α allora la sua serie di Fourier converge in x al valore $f(x)$.

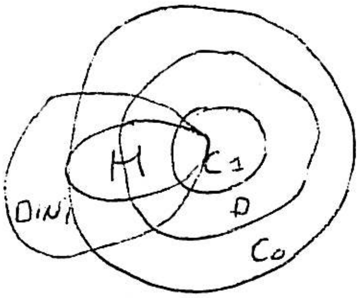
Dim: infatti f soddisfa in x alla condiz. del DINI

301190-1

infatti se $\alpha > 1$ l'integranda della condizione del Dini è maggiorata da una funzione $|h|^{\alpha-1}$ che è continua in 0.

Se $\alpha = 1$ l'integranda è maggiorata da una funzione costante e quindi limitata.

Se $\alpha < 1$ l'integranda è maggiorata da una funzione che va all' ∞ di ordine < 1 in senso stretto e quindi è sommabile.



Ci sono funzioni che soddisfano il Dini, ma non sono holderiane. (es: $\frac{1}{x \lg x}$)

La funzione a spine con salto (non continua) soddisfa il DINI, ma non è neanche C^0.

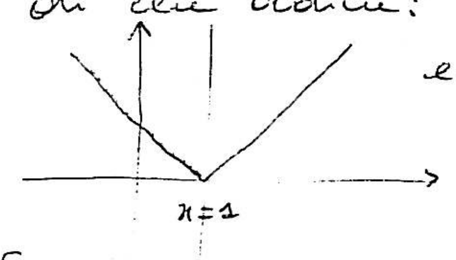
Tipica domanda da esame:

- Se f è in x holderiana di ordine 2 è anche holderiana di ordine 1/2? SI (Se sta sotto a $|h|^2$ e >1 ecc. sta sotto $|h|^{1/2}$).

- Se f è holderiana di qualche ordine α in x è derivabile in x? NO in genere, dipende da α.

- La funzione $f(x) = x^3$ è holderiana di ordine 2 in $x = 1$? NO (la derivata dovrebbe essere 0 essendo ord>.

- La funzione $f(x) = |x - 1|$ è holderiana in $x = 1$? di che ordine?



e quindi SI e $\alpha = 1$

- Se f è continua in x_0 è holderiana di qualche ordine α? NO in generale ($\frac{1}{\lg x}$ ....)

- Due funzioni periodiche di periodo 2π che hanno la stessa serie di Fourier, coincidono? NO basta che sposti la funz. in qualche punto, l'integrale non se ne accorge e i a_i, b_i sono gli stessi.
- Cambia la risposta se aggiungo continua? SI: ora per discostarsi non possono più "saltare" in un punto, ma devono spostarsi in un intervallo.

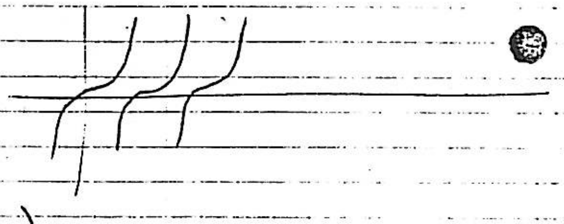
- Una serie di Fourier che converge ad una funzione di $L^2([-\pi, \pi])$ converge uniformemente? Non ha nessun obbligo!

La serie $\sum_{3} \left(\frac{1}{n^2} \cos 2nx + \frac{1}{n^3-2} \operatorname{sen} 2nx \right)$ è lo sviluppo di Fourier di qualche funzione? (SI) perché converge addirittura uniformemente ($\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^3-2}$ vanno a zero di ord. ≥ 2 addirittura e quindi conv. totalmente) ad una ~~serie~~ funzione continua ed è anche è una serie trigonometrica ⇒ è una sdF.

- La serie di Fourier di un polinomio del tipo $P(x) = x^{2k}$ converge puntualmente al polinomio $P(x)$ in ogni punto di $[-\pi, \pi]$?

  $P(x)$ è una funzione PARI ed è quindi prolungabile per ~~continuità~~ periodicità ed il prolungamento è una funzione continua ⇒ in ogni punto è verificato il Dini ⇒ c'è convergenza puntuale.

- Se fosse stato $P(x) = x^{2k+1}$?



  Ora il Dini non funziona ⇒ non c'è convergenza puntuale.

~~Teorema~~ (Condizioni di Dirichlet):

in un intervallo $[a, b]$.

f ha al più un numero finito di discontinuità di prima specie. (il lim. dx e sx ∃ ma sono ≠)

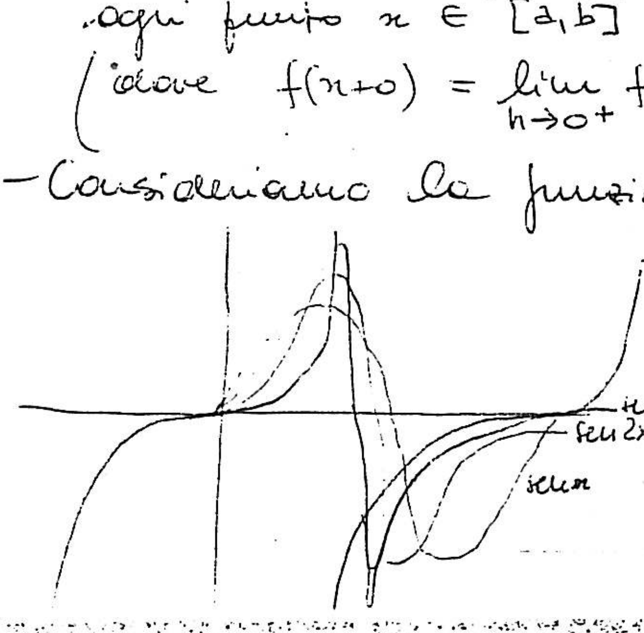
$[a, b]$ si può scomporre in un numero finito di sottointervalli nei quali f è monotona. (non ci sono ∞ oscillazioni).

Teorema di Dirichlet:

Una funzione che soddisfa in $[a, b]$ le condizioni di Dirichlet ha la serie di Fourier che converge in ogni punto $x \in [a, b]$ al valore $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

$$\left(\text{dove } f(x+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h) \; ; \; f(x-0) = \lim_{h \to 0^-} f(x+h) \right)$$

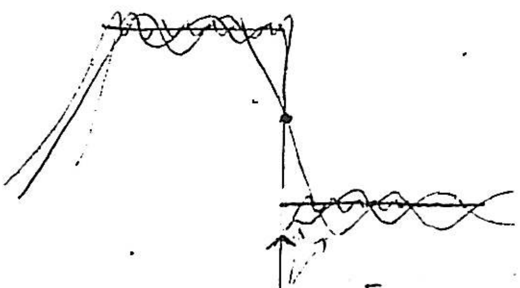
- Consideriamo la funzione:



la serie avrà solo seni essendo la funzione dispari.

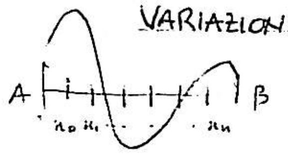
Più avanti vado meglio approssimo, ma nel punto di discontinuità non avrò mai una convergenza perfetta, l'approx sarà sempre scarsa.

- Consideriamo questa:



questo max NON tende al valore della f prima della discont. (tende al circa 117%). Si chiama FENOMENO DI GIBBS

VARIAZIONE di una funzione f in [a,b]



$\sum |f(x_n) - f(x_{n-1})|$ vado a vedere come sono questi valori.

Nel faccio la Σ e il sup. al variare della suddivisione

$$\sup \sum |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

Osservo che più infittisco più pezzi conto: se la curva è rettificabile la lunghezza della curva la maggiora e quindi viene un numero finito. Potrebbe venire ∞ se ad es. la f ha ∞ oscillaz.

Se f è monotona in a b la variazione di f su a, ($V[f, a,b]$) è $f(b) - f(a)$.

Se V è finito, f si dice "a variazione limitata in [a,b]"

Le funzioni a variazione limitata formano uno spazio vettoriale detto BV (bounded variation).

Se φ è sommabile in [a,b] se $f(x) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ risulta $V[f,a,b] = \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$

Questa funzione ad es. $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Questa è continua ma non a variazione limitata. (C^0 non basta. Ci vorrebbe C^1 (es. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$))

Una funzione a variazione limitata di BV(a,b) è la differenza di 2 funzioni monotone in [a,b]

se $x_1 < x_2$ $V[f, a, x_1] < V[f, a, x_2]$ ovv.

Se la $V[f, a, x]$ la chiamo v, questa $v(x)$ è perlomeno non decrescente

$$v(x_2) - v(x_1) = V[f, x_1, x_2] \geq f(x_2) - f(x_1)$$

$$v(x_2) - v(x_1) \geq f(x_2) - f(x_1) \ ;$$

$$v(x_2) - v(x_1) \geq f(x_1) - f(x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = v(x) - f(x) \\ f_2(x) = v(x) + f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f_2 - f_1 = 2f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$ devo verificare che le f_1 ed f_2 sono monotone.

$v(x_2) - f(x_2) \geq v(x_1) - f(x_1) \Rightarrow f_1$ è monot.

$f(x_1) + v(x_1) \leq v(x_2) + f(x_2) \Rightarrow f_2$ è monot.

> Se f è a var. limitata essa soddisfa le condiz di Dirichlet.
> Se f soddisfa la condiz di Dirichlet essa è a variazione limitata

Criterio di Jordan: se $f \in BV_{[a,b]}$ allora la sua serie di Fourier converge in x a $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

ES:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lg \frac{x}{4}} & x \neq 0 \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Non soddisfa alle condiz del Dini, ma soddisfa a quelle del Dirichlet.

Se f soddisfa le condizioni di Dirichlet e in un punto x_0 c'è un salto allora in $[a, x_0-k]$ la convergenza è uniforme.

Ricordo la Holderianità:

f Holderiana di ord α se $\exists\ A, \delta, \alpha > 0$ tali che per $|h| < \delta$ vale:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq A|h|^\alpha$$

f si dice uniformemente holderiana di ord α in un intervallo $[a,b]$ se è holderiana di ord α in OGNI punto di $[a,b]$ ed esistono A e δ che soddisfano la relazione per ogni x

Se $\exists\, A, \delta, \alpha$ tali che $|f(x+h) - f(x)| \leq A h^{\alpha}$ per $h>0$ si dice che è soddisfatta una condizione di Holder unilaterale (è soddisf per tutti gli h positivi e non per $|h| < \delta$).

Vogliamo scrivere un criterio di convergenza uniforme usando le condiz. di Holder unilaterali.

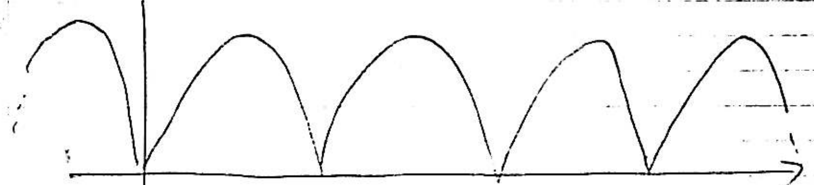
Se f è periodica di periodo 2π, è uniformemente holderiana in $[-\pi, \pi]$ e nei punti $-\pi$ e π sono verificate condizioni di Holder unilaterali (o a dx o a sx) allora la serie di Fourier di f converge uniformemente in $[-\pi+k, \pi+k]$ $\forall k \in \mathbb{R}^+$

—ooo—

Chi è lo sviluppo di:

$f(x) = \sin(x)$ $\forall\ -\pi \leq x \leq \pi$? è già sviluppata: $a_i = 0\ \forall$ e $b_1 = 1$ $b_i = 0, i = 2 \ldots$

$g(x) = \operatorname{sen}(x)$ $0 \leq x \leq \pi$ (prolungata per period.



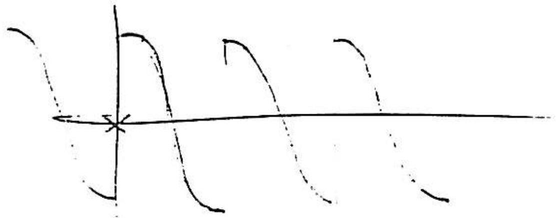
Questa addirittura avrà soli coseni.

cosa mai $g(x) = |\operatorname{sen} x|$ $-\pi \leq x \leq \pi$

Prendiamo ora i coseni:

$f(x) = \cos x$ $-\pi < x \leq \pi$ converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$ a $\cos x$? SI

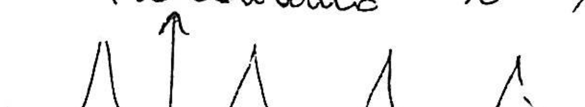
diverso il discorso se avessi preso $[0, \pi]$:



$g(x) = \cos x$ $0 \leq x \leq \pi$

c'è conv. uniforme ~~tra~~ in $[-\pi+k, \pi-k]$

Prendiamo x^2 in $[-\pi, \pi]$



La serie sarà di soli coseni xchè è pari. È unif. holderiana derivata limitata $\Rightarrow$ la converg. della serie di F. è uniforme.

Finora abbiamo incontrato

Criterio di DINI
" " DIRICHELET
" " JORDAN

Tutti volti a considerare la convergenza su un punto.

La convergenza uniforme serve in casi come questi:

$$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

$$|f_n| \le |f| : \int_a^b |f|\,dt < +\infty$$

(Teor. di Lebesgue o della convergenza dominata).

$$\left.\begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \\ f'_n \xrightarrow{\text{unif.}} g \end{array}\right\} \begin{array}{l} f \text{ è derivabile} \\ f' = g \end{array}$$

la convergenza delle f_n a f è uniforme

- Stesse ipotesi: teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

Per poter derivare per serie la serie di Fourier ho bisogno della conv. uniforme della serie delle derivate.

Infatti $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

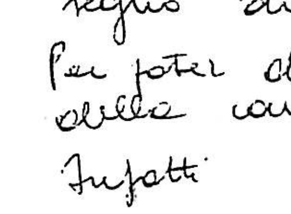
derivo:

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$

se c'è unif. conv.

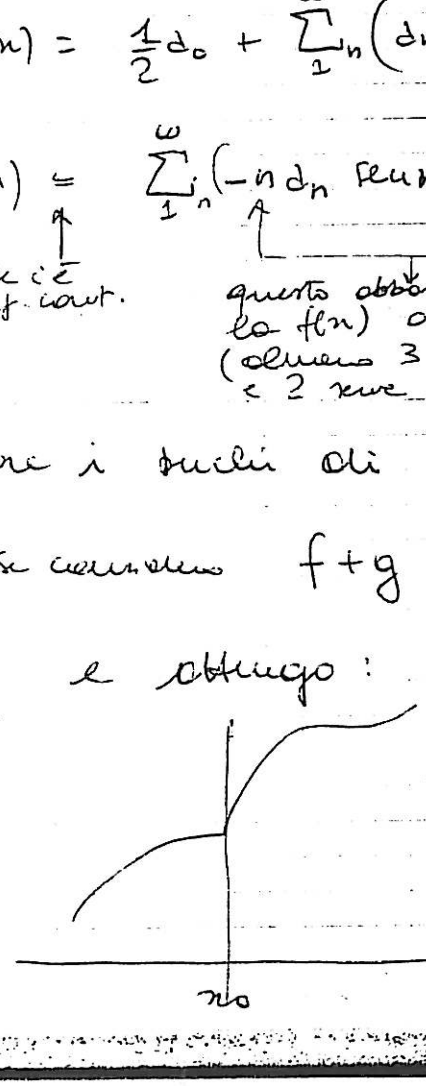
questo abbassa l'ordine di convergenza: la $f(x)$ deve tirare a zero forte (almeno 3 per avere conv. unif.: infatti $3-1=2$ e 2 serve per la unif. conv).

Come tappare i buchi di continuità:

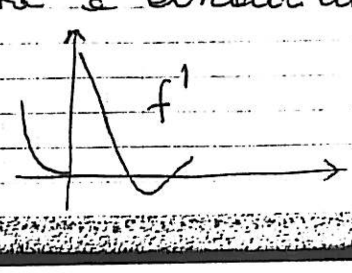


se considero $f+g$ $\quad g = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ -k & x \geq x_0 \end{cases}$

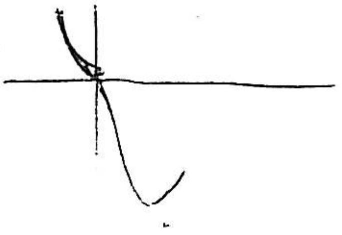
e ottengo:



Ora è continua, ma la derivata è discontinua.



Ora però la derivata è discontinua; 06 1290 - 1
stesso sistema, aggiungo una costante → pezzi di rette



Ora è continua anche la derivata

⇒ posso svilupparla in S.d.F. con uno sviluppo che converge FORTE: la approssimo con pochi pezzi e poi aggiungo lo sviluppo di tutti gli aggiustamenti (sviluppo comunque facile).

Quindi spezzare le funzioni $f = h + g$ è un metodo per accelerare convergenza (f non nota: h e g note).
(Metodo di KRYLOV).

Torno alla ricerca di trucchi per esprimere con S.d.F. funzioni sommabili su tutto $\mathbb{R}$ ($f \in L(\mathbb{R})$).

Provo a scrivere lo sviluppo in $[-l, l]$ e faccio tendere l a $+\infty$: vedo se ne esce qualcosa.

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}{}_n \left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt\right)\cos n\frac{\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{sen}\, n\frac{\pi}{l}t\,dt\right)\mathrm{sen}\, n\frac{\pi}{l}x\right] = \Big\{ \text{raccolgo e esprimo sen sen + cos cos in maniera compatta}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt}_{\text{non mi dà problemi. (è sommabile)}} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos \frac{n\pi}{l}(t-x)\right]dt}_{\text{Mi occupo di questo}} = \Big\{ \text{qui comincia l'imbroglio: passaggio al limite garibaldino}$$

Molt. e divido per π

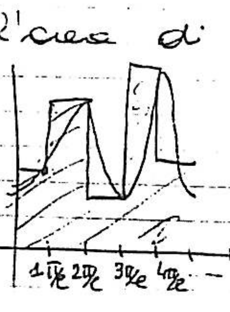
$$\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_n \boxed{\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos n\frac{\pi}{l}(t-x)\right]dt}$$ fisso x (quando cambia x cambia tutto)

Considero $F(\lambda, l) = \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\cos[\lambda(t-x)]\,dt$

Questi sono particolari valori di $F(\lambda, l)$

Quando all'integrale come fosse l'area di un rettangolo.

$$\underbrace{\frac{\pi}{l}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos n\frac{\pi}{l}(t-x)\right]dt}_{\text{altezza (numero)}}$$



Al crescere di l rendo + piccoli gli intervallini dell'integrale (miglioro l'approssimazione).

È come la definizione di integrale se non fosse per un paio di differenze:

d. integrale $\left| \sum f(\xi_i) \text{ mis } \delta_i - L \right| < \varepsilon$

per qualunque intervallino $< \delta$

e qualunque scelta della f nel = l'intervallino.

Io invece definisco la lunghezza dell'intervallino e anche in quale punto calcolo il valore di f.

Io ho trovato UNA successione che tende al limite, ma chi mi dice che tutte le altre non ci vanno? Me lo dice Fourier con un suo teorema.

Ora faccio proprio il lim: il primo termine va a zero ($\grave{e}\ \frac{1}{l} \cdot$ numero) e $l \to \infty$ la sommatoria tende a:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) \, dt \right) d\lambda$$

Se $f(x)$ soddisfa alle condizioni di Dirichlet o a quelle di Jordan su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$ allora vale lo sviluppo in integrale di Fourier.

$f(x)$ nel caso sia continua

$\frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$ se non è continua $\Big\} =$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \underbrace{\cos \lambda (t-x)}_{\text{funzione PARI in } \lambda} dt \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) \, dt \right) d\lambda$$

Adesso Minnaja vuole aggiungere zero in modo strano!

$$0 = \underbrace{- \frac{i}{2\pi} \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} \lambda (t-x) \, dt \right)}_{\grave{e}\text{ funzione dispari}} d\lambda}_{\grave{e}\text{ un integrale di una f. dispari tra due punti simmetrici.}}$$

Ho scritto zero effettivamente (in modo parco).

061290-2

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right)d\lambda - \frac{i}{2\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt\right)d\lambda$$

= (raccolgo sen e cos a formare un esponenziale) =

$$= \frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda(t-x)}\,dt\right)d\lambda =$$

(Integrale di Fourier sotto forma complessa oppure FORMULA COMPLESSA DI FOURIER)

= (porto fuori $e^{i\lambda x}$ che è una costante in dt) =

$$= \frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right)}_{\text{lo battezzo } C_\lambda}e^{i\lambda x}\,d\lambda =$$

$$= v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} C_\lambda\, e^{i\lambda x}\,d\lambda$$ (molto simile alla serie bilatera di Fourier).

TRASFORMATA DI FOURIER

$f \in L(\mathbb{R})$

$$[\mathcal{F}(f)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

Funzione complessa di variabile reale.

Considerando $e^{-i\omega t}$ un caso particolare guardo al caso generale:

$$\int_E f(t)\,K(\lambda,t)\,dt = F(\lambda)$$ TRASFORMATA di f.

K si dice NUCLEO della trasformazione.

- se $K = e^{-i\omega t}$ ed $E =]-\infty,+\infty[$ la trasformata è quella di Fourier.
- se $K = e^{-\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{C}$, $E = [0,+\infty[$

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-\lambda t}\,dt$$ TRASFORMATA DI LAPLACE

Proprietà della trasformata di Fourier.

$\left[\mathcal{F}(f)\right](\omega)$ è infinitesima per $\omega \to \infty$

$\left[\mathcal{F}(f)\right](\omega)$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$

Da questi 2 segue che

· $\mathcal{F}(f)$ è limitata (cioè ha modulo limitato essendo complessa).

— Semplificazioni:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\text{sen}\,\omega t\, dt$$

Se la f è pari va via il 2° integrale, se è dispari va via il primo.

— Se f è pari $\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \underset{\text{essendo pari.}}{=} 2\boxed{\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt}$

se f è pari $2\,\mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}(f)$

Si chiama COSENTRASFORM. $(\mathcal{F}_c)$

— Se f è dispari

$$\mathcal{F}(f) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\,\text{sen}\,\omega t}_{\text{dispari} \cdot \text{dispari} \to \text{pari}}\, dt = -2i\boxed{\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\text{sen}\,\omega t\, dt} = -2i\,\mathcal{F}_s(f)$$

Si chiama SENTRASFORMATA $(\mathcal{F}_s)$

Se f è reale e pari anche $\mathcal{F}(f)$ è pari e Reale.

Se f è dispari reale $\mathcal{F}(f)$ è immaginaria pura e Pari

$$\left[\mathcal{F}(f^{(n)}(t))\right](\omega) = (i\omega)^n\left[\mathcal{F}(f)\right](\omega)$$

PRIMA FORMULA FONDAMENTALE DI FOURIER.

Più derivate f ha, più $\mathcal{F}(t)$ va a zero forte (+ forte di ω^n).

Vedo che il derivare nello spazio delle $\mathcal{F}$ si è TRASFORMATO in un ~~elevamento~~ elevare a potenza. Sembra strano, ma basta calcolare

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \underbrace{\left[e^{-i\omega t} f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{se fosse zero avrei dimostrato.}} + i\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

ANTITRASFORMATE

$$[\mathcal{F}(f)](\omega) = \hat{f}(\omega)$$ (f-cappello di ω)
(altro modo di scriverla)

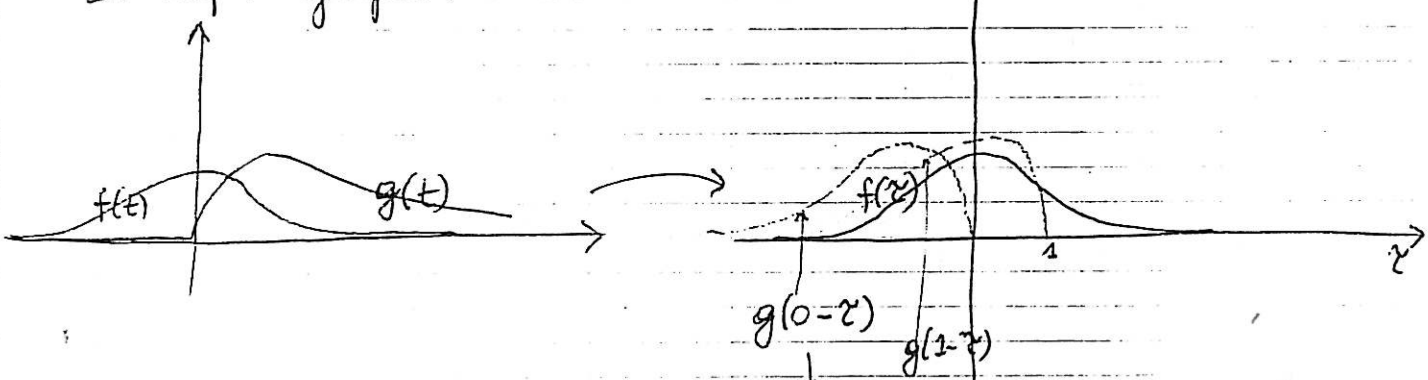
$$\left.\begin{array}{c} f(x) \\ \dfrac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \end{array}\right\} = \frac{1}{2\pi}\, \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

(FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE)

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$f, g \in L(\mathbb{R})$ $\qquad h(t) = (f * g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$

Provo a vedere a cosa serve con un esempio grafico:



ora faccio camminare la t

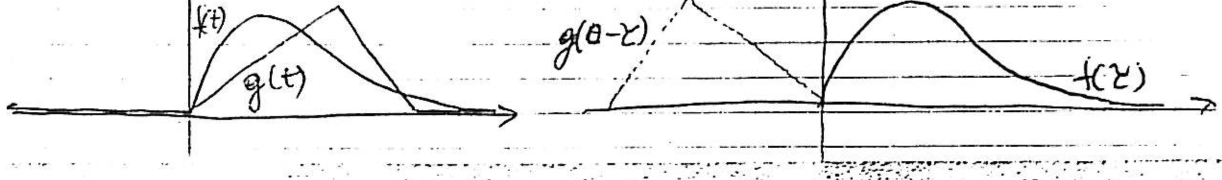
È plausibile ad occhio che il prodotto di due funzioni sia sommabile se queste sono sommabili.

Teorema: se $f, g \in L(\mathbb{R})$ allora $h = f * g$ esiste quasi ovunque in $\mathbb{R}$ e appartiene a $L(\mathbb{R})$ cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \right| dt < +\infty$$

Esempio semplice:

- Supponiamo che f e g abbiano supporto solo in $\mathbb{R}^+$



Con $t = 0$ l'$\int$ è nullo: facendo muovere t in avanti, quando tutta g sarà sulla semiretta reale g potrà arrivare al massimo fino a t.

L'integrale è fittiziamente da $-\infty$ a $+\infty$: in realtà va da 0 (per la f) a t (per colpa di g).

↓

che sono nulle (f prima di 0 e g dopo t).

Questa si chiama convoluzione in $\mathbb{R}^+$ (per funzioni che hanno supporto in $\mathbb{R}^+$: come i fenomeni fisici).

—ooo—

Algebra: insieme dotato di prodotto ~~ed~~, elemento neutro ed inverso.

<u>Voglio andare a vedere se il prodotto di convoluzione ha dato $L(\mathbb{R})$ di una struttura di ALGEBRA. Beh, tra le funzioni di $L(\mathbb{R})$ non esiste una funzione che funzioni da unità per il prodotto di convoluzione</u>

Che cosa c'entra questo prodotto con la trasformata di Fourier? Se f e $g \in L(\mathbb{R})$, allora la trasformata di Fourier del loro prodotto di convoluzione è il prodotto ordinario delle trasformate di Fourier. In formule:

$$\hat{h} = \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\hat{h} \in L(\mathbb{R}) \Downarrow \exists \qquad \hat{f}\cdot\hat{g} \in L(\mathbb{R}) \Downarrow \exists$$

Nessuno mi garantisce che $f * g$ sia in $L(\mathbb{R})$ e quindi $\widehat{f*g}$ potrebbe non esistere.

Vedo un'altra fatica che la $\mathcal{F}$ ci risparmia: il prodotto di convoluzione si TRASFORMA in prodotto ordinario.

Cenno di dimostrazione

$$[\mathcal{F}(h)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\qquad \Big) e^{-i\omega t}\, dt$$

↓

qua dentro devo scrivere $h = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(\tau - t)\, d\tau$

Così come è scritto è un integrale iterato, non un integrale doppio: devo fare prima quello interno.

Pongo $t-\tau = u$ va col du

$$\dots = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(u)\, e^{-i\omega(u+\tau)}\, du\right] d\tau = \dots$$

va col $d\tau$

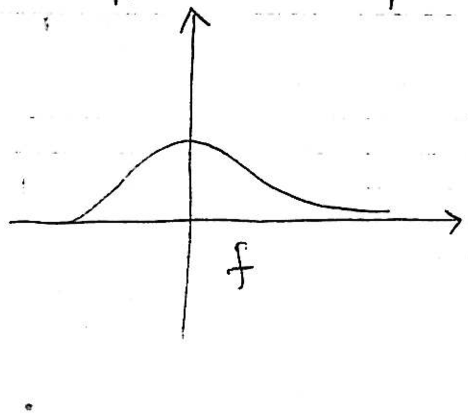
son passato ad un integrale doppio e adesso riporto ad un integrale semplice ×2 (prodotto di due ognuno con la sua variabile):

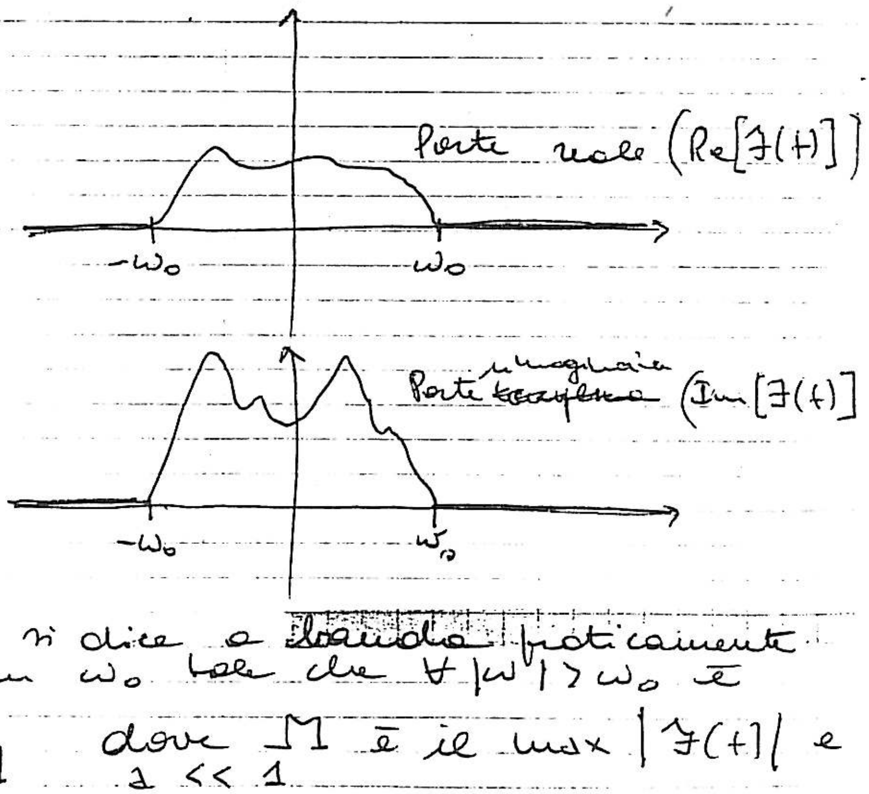
$$\dots = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau}_{\mathcal{F}(f)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{-iu\omega}\, du}_{\mathcal{F}(g)}$$

prodotto ordinario

Quello che mi ha permesso l'ultimo passaggio è stato il teorema di FUBINI.

Una funzione f si dice a <u>banda rigorosamente limitata</u> se la sua trasformata di Fourier ha supporto compatto.





Una funzione f si dice a banda praticamente limitata se $\exists$ un ω_0 tale che $\forall |\omega| > \omega_0$ è

$|\mathcal{F}(f)| < \alpha M$ dove M è il max $|\mathcal{F}(f)|$ e $\alpha << 1$

M $\exists$ sempre: $\mathcal{F}(f)$ è continua in un compatto $\Rightarrow$ e tende a zero per $|\omega| \to \infty$

Questa definizione è data in modo che l'errore piccolo (di solito < 5%) è posto in relazione col max della trasformazione.

w_0 si chiama larghezza convenzionale di banda!

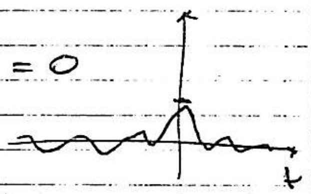
—— IL CLOU ——

$f \in L(\mathbb{R})$; f a banda rigorosamente limitata ; sia w_0 la larghezza di banda (cioè l'inf. di quegli w_0 per i quali risulta $[\mathcal{F}(f)](\omega) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$) allora vale :

$$f(t) = \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k f\left(\frac{k\pi}{w_0}\right) \frac{\sin\left[w_0\left(t - \frac{k\pi}{w_0}\right)\right]}{w_0\left(t - \frac{k\pi}{w_0}\right)}}_{\text{non è una serie di Fourier.}}$$

uguaglianza straordinaria

La funzione è del tipo $\frac{\sin t}{t}$; per $k = 0$ al variare di k la funzione slitta nell'asse t.



La $f\left(\frac{k\pi}{w_0}\right)$ cioè il coefficiente che moltiplica è la f calcolata in certi punti particolari : più aumento w_0 più restringo il passo; così facendo per avere una buona approx di f devo prendere più CAMPIONI

Questo è il TEOREMA DI SHANNON o del CAMPIONAMENTO

Più stretta è la banda, più rado può essere il campionamento.

Il teorema vale se la banda è limitata rigorosamente : se invece la banda NON è a banda rig.zz. e il campionamento non sufficient. fitto ~~la~~ : Prendo lo stesso la f : la differenza tra la f trovata e la f originale si dice DISTORSIONE della f o ERRORE DI ALIASING.

—— o ——

NOTA:

Una cosa è dire che $\exists \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ e un altro paio di maniche è dire che $\exists \lim_{k \to \infty} \int^k \frac{\sin t}{t} dt$

Questo l'ho fatto su una particolare successione invadente.

Altre proprietà della trasformata di Fourier:

- Andiamo a vedere se conoscendo $\mathcal{F}(f)$ posso ricavare la $\mathcal{F}$ della f "slittata":

$$\mathcal{F}(f(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t+t_0-t}\,d(t-t$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}\,d(t-t_0) = \{(t-t_0)=u\} =$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du = e^{-i\omega t_0}\cdot\hat{f} = e^{-i\omega t_0}\cdot\hat{f}(\omega)$$

Quindi $\mathcal{F}(f(t-t_0)) = e^{-i\omega t_0}\cdot\mathcal{F}(f)$

(Teorema della traslazione in t)

Vediamo adesso il Teorema della traslazione in ω

$$[\mathcal{F}(f)](\omega-\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{i\omega_0 t}\right]\cdot e^{-i\omega t}\,dt = \left\{\begin{array}{l}\text{e questa è la trasf. di } \mathcal{F} \\ \text{della funzione } f(t)\cdot e^{i\omega_0 t}\end{array}\right\} =$$

$$= \widehat{f(t)e^{i\omega_0 t}}$$

(Questo è il teorema della traslazione in frequenza, ovv

- Vediamo ora cosa succede se comprimo il grafico della funzione o lo dilato

(comprimo ⇒ $a>1$; dilato ⇒ $a<1$)

$$\mathcal{F}(f(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at}\cdot\frac{1}{a}\,d(at) = \{at=u\} =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\,du = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(Teorema del cambiamento di scala)

Ricordo la formula generale della $\mathcal{F}$:

$$\left[\mathcal{F}(f^{(n)})\right](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}(f)$$

Ora :

causa delle "difficoltà" per la regolarità ⇒ sommabilità

$$\left[\mathcal{F}(f)\right]^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}(t^n f(t))$$

Questa si chiama FORMULA DELLA DERIVAZIONE IN FREQUENZA

più è sommabile f più è regolare la sua $\mathcal{F}(f)$

Caso particolare :

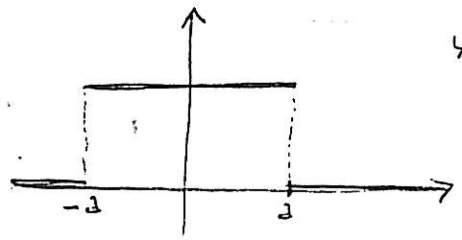
$$\left(\hat{f}\right)^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\, dt$$

Questo si chiama TEOREMA DEI MOMENTI

($n=1 \Rightarrow$ baricentro ; $n=2 \Rightarrow$ momento d'inerzia)

ooo

- Calcoliamo la $\mathcal{F}(f)$ di una f facile.



la f è pari $\Rightarrow \mathcal{F}(f) = 2\,\mathcal{F}_c(f) =$

$$= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

$$\mathcal{F}(f) = 2\int_0^d 1\cdot\cos\omega t\, dt = 2\left[\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right]_0^d =$$

$= 2\dfrac{\operatorname{sen} d\omega}{\omega}$ Questa NON è di $L(\mathbb{R})$ come $f(\omega)$

Voglio provare a fare la trasformata di Fourier della funzione appena trovata : NON POTREI ! ma provo lo stesso: la funz. è PARI ⇒ provo a fare la $\mathcal{F}$ col coseno:

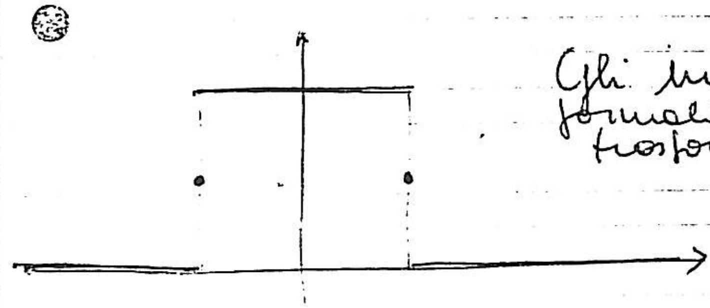
$$\mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sen} dt}{t}\right) = 2\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} dt}{t}}\cos\omega t\, dt$$

NON POTREI chiamarla con

$\notin L \Rightarrow$ NON c'è l'$\int_0^{+\infty}$ xchè non è sommabile. Eh eh... io vado a fare l'$\int_0^{+\infty}$ come $\lim_{k\to\infty}\int_0^k$ - facendo i conti trovo:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{\operatorname{sen} d t}{t}\cos\omega t\,dt = \dots = \begin{cases} 2\pi & |\omega|<d \\ \pi & |\omega| = d \\ 0 & |\omega|>d \end{cases}$$ 101290-2

e trovo:



Gli ingegneri bypassano tutte le formalità e la chiamano lo stesso trasformata.

Allora adesso provo a prendere in ω una funzione simile a questa e antitrasformo: (è come scrivere in un senso vietato: non ci sono impedimenti fisici, è vietato, ma si può fare).

Ottengo proprio $\frac{\operatorname{sen} d\omega}{\omega}$ o robe simile e quindi ho ottenuto un risultato apprezzabile, anche se le funzioni non sono sommabili e ho ottenuto una trasformata non continua.

Esercizi dal compito:

- La funzione $f(z) = \mathrm{Re}[z]$ è una funzione olomorfa nel semipiano superiore di $\mathbb{C}$?

NO xchè x una f è reale perché sia olomorfa dovrebbe essere costante.

Le funzioni di $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sono sempre a banda praticamente limitata? Se sì dire xchè, se no trovare un controesempio.

· Dovrebbe essere $|\hat{f}| < d M$ con $d \ll 1$ con $|\omega| < \omega_0$

SI. Perchè b.p.l. vuol dire quanto appena detto e questo è sempre vero perchè $\hat{f} \to 0$

Si trovino le soluzioni nel corpo complesso dell'equazione:

$$\operatorname{sen} z = 2i \;;$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i \qquad e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = -4 \;;\; e^{2iz} + 4e^{iz} - 1 = 0$$

$e^{iz} = t$; $t^2 + 4t - 1 = 0$ $\quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+1}$

$iz = \log(-2 \pm \sqrt{5})$ $\quad z = -i \log(-2 \pm \sqrt{5})$

nel corpo complesso è polidromo

~~zzzzz~~ Ho 2 famiglie in quanto il modulo è positivo e negativo:

$$z_1 = -i\left[\log|\sqrt{5}-2| + \arg(\sqrt{5}-2) + 2k\pi i\right]$$

$$z_2 = -i\left[\log|\sqrt{5}+2| + \underbrace{\arg(-\sqrt{5}-2)}_{=\pi} + 2k\pi i\right]$$

Se $f(z)$ ha in 0 un polo doppio che cosa si può dire del residuo?

Può essere $\neq 0$.

- Certamente non è sempre nullo ($\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ e res. è 1)
- Certamente non è sempre $\neq 0$ ($\frac{1}{z^2}$)

Dare la convergenza in media quadratica:

$$\|f_n - f\|_{L^2(E)} = \left\{ \int_E |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Si scriva lo sviluppo di una funzione non continua in integrale di Fourier.

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} vp \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(t-x)\, dt \right) d\lambda$$

$f \in L(\mathbb{R})$; $g \in L(\mathbb{R})$ f e g sono a supporto compatto. 1) Esiste quasi ovunque il prodotto di convoluzione $f * g$? 2) Se sì è in $L(\mathbb{R})$? 3) è a supporto compatto?

1) e 2) SI (l'è unitor.)

3) SI, ma solo perché sono <u>ENTRAMBE</u> a supporto compatto.

ooo

Si enunci il T. di Cesaro

ooo

I polinomi in due variab. sono funzioni armoniche nel piano?

NO in genere (x^2-2y^2 $\partial_x^2 = 2$ $\partial_y^2 = -4$)

{Quelli di primo grado certamente sì che hanno le ~~due~~ derivate entrambe nulle.}

ooo

La serie di Fourier di una funzione non continua in un punto (fatta ad arte) può convergere uniformemente? SI (Anche se non converge alla f, ma alla f "senza buco").

{Se la discontinuità fosse stata di 1^ specie ( ), NON potrebbe convergere uniformemente.}

ooo

Voglio trovare una trasformata con le proprietà di quella di Fourier, ma con meno limitazioni.

$f \in L(\mathbb{R})$

$$\int_{E \subseteq \mathbb{R}} f(x)\, \underbrace{k(\lambda,x)}_{e^{-i\omega x}}\, dx$$

se non è sommabile non è detto che la trasf. sia definita su tutto $\mathbb{R}$

$L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$: funzioni localmente sommabili (= sommabili su ogni compatto di $\mathbb{R}_0^+$) sulla semiretta delle $t \geq 0$

Es. $\frac{1}{t} \notin L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$

$\sin \omega t$ $(\forall \omega \in \mathbb{R})$ $\in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$

$t^k \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$

$e^{kt} \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$

etc. + tutte le combinazioni

Una funzione CONTINUA ($f(t) \in C^0(\mathbb{R})$ è $\in L_{loc}$

$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$) ha integrale sommabile.

$$\int_0^k f(t)\,e^{-st}\,dt \qquad s \in \mathbb{C}$$

e ne faccio il limite: $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^k f(t)\,e^{-st}\,dt$

L'integrale $\exists$ sempre: che non son sicuro esiste sempre è il limite $k \to +\infty$ FINITO.

$$\int_0^k e^{t^2} e^{-st}\,dt = \int_0^k e^{t^2} e^{-(x+iy)t}\,dt = \int_0^k e^{t^2} e^{-xt}\, e^{-iyt}\,dt$$

ha modulo 1

E quindi nessun s ha parte reale che assicura il limite essere finito.

$\forall x \nexists$ finito il limite per $k \to +\infty$ $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{t^2}\cdot e^{-xt}\,dt$ (integrale del modulo)

$$\int_0^k 1\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^k e^{-xt}\, e^{-iyt}\,dt$$

per gli $x > 0$ c'è il limite
ma per gli x negativi non c'è.

$$\int_0^k e^{-t^2} e^{-xt}\, e^{-iyt}\,dt \qquad \left(\int_0^k e^{-t^2} e^{-st}\,dt\right)$$

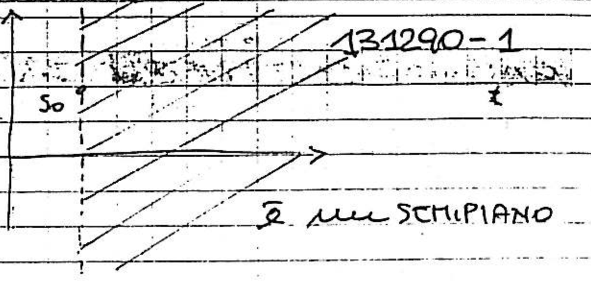
→ Questa ammette il limite finito $\forall x$
(e^{-t^2} schiaccia tutto a zero).

Una funzione $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ si dice trasformabile secondo Laplace, se $\exists$ s_0 tale che rende finito il $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^k f(t)\,e^{-s_0 t}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-s_0 t}\,dt$ (non è $\int_0^{+\infty}$ ma è un limite inteso su una particolare successione in-crescente).

Teorema: se $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile ed s_0 è un punto di $\mathbb{C}$ che rende finito il $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^k f(t)\,e^{-s_0 t}\,dt$ allora tale limite esiste FINITO per ogni s con parte reale di s > della parte reale di s_0 ($Re[s] > Re[s_0]$)

131290-1

Es: se trovo questo s_0



è un SEMIPIANO

Sulla retta di frontiera (comandata per s_0) non so nulla: potrebbe anche andare a $+\infty$ il limite.

Il limite $\boxed{\lim_{k \to +\infty} \int_0^k f(t) e^{-st} dt}$ si dice trasformata di LAPLACE

Quindi la $\mathcal{L}$-trasformata ha come dominio un semipiano

- Data una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile, l'estremo inferiore delle parti reali degli $s \in \mathbb{C}$ che rendono finito il limite solito si dice ascissa di convergenza e si indica con ρ^*.
- La retta $x = \rho^*$ si dice retta di convergenza

Cosa succede in Matura.

- Invece di prendere il solito limite, mi occupo di questo:

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Questo è molto più forte: l'$\exists$ di questo integrale dipende dall'$\exists$ del $\int |\ |$

$$\exists \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \iff \int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| dt$$

Se esiste un $s_0 \in \mathbb{C}$ tale che sia finito $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_0 t} dt$ la f si dice "assolutamente trasformabile secondo Laplace". L'integrale si chiama la trasformata assoluta di Laplace.

Anche in questo caso:

- Se f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile ed s_0 è un numero complesso tale da rendere finito

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_0 t} dt$$

allora tale integrale è finito per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re[s] \geq Re[s_0]$

N.B.

Stavolta la convergenza c'è in tutta la retta.

L'$\inf(Re[s]) : \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right|$ sia $< +\infty$ si dice ascissa di convergenza assoluta e si indica con ρ (e non con ρ^*: andremo a considerare solo trasf. di $\mathcal{L}$ assolute e quindi vedremo solo ρ).

La retta $x = \rho$ si dice retta di convergenza assoluta.

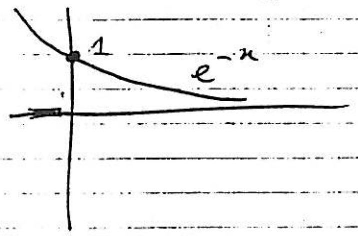
Dimostro il $\geq$ di prima:

$$\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-s_0 t} e^{-st} e^{+s_0 t}| dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{|f(t) e^{-s_0 t}|}_{\text{finito}} |e^{-(s-s_0)t}| dt \leq \left(\text{se } |e^{-(s-s_0)t}| \leq 1 \right) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-s_0 t}| dt < +\infty$$

$$|e^{-(s-s_0)t}| = e^{-Re[(s-s_0)t]}$$



e quindi

$$Re[s] \geq Re[s_0]$$

$f \in L(\mathbb{R})$ Prendo la funzione 1 $f(t)$ $t \geq 0$

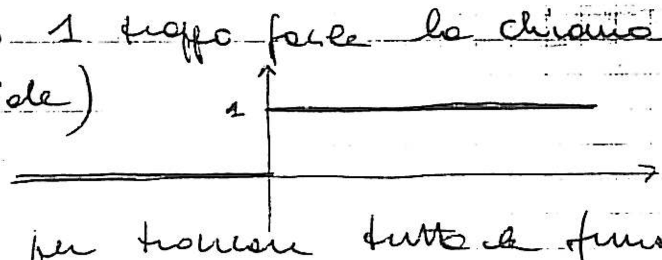
Assumo che tutte le funzioni valgano ZERO prima del punto dal quale mi interessa trasformare.

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

devo dire DOVE gli uguali (l'ultimo) esistono $\Rightarrow$ $(\rho = 0)$

$1/s$ su $\rho = 0$ non esiste.

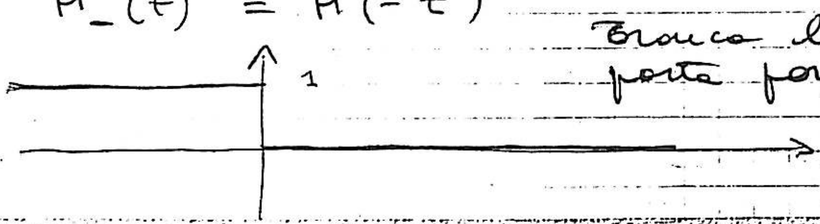
Essendo 1 troppo facile la chiamo $H(t)$ (funzione di Heaviside) o funzione a gradino.



Mi serve per troncare tutte le funzioni dalla parte negativa

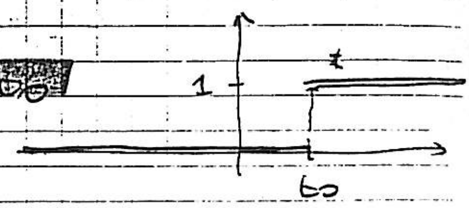
Def: $H_-(t) = H(-t)$

Tronca le f dalla parte positiva.

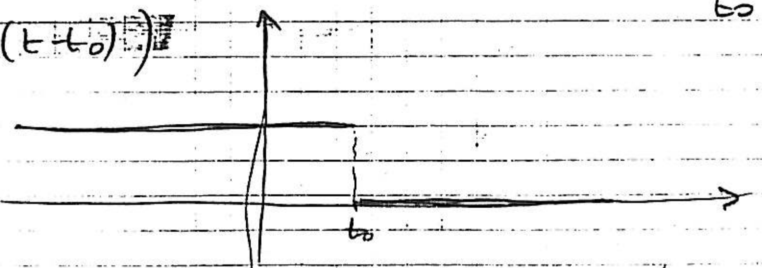


- Def: $H_{(t_0)+} = H(t-t_0)$

È la $H(t)$ col SALTO in t_0

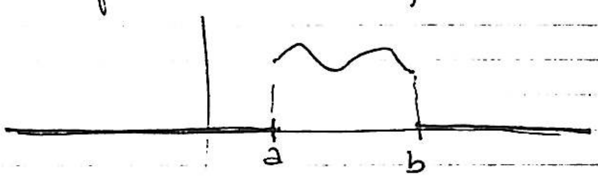


- Def: $H_{(t_0)-} = H(-(t-t_0))$



Combinandole opportunamente posso ottenere troncamenti su degli intervalli.

Es: per avere f solo su $[a,b]$: $H_{(a)+} \cdot f \cdot H_{(b)-}$



- Com'è la $\mathcal{L}$-trasformata di $H(t_0)$

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^{+\infty} H_{(t_0)} e^{-st}\,dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{t_0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{-st_0}}{s} \qquad (\rho = 0)$$

↳ vale solo per il semipiano dx

$$\mathcal{L}(e^{kt}) = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,dt = \left[-\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t}\right]_0^{+\infty}$$

Esiste per $Re[s] > Re[k]$; quando c'è fa $\frac{1}{s-k}$ $(\rho = Re[k])$

Prontuario di $\mathcal{L}$-trasformate (cfr. libro).

$$\mathcal{L}(e^{kt}) = \frac{1}{s-k}$$

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{s-i\omega} \qquad \rho = 0$$

$$\mathcal{L}(e^{-i\omega t}) = \frac{1}{s+i\omega} \qquad \rho = 0$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \rho = 0$$

$f = O(g(t))$ (O grande) se $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| < A \quad \forall t$

$f \sim g(t)$ (asintotico) $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \to t_0} 1$

$f = o(g(t))$ (o piccolo) $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \to t_0} 0$

f potrebbero NON essere infinitesime (potrebbero addirittura non avere limite, se prese singolarmente).

- Sia $f(t) = O(e^{kt})$ $(t \to +\infty)$ e sia $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ allora f è $\mathcal{L}$-trasformabile (assolutamente) ed è $\rho \leq k$

(Una funzione che non si discosta troppo dall'esponenziale è $\mathcal{L}$-trasformabile).

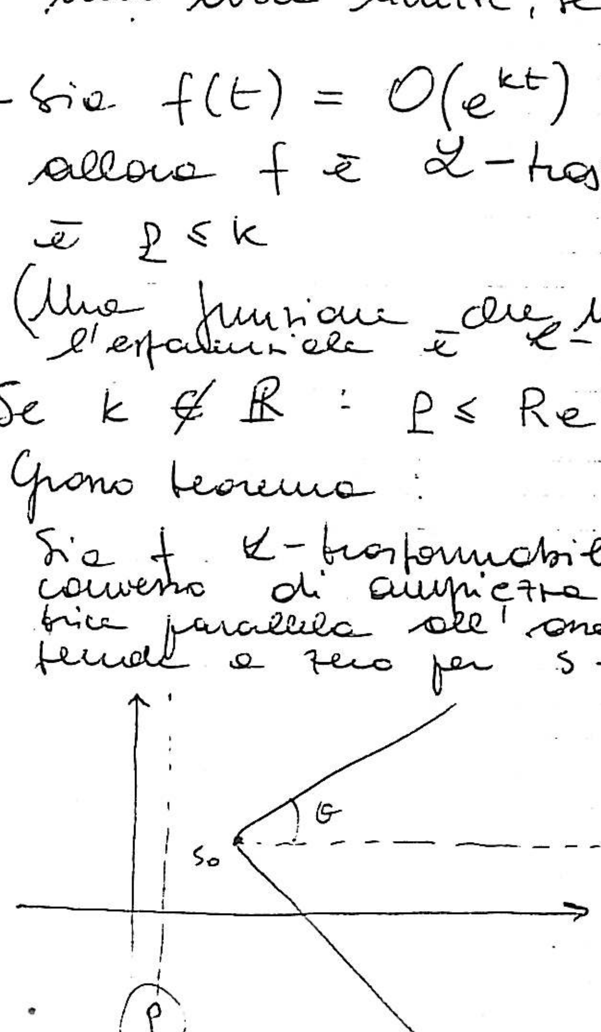
Se $k \notin \mathbb{R}$: $\rho \leq Re[k]$

- Grosso teorema:

Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile e sia $A(s_0, \theta)$ un angolo convesso di ampiezza 2θ, di vertice s_0 e di bisettrice parallela all'asse reale, allora $[\mathcal{L}(f)](s)$ tende a zero per $s \to \infty$, $s \in A(s_0, \theta)$.

(Senza dimostrazione)

Questa è una condizione necessaria affinché f sia $\mathcal{L}$-trasformabile.



Anche se ρ fosse meno qua, la chiedo A essere convesso e (quindi non potendo essere piatto) il t. garantisce la tendenza a zero solo dentro l'angolo.

Teorema:

Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza ρ; allora è:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{[\mathcal{L}(f)](s)}{s} = 0$$

con $Re[s] > \rho$. (Ipotesi + blanda di prima, tesi diversa).

Quindi: se sto nell'angolo A la $\mathcal{L}(f)$ va a zero da sola: fuori da A POTREBBE andare a ∞, ma di ordine basso, inferiore al primo.

Teorema: (prima formula fondamentale di Laplace)
Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile, allora $\mathcal{L}(f)$ è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza e vale:

$$\left[\mathcal{L}(f)\right]^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}\left(t^n f(t)\right)$$

Utilità: (uso al contrario) già $\mathcal{L}(f(t))$ tende a zero (c'è e^{-st}) e quindi va a zero a > ragione.

$$\mathcal{L}(t^k) = \mathcal{L}(t^k \cdot H) = (-1)^k \cdot \frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{s}\right) = \cancel{(-1)^k}\cancel{(-1)^k} \cdot \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$= \frac{k!}{s^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

La chiamo prolungamento analitico della $\mathcal{L}$-trasformata al semipiano negativo. (dove $\exists$ entrambe esse coincidono)

ES:
- Si calcoli $\mathcal{L}(t\cosh 4t)$ precisandone l'ascissa di convergenza assoluta.

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \left[\mathcal{L}(f)\right]^{(n)}$$

$$\mathcal{L}(t\cosh 4t) = -\left[\mathcal{L}(\cosh 4t)\right]^{(1)} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-4^2}\right) =$$

$$= -\frac{s^2-16-2s^2}{(s^2-16)^2} = \frac{s^2+16}{(s^2-16)^2} \qquad \rho = |\omega|^2$$

Vale per $Re[s] > 4$ $(\rho = 4)$
(Specifica che nella retta NON c'è convergenza).

Teorema: Sia $\frac{f(t)}{t}$ $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza ρ^*; allora anche

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau$$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $= \max[0, \rho^*]$ e vale:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right) = \frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left[\mathcal{L}(f)\right](\sigma)\,d\sigma$$

Ho bisogno che $\frac{f(\tau)}{\tau}$ sia localmente sommabile, perché la sola $\mathcal{L}$-trasf. di $f(\tau)$ non mi assicura nulla. Se invece è $\mathcal{L}$-trasf. $\frac{f(\tau)}{\tau} \Rightarrow$ (teor. preced.) $\Rightarrow$ è $\mathcal{L}$-trasf anche $f(\tau)$

- Si calcoli $\mathcal{L}\left(t \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau\right) = \mathcal{L}(t \cdot f(t))$

devo cercare

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^\infty \underbrace{\frac{1}{\sigma^2+1}}_{\text{trasf del numeratore}}\, d\sigma$$

$$\left\{ \mathcal{L}\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(g) \quad p^* \quad Re[s] > \max[0, p^*] \right\}$$

essendo $\mathcal{L}\left(t \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau\right)$ nel caso della 1^ formula di Laplace basta saper fare $\mathcal{L}\left(\int \frac{\sin\tau}{\tau}\right)$ ma $\frac{\sin\tau}{\tau}$ è nel caso del 2° teorema

$$\left\{ \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s \mathcal{L}(f(t))(\sigma)\, d\sigma \quad (s \in A) \right.$$

quindi basta che sappia $\mathcal{L}(\sin t)$

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}\, d\sigma = \left[\operatorname{arctg} \sigma\right]_s^\infty =$$

ma qua sorgono dei problemi: $\operatorname{arctg} z$ con $z \in \mathbb{C}$ è polidroma: ha più rami; Allora ci si mette d'accordo di usare il ramo principale cioè quello che da zero per $\operatorname{arctg}(0)$; corrispondente al ramo $\mathbb{R}$

$$\ldots = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(s) = \underbrace{\left(Re[s] > 0\right)} \rightarrow \operatorname{arctg}\frac{1}{s}$$

Tenendo presente che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \text{cost} \begin{cases} = \pi/2 & x > 0 \\ = -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$

per $x > 0$ $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ e quindi

Ora $\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau\right) = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}$ ora ritorno alla prima formula fond. di $\mathcal{L}$ (per arrivare alla soluzione)

$$f(t) = t\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{1}{s^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\right)$$

ooo

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen}\omega t) = -\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}(\operatorname{sen}\omega t)\right] = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$(\rho = 0)$

ooo

In quale problema differenziale si traduce l'equazione

$$y(t) = H(t) + 2\int_0^t y(\tau)\,d\tau \qquad \text{(equazione integrale)}$$

(Sembrerebbe non avere nessuna parentela con la $\mathcal{L}$-trasformata)

Proviamo a derivare:

$$\begin{cases} y'(t) = 0 + 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Devo imporla perché altrimenti con la sola eq. diff. otterrei una famiglia di funzioni.

- Altro modo di risolverla (con la $\mathcal{L}$-trasformata)

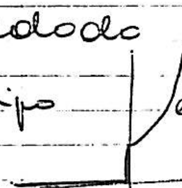
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} + 2\,\frac{1}{s}\mathcal{L}(y) \qquad \mathcal{L}(y)\left[1 - \frac{2}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

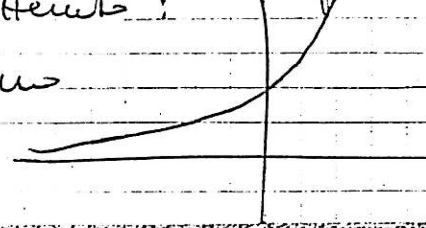
$$\mathcal{L}(y) = \frac{1/s}{1 - 2/s} = \frac{1}{s-2}$$

ora ricordando che $\mathcal{L}(e^{kt}) = \frac{1}{s-k} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^{2t}$ Osservo però che col metodo della $\mathcal{L}$-trasformata ottengo una soluz. del tipo



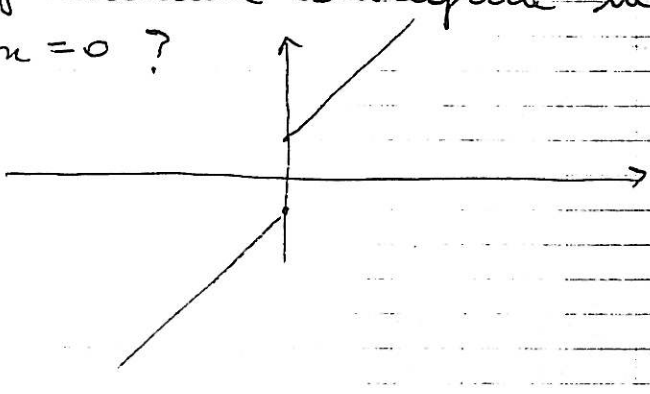
Mentre derivando (attenzione però: H derivabile non sarebbe in zero: ho ricavato il problema ma non è detto sia corretto) ho ottenuto:



Le due funzioni coincidono nella semiretta > 0

E poi: ogni passaggio di L deve comportare una integrazione avrei infinite soluzioni: gli integrali infatti non si "accorgono" delle ~~fun...~~ diversità di funzioni che sono diverse su insiemi di misura nulla...: si prende quella principale.

- Si dia la def. di serie uniformemente convergente in $[-\pi, \pi]$
- La serie di Fourier di $f(x) = \frac{x}{|x|} + x$ è 1) uniformemente convergente in $[-\pi, \pi]$? 2) È convergente in $x=0$?



1) NO dovrebbe convergere ad una funzione contin.
2) SI Il lim sarebbe $f(x)$ se $f(x)$ fosse continua o $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ se $f(x)$ continua non fosse.

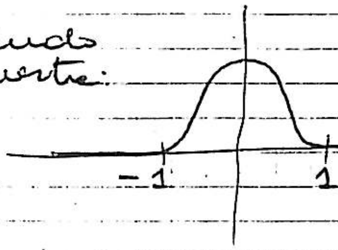
---

1) Si dia un esempio di funzione non nulla che sia $C^\infty(\mathbb{R})$ ed a supporto compatto.
2) Si dia un esempio di funzione che sia $C^\omega(\mathbb{R})$ ed a supporto compatto.

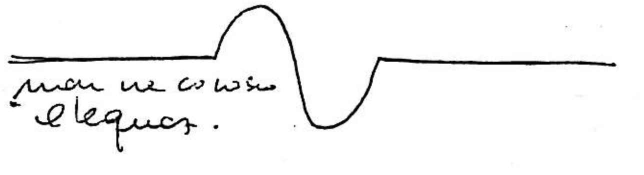
Alla 2) si risponde subito: deve essere nulla fuori da un compatto, ma deve essere sviluppabile in s.d.T su un compatto $\Rightarrow$ è una restrizione di una s.d.T.
$\Rightarrow$ Esiste solo la funzione nulla

1) Allora: analitica non può essere: deve avere tutte le derivate che si saldano a zero con tutte le derivate.

Prendo questa:



$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x|<1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$



non ne conosco l'equaz.

Una funzione f con derivata seconda nel punto t è ivi hölderiana di ordine 1? È ivi hölderiana di ordine 2?

- Se ha la f'' ha la f' ⇒ il rapporto incrementale ... ⇒ è limitato.
$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < A|h| \quad \text{(def. di Hölderianità).}$$

È di ord 2? NO la f' avrebbe dovuto essere NULLA, mentre l'esercizio nulla mi dice su questo.

$\frac{1}{\cos s}$; $\frac{1}{s^2}$; $\frac{1}{s^3}$, e^{-s} Quali di queste possono esse (o sono) trasf. di Laplace?

$\frac{1}{\cos s}$: NO (dovrebbe → 0 per s → ∞ e inoltre dovrebbe essere olom. su un semipiano)

$\frac{1}{s^2}$: SI addirittura so chi è: è $\mathcal{L}(t)$

$\frac{1}{s^3}$: SI $\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$ e quindi questa è $\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right)$

e^{-s}: è un buon candidato (ma non lo è)

Se fosse:
$$[\mathcal{L}(f)]' = -e^{-s} = -\mathcal{L}(t f(t))$$
$$= -\mathcal{L}(f)$$

Avrei: $-\mathcal{L}(f) = -e^{-s}$;

$\mathcal{L}[f(t)(t-1)] = 0$ La funzione che ha per $\mathcal{L}$-trasformata la funzione NULLA

$(t-1)$ non è la f nulla

f(t) dovrebbe essere la f nulla (SOLO) ma non lo è perché $\mathcal{L}(f) = e^{-s}$

Morale: e^{-s} NON È una trasformata.

— 1991 —

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{s-\alpha} \qquad Re[s] > Re[\alpha]$$

$$\mathcal{L}(H) = \frac{1}{s}$$

Altre $\mathcal{L}$-trasformate semplici:

$\mathcal{L}(t^\alpha)$ Intendendo il ramo principale di t^α

$Re[\alpha] > -1$ (perché sia localmente sommabile).

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}\, dt$$

TRUCCO: vado a guardare solo sugli ~~s~~ reali: poi posso fare un prolungamento analitico in quanto la $\mathcal{L}$-trasform. è olomorfa (il prolung. analitico in variab. è UNICO).

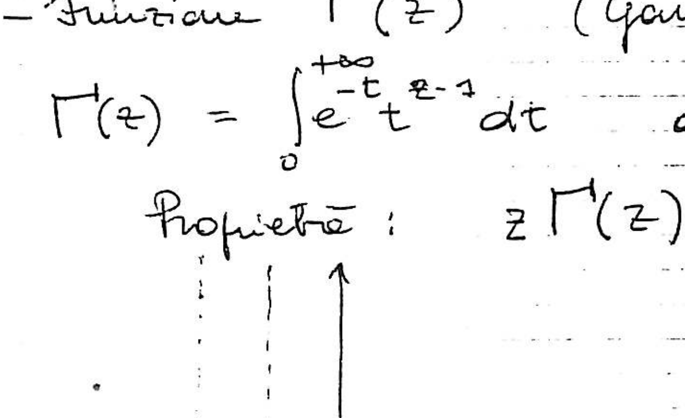
Mi restringo agli s reali (li chiamo ξ)

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\xi t}\, dt = \{\text{pongo } u = \xi t\} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\xi}\right)^\alpha e^{-u}\, d\left(\frac{u}{\xi}\right)$$

- Funzione $\Gamma(z)$ (gamma di zeta).

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad \text{def. per } Re[z] > 0$$

Proprietà: $z\Gamma(z) = \underbrace{\Gamma(z+1)}$



Questa è def. anche prima di 0 fino a $z=-1$: tramite questa riesco a definire la $\Gamma(z)$ tra -1 e 0 (aperto) e così via striscia per striscia

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\xi}\right)^\alpha e^{-u}\, d\left(\frac{u}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi^{\alpha+1}} = (\text{prolungo}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Quando α è proprio un numero intero trovo $\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

La funzione Γ è quindi il prolungamento analitico (dove esiste) della funzione FATTORIALE.

Vediamo $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{\alpha t} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-\alpha)t}\, dt =$$

$$= [\mathcal{L}(f)](s-\alpha)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cdot t^n) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}}$$

Vediamo se ci sono altre proprietà interessanti della $\mathcal{L}$-trasf.

Sarebbe bello se come per la trasformata di Fourier si fosse
$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

trasf * ass. trasf.

Se f è $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di converg. $= \rho^*$ e g è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza assoluta $= \rho_1$ allora $f*g$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho_2^* \leq \min[\rho^*, \rho_1]$ e vale $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$ $\forall s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}[s] > \max[\rho^*, \rho_1]$.

ass. trasf * ass. trasf.

Se f e g sono assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabili con ascissa di convergenza assoluta risp. ρ e ρ_1 allora $f*g$ ~~esso~~ è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di c. ass. $\rho_2 \leq \max[\rho, \rho_1]$ e vale

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}[s] > \max[\rho, \rho_1]$$

NB: Forti di quanto fatto finora voglio vedere se mi riesce:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \quad \text{con } f \ \mathcal{L}\text{-trasformabile.}$$
$$= \mathcal{L}(f * H) = \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(\mathcal{L}(H) = \frac{1}{s} \right)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau\right) = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{s} \int_s^{\infty} [\mathcal{L}(\sin t)](\sigma)\, d\sigma$$

ES:
$$\int_0^{+\infty} t^4 \sin 3t\, e^{-2t}\, dt$$

con gli integrali è dura

Vedo che è la $\mathcal{L}$-trasf di $t^4 \sin 3t$ calcolata in $s=2$

$= \left[\mathcal{L}(t^4 \sin 3t)\right]_{s=2}$

ooo

$\mathcal{L}(f') = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$ { Se f' è $\mathcal{L}$-trasf. bile lo è anche f }

f' $\mathcal{L}$-trasf. bile ($\Rightarrow$ f $\mathcal{L}$-trasf. bile)

f assolut. continua ($\Rightarrow$ f' integrabile)

$$\mathcal{L}(f'') = s\,\mathcal{L}(f') - f'(0) = s\left[s\mathcal{L}(f) - f(0)\right] - f'(0) =$$
$$= s^2\mathcal{L}(f) - s f(0) - f'(0)$$

Anche qua ho trasformato un operatore differenziale in uno polinomiale (un po' complicato).

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots -$$
$$- s^1 f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ooo

$y' + ky = f(t)$ Applico la $\mathcal{L}$-trasf. a entrambi i membri:

$\mathcal{L}(y') + k\,\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$ | pretendo una f $\mathcal{L}$-trasf. bile

$s\,\mathcal{L}(y) - y(0) + k\,\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$ | ottengo una soluzione che dipende dal metodo usato

$\mathcal{L}(y)(s+k) = \mathcal{L}(f) + y(0)$ (come per il problema di Cauchy: devo sapere chi è $y(0)$)

$$\mathcal{L}(y) = \underbrace{\frac{\mathcal{L}(f)}{s+k}}_{\text{Guardo meglio:}} + \underbrace{\frac{y(0)}{s+k}}_{\text{facile}}$$

questa è la trasf. di $\underset{\text{numero}}{y(0)} \cdot e^{-kt}$,

Guardo meglio:

$$\frac{\mathcal{L}(f)}{s+k} = \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{s+k} = \mathcal{L}(f * e^{-kt})$$ prodotto di convoluzione.

$$y = f * e^{-kt} + y(0)\,e^{-kt}$$

Dove $f * e^{-kt}$ è l'integrale particolare della eq. diff. e $y(0)\,e^{-kt}$ è una soluz. partic. dell'eq. omogenea assoc.

Ho ottenuto quindi un integrale generale.

Per quanto riguarda le eq. diff LINEARI non ho grandi vantaggi rispetto ai metodi dell'AN. 2.

Il vantaggio ce l'ho su eq. diff. + complesse.

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda}\left[\mathcal{L}(f)\right]\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$ si ottiene scrivendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(\lambda t)\, dt$$

Finora abbiamo visto trasformate di Laplace lineari, cioè tali che

$$\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{L}(f_1) + \beta \mathcal{L}(f_2)$$

Vediamo questa:

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t}\right)$$ Questa funzione ha uno zero del primo ordine per $t=0$ ed in un intorno di tale punto è limitata $\Rightarrow$ è trasformabile LOCALMENTE e quindi posso scrivere:

$$\int_s^{\infty} \left[\mathcal{L}(e^{\alpha t} - e^{\beta t})\right](\sigma)\, d\sigma = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\alpha} - \frac{1}{\sigma-\beta}\right) d\sigma =$$

questo lo posso scrivere perché tutto funziona come nei reali. Dato che $\lg(f)$ è una funzione plurivoca, come al solito prendiamo il ramo principale.

$$= \left[\lg \frac{\sigma-\alpha}{\sigma-\beta}\right]_s^{\infty}$$

Dunque:

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t}\right) = \lg \frac{s-\alpha}{s-\beta}$$

un'altra formula comoda la si ha quando la f è periodica con periodo T (ed è $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$) è:

$$\cdot\ \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$ Si ricava così:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \sum_0^{\infty}{}_n \int_0^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt = \{u = t - nT\}$$

$$= \sum_0^{\infty}{}_n \int_0^T e^{-s(u+nT)} \cdot f(u+nT)\, du = \sum_0^{\infty}{}_n \int_0^{T} e^{-s(u+nT)} f(u)\, du =$$

la f è periodica

$$= \sum_0^{\infty}{}_n e^{-snT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)\, du = \sum_0^{\infty}{}_n (e^{-st})^{u} \left(\int_0^T e^{-su} f(u)\, du\right)$$

la serie è geometrica e converge a $\frac{1}{1-e^{-st}}$ e dunque:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} f(u)\, du$$ questo vale solo per $|e^{-sT}| < 1 \Rightarrow$

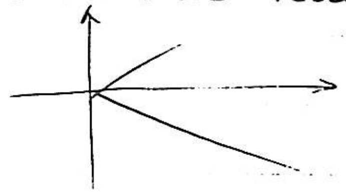
$\Rightarrow e^{-Re[s]\cdot T} < 1 \Rightarrow Re[s] > 0$. Vediamo ora alcuni teoremi:

Teorema: f localmente assolutamente continua, f' $\mathcal{L}$-trasformabile con $p^* < 0$, $\exists \lim_{t\to+\infty} f(t) < +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{\substack{s\to 0\\ s\in A}} s\left[\mathcal{L}(f)\right](s)$$

Di tale teorema sono interessanti dei casi limite:

$p^*=0$



Questo viene detto teorema del VALORE FINALE.

Teorema: f localmente assolutamente continua, f' $\mathcal{L}$-trasformabile, $\exists \lim_{t\to 0^+} f(t) < +\infty$

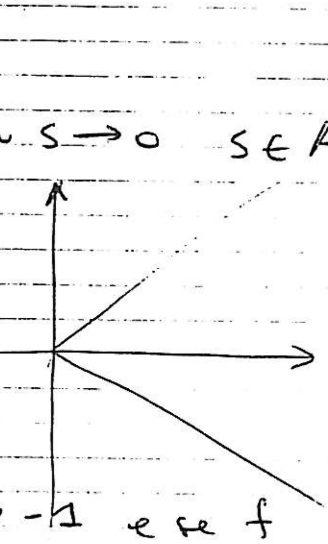
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{\substack{s\to\infty\\ s\in A}} s\left[\mathcal{L}(f)\right](s)$$

Detto teorema del VALORE INIZIALE ~~FINALE~~

Consideriamo $f(t) \underset{\text{(asintotico)}}{\sim} k t^{\alpha}$ per $t\to\infty$

$$\mathcal{L}(f) \sim k\,\mathcal{L}(t^{\alpha}) = k\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right] \text{ per } s\to 0 \quad s\in A$$

questo vale nel semipiano positivo.



Se invece $f(t) \sim k t^{\alpha}$ $t\to 0^+$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f) \sim k\,\mathcal{L}(t^{\alpha}) = k\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right]$$

con $s\to\infty$ $s\in A$

Queste ultime valgono solo se $Re[\alpha] > -1$ e se f è localmente sommabile.

ooo

Avevamo scritto:

$$\mathcal{L}(f') = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'') = s\,\mathcal{L}(f') - f'(0) = s\left[s\mathcal{L}(f) - f(0)\right] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - s f(0) - f'(0)$$

Risolviamo ora una eq. differenziale del 2do ordine:

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad y(0) = y_0$$
$$y'(0) = y_1$$

$f(t)$ deve essere $\mathcal{L}$-trasformabile.

$$a\left(s^2 \mathcal{L}(y) - s y_0 - y_1\right) + b\left(s\mathcal{L}(y) - y_0\right) + c\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}$$

Raccogliendo:

$$\mathcal{L}(y) = \left[as^2 + bs + c\right] = \mathcal{L}(f) + asy_0 + ay_1 + by_0$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\mathcal{L}(f)}{as^2 + bs + c} + \frac{(ay_0)s + (ay_1 + by_0)}{as^2 + bs + c}$$

Scomponendo il polinomio in fratti semplici:

$$\frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{A}{s - \alpha_1} + \frac{B}{s - \alpha_2}$$

si riconosce che questo lo posso scrivere come somma di due esponenziali; dunque il primo termine dell'equazione lo posso scrivere:

$$\frac{\mathcal{L}(f)}{as^2 + bs + c} = \mathcal{L}\left(f * \left[A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}\right]\right)$$

Ragionando in maniera analoga per il secondo termine:

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(f * \left[A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}\right]\right) + \mathcal{L}\left(Ce^{\alpha_1 t} + De^{\alpha_2 t}\right)$$

Nel caso $\alpha_1 = \alpha_2$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(f * \left[A e^{\alpha_1 t} + Bt e^{\alpha_2 t}\right]\right) + \mathcal{L}\left(Ce^{\alpha_1 t} + Dte^{\alpha_2}\right)$$

Vediamo dove i dati influiscono sulla soluzione: y_0 e y_1 influiscono sul secondo pezzo della soluzione che corrisponde alla soluzione dell'equazione omogenea. Se mi occupo solo dell'equazione omogenea, ovviamente trovo solo quest'ultimo pezzo

Data una funzione f e la sua trasformata

$$\mathcal{L}(f) = g(s)$$

si dice antitrasformata di g(s) la funzione f tale che:

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = g(s)}$$

Teorema di Lerch,

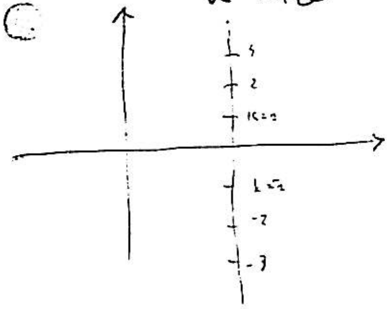
- Teorema di LORCH

Garantisce $\exists$ ed è unico l'antitrasf. di $\mathcal{L}(f)=0$ *

Vediamo ora una funzione che mi dà l'antitrasf. di Laplace:

$$\left.\begin{matrix} f(t) \\ \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\, \text{v.p.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\left[\mathcal{L}(f)\right](s)\, ds$$

Faccio l'integrale su un cammino complesso: è come se facessi: $\lim_{k\to+\infty} \int_{x-ik}^{x+ik} \ldots\ldots$ questo per spiegare gli $x \pm i\infty$



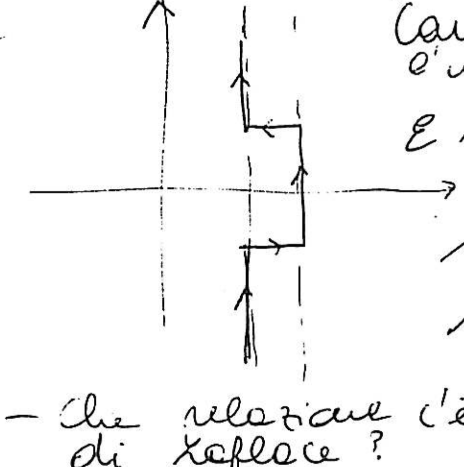
Il cammino è una retta verticale e l'integrale è fatto su intervalli simmetrici.

L'integrale mi verrà un immaginario puro. (Molt. per $\frac{1}{2\pi i}$ dove viene una roba reale).

Ma l'integrale dipende o no dalla retta?

La prima parte dell'int. NO (è costante). Per il resto vediamo:

Se invece di fare l'$\int$ sulla retta lo faccio così:



Cambia? NO f è olomorfa l'integrale non dipende dal cammino.

E se ora lo faccio su un'altra retta?

$\rightarrow$ Non varia: di fatto all'∞ ce ne sono 2 soli comuni a TUTTE LE RETTE: è come se facessi l'int. lungo 2 meridiani di una sfera [illegible] prendendo sempre ai poli.

- Che relazione c'è tra la trasf. di Fourier e quella di Laplace?

Prendo una f che vale 0 prima dell'origine:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = [\mathcal{F}(f)](\omega)$$

$$\mathcal{L}(f) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt = [\mathcal{L}(f)](s)$$

La $\mathcal{F}(f)$ è la restrizione di $\mathcal{L}(f)$ alla retta degli immaginari puri (per quelle $\mathcal{L}(f)$ che hanno ascissa di convergenza minore di zero).

Provo a scrivere $\mathcal{F}(f)$ a partire da $\mathcal{L}(f)$:
(f nulla prima di 0)

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt-iyt}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(f(t)\, e^{-xt}\right) e^{-iyt}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)\, e^{-xt}\right) e^{-iyt}\, dt$$

e questa è la trasformata di Fourier di $\left(f(t)e^{-xt}\right)$

La trasf. di Laplace è quindi una famiglia di trasf. di Fourier: x $\boxed{x=0}$ sono uguali.

Ma allora se $\exists$ la $\mathcal{L}$-trasf. esiste anche la $\mathcal{F}$-trasf.? Beh... se la f ha ascissa di conv. <0 SI.

E se $\exists$ la $\mathcal{F}$-trasf. posso estenderla alla $\mathcal{L}$-trasf.? Nessuno me lo garantisce.

- Vediamo come da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali a un sistema a derivate ordinarie.

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x} = ri + l\dfrac{di}{dt} & v(x,t) \\[2ex] -\dfrac{\partial i}{\partial x} = gv + c\dfrac{\partial v}{\partial t} & i(x,t) \end{cases}$$

(equazione del telegrafista: come viaggiano tensione e corrente lungo un filo)

Deriviamo parzialmente rispetto ad x la prima:

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\frac{\partial i}{\partial x} + l\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

e rispetto a t la seconda:

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = g\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

sono uguali (T. di Schwartz).

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\left[-gv - c\frac{\partial v}{\partial t}\right] + l\left[-g\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + lc\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (rc + lg)\frac{\partial v}{\partial t} + rgv = 0 \qquad (1)$$

Come per le coniche a seconda dei segni ordino le eq. diff. in ELLITTICHE, IPERBOLICHE / PARABOLICHE.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (rc + lg)\frac{\partial i}{\partial t} + rgi = 0 \qquad (2)$$

(uguale alla precedente con i al posto di v).

Il sistema sembra + complicato, ma è ora ben diviso per le varie variabili (che prima erano mischiate)

Ora cerco la trasf di Laplace delle due variabili:

$$V(x,s) = \mathcal{L}(v(x,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x,t)\,dt$$

$$I(x,s) = \mathcal{L}(i(x,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} i(x,t)\,dt$$

Ho considerato le funzioni solo di t con x fisso.

Poi vado a trasformare $\frac{\partial v}{\partial t}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = s\,\mathcal{L}(v(x,t)) - v(x,0)$$

la funz. calcolata in zero.

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = s\,\mathcal{L}(i(x,t)) - i(x,0)$$

Io conosco le condizioni iniziali (distribuzione di tensione e corrente lungo il filo all'istante zero) che sono funzioni.

Mi piacerebbe derivare $V(x,t)$ rispetto a x, ma non so se si può fare. Provo:

$$V'(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial v}{\partial x}\,dt = \mathcal{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

? Non so se si può derivare sotto il segno di $\int$

Analogamente per I:

$$I'(x,t) \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial i}{\partial x}\,dt = \mathcal{L}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = s\,\mathcal{L}(v(x,t)) - v(x,0) = s\,V(x,s) - v(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = s\,\mathcal{L}(i(x,t)) - i(x,0) = s\,I(x,s) - i(x,0)$$

Ora se sostituisco nel sistema, ottengo un nuovo sistema alle derivate ORDINARIE, che so risolvere (??!)
Ho fatto sparire, con questo metodo, le derivate parziali.

Ottengo un sistema del tipo:

$$\begin{matrix} V' & I & I \\ I' & V & V \end{matrix}$$

per mettere a posto le funzioni deriv (come ho fatto prima)

Ottengo un sistema di eq. diff. del 2do ordine alle derivate ordinarie.

Una volta risolto mi trovo, però, non con i, ma con I (la sua trasformata).

Devo antitrasformare (se mi riesce).

ooo

C'è una trasformazione adatta a trattare equazioni ALLE DIFFERENZE FINITE (che ho quando una funzione è discretizzata con campionamento o è definita su punti)?

Sì che c'è. Si chiama TRASFORMATA ZETA

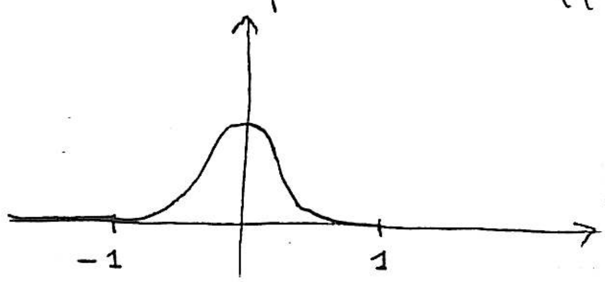
Questa fa il contrario di quello che fa la Ftrasf.: trasforma una funzione a valori discreti in una funzione continua.

ooo

DISTRIBUZIONE

Definiamo uno spazio $\mathcal{D}$: spazio delle funzioni C^∞ (in una variabile) ed a supporto COMPATTO. Non conosco nessuna funzione classica che sta in D.

Questa funzione $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$



Le funzioni che $\in$ a D si chiamano equazioni TEST.

Se V è uno spazio di funzioni, spazio vettoriale su un corpo k, si dice FUNZIONALE LINEARE su k una funzione lineare:

$$\boxed{T : V \longrightarrow k}$$

Mi manda dallo s.v. al corpo k (quello da cui pesco i coefficienti delle comb. lin.).

$\mathcal{D}$ è anche dotato di struttura di spazio topologico

(Struttura topologica: mi permette di istituire un concetto di VICINANZA).

Definisco le vicinanze tramite il concetto di limite.

— Una successione di funzioni test $\{\varphi_k\}$ si dice convergente in $\mathcal{D}$ se:

1) Tutte le $\{\varphi_n\}$ hanno supporto compatto nello stesso compatto.

2) Le $\{\varphi_n\}$ e tutte le loro derivate (di tutti gli ordini) convergono uniformemente.

Un funzionale T si dice continuo su $\mathcal{D}$ se per ogni successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni di $\mathcal{D}$ convergente in $\mathcal{D}$ a φ è:

$$T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$$

Un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}$ si chiama DISTRIBUZIONE.

Le distribuzioni costituiscono uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) indicato con $\mathcal{D}'$ e detto spazio DUALE di $\mathcal{D}$.

• Tutte le funzioni di L_{loc} generano un funzionale continuo.

Sia $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ allora il funzionale T_f così definito

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

$\mathbb{R}$ ← è fittizio, si fa nel supporto di φ

è una distribuzione.

Per $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}$ si ha:

$$T_f(\varphi_n) = \int_E f(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad T_f(\varphi) = \int_E f(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\left| T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi) \right| = \left| \int_E f(x) \left[\varphi_n(x) - \varphi(x) \right] dx \right| \to 0$$

dunque il funzionale così definito è veramente continuo.

$T(\varphi_k)$ notazione equivalente: $\langle T, \varphi \rangle$ (T applicato a φ)

$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$

Ci sono funzionali che non sono associati a nessuna funzione.
Eccone uno:

$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ è lineare? $\langle \delta, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = (\varphi_1 + \varphi_2)(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)$ (sì)

$\varphi_n \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}} \varphi$ è continuo?

$\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ (sì)

δ è quindi un funzionale lineare e continuo $\Rightarrow$ è una distribuzione. E si può dimostrare che $\nexists$ nessuna funzione associata tramite l'integrale $T_f = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx$.

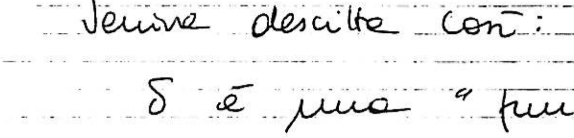
Tutta sta roba fu codificata da Laurent Schwartz.
Veniva descritta con:

δ è una "funzione" che si comporta con:

$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ (che sarebbe un controsenso).

Veniva comunque già usata dai primi anni del secolo (per merito di Giorgi).

δ è stata ben codificata da Paul Adrien Dirac (1926).
Come faccio a fare valere 1 un $\int$ di una funzione che è zero quasi ovunque? Almeno vediamo:
l'idea è di farla valere ∞ sullo zero:



Prendiamo queste funz. e le normalizziamo con una costante h in maniera che l'integrale faccia 1 (fattore h di normalizzazione).

$$\begin{cases} h e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Le restringo in maniera che l'integrale resti sempre 1: la funzione si "alzerà" a $+\infty$: il limite dell'integrale lo confondo con l'integrale del limite (che è la funzione di Dirac)

Prendo un nuovo T in modo che: $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0)$
Che sia continuo lo dimostro ora (lineare è banale).

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \qquad \langle T, \varphi_n \rangle = \varphi_n'(0) \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} \varphi'(0) = \langle T, \varphi \rangle$

Per la convergenza delle derivate

E quindi è continuo e lineare $\Rightarrow$ è una distribuzione.

Definizione di derivata di una distribuzione

- Si dice derivata T' di una distribuzione T il funzionale così definito:

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$ Mi farebbe comodo che

$T_{f'} = (T_f)'$: potrei così confondere il T' con la f' e sarei capace di calcolarlo in quanto:

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

ma questo è un pezzo dell'integrazione per parti: infatti

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = \Big[\varphi(x) f(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$\langle T_{f'}, \varphi \rangle$; $\Big[\varphi(x) f(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}$ = zero (φ a supp. compatto) ; $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \langle (T_f)', \varphi \rangle$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle \longrightarrow \boxed{\text{sono riuscito a collegarli}} \longrightarrow \langle (T_f)', \varphi \rangle$$

con le distribuzioni "vecchio stampo", cioè T_f con f usuale funzione valgono le solite regole di derivazione. E con quelle distrib. che non mi arrivano da un T_f?

Es: δ $\quad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

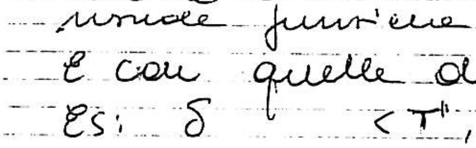
Questo rende derivabili funzioni che derivabili non erano in An. I e II.

Prendiamo ad es. la f. Heaviside: $H(x)$:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\Big[\varphi(x)\Big]_0^{+\infty} = \varphi(0) =$$

$= \langle \delta, \varphi \rangle$ e quindi la derivata nel senso delle distribuzioni della H dà come risultato la δ



$$\langle (T_{H(d)})', \varphi \rangle = -\langle T_{H(d)}, \varphi' \rangle =$$

$$= -\int_d^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\Big[\varphi(x)\Big]_d^{+\infty} = \varphi(d)$$

$$\langle \delta\, T_{H(d)}, \varphi \rangle = \varphi(d)$$

Altra funzione non derivabile:

$$f(x) = |x|$$

$$\langle (T_{|x|})', \varphi \rangle = -\langle T_{|x|}, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x)\, dx =$$

$$= + \int_{-\infty}^{0} + x \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x)\, dx = \text{p.p.} =$$

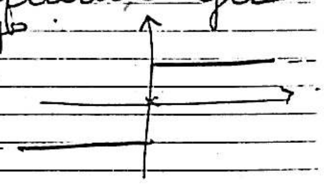
$$= \Big\{ \underbrace{[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx \Big\} - \Big\{ \underbrace{[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{0} \varphi(x)\, dx \Big\} =$$

(supp. comp.: x 0 per la x, x ∞ per la φ)

$$\ldots = - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx}_{\text{è la distribuzione di Heaviside appl. a } \varphi} = -\langle H_-, \varphi \rangle + \langle H, \varphi \rangle =$$

= (per la linearità delle distribuzioni) $= \langle H - H_-, \varphi \rangle$

e me lo sarei dovuto aspettare (?!!) in quanto graficando la derivata usuale di $|x|$ ottengo:



La derivata n-esima di T:

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

La derivata n-esima di δ

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

ooo

Io conosco (!) le T_f quando $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ e so che $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$

Notoriamente $\frac{1}{x} \notin L_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi l' $\int_{-\infty}^{+\infty}$ non $\exists$, MA

MA esiste il v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

e quindi dico che $\exists$ v.p. $\frac{1}{x}$ ed esso è quel funzionale

$$\langle \text{v.p.} \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

Prodotto tra $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$

Definisco questo funzionale (osservando come fa sulle φ):

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$ al 2° membro ho scritto una cosa che c'è???

$$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle \overset{\text{derivate}}{=} - \langle \alpha T, \varphi' \rangle \overset{\text{appena sopra}}{=} - \langle T, \alpha\varphi' \rangle$$

Dimostro che $\langle \alpha' T + \alpha T', \varphi \rangle = - \langle T, \alpha \varphi' \rangle$ come prima

$$\langle \alpha' T + \alpha T', \varphi \rangle = \langle \alpha' T, \varphi \rangle + \langle \alpha T', \varphi \rangle =$$

$$= \langle T, \alpha'\varphi \rangle + \langle T', \alpha\varphi \rangle = \langle T, \alpha'\varphi \rangle - \langle T, \underbrace{(\alpha\varphi)'}_{\text{son funzioni}} \rangle =$$

$$= \langle T, \alpha'\varphi \rangle - \langle T, (\alpha'\varphi + \alpha\varphi') \rangle = \cancel{\langle T, \alpha'\varphi \rangle} - \cancel{\langle T, \alpha'\varphi \rangle} -$$

$$\boxed{- \langle T, \alpha\varphi' \rangle}$$ guardacaso....

__Nullo__ di una distribuzione:

Si dice che la distribuzione T è nullo su un aperto A se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $\{\text{supporto } \varphi\} \subset A$ vale:

$$\langle T, \varphi \rangle = 0$$

$A \subset \mathbb{R}$

Si dice INSIEME NULLO di una distrib. T l'unione degli aperti su cui T è nulla.

Si dice SUPPORTO di una distribuzione T il complementare del suo insieme nullo. ($\Rightarrow$ è sempre un chiuso).

Vediamo se ci sono spazi (più grandi di $\mathcal{D}$) i cui duali siano contenuti nel duale di $\mathcal{D}$

spazio $\mathcal{E}$ = funz. C^∞ con le derivate che convergono uniformemente su ogni compatto.

Vado a vedere chi è il duale di $\mathcal{E}$:

Si dimostra che $\mathcal{E}'$ è lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \qquad \mathcal{D}' \supset \mathcal{E}'$$

(la δ sta in $\mathcal{E}'$ in quanto il suo supp. è un punto solo $\Rightarrow$ comp.)

$\mathcal{D}_-$ funzioni C^∞ con supporto limitato a destra. *

$\longrightarrow \to$ Stabilisco la convergenza:

con le derivate che convergono uniformemente su ogni sottoinsieme della semiretta limitato a destra.

$(\mathcal{D}_-)'$ = si dimostra che è lo spazio delle distribuzioni a supporto limitato a sinistra.

$\mathcal{E}' \subset (\mathcal{D}_-)'$

Altro spazio, altro giro!

$\mathcal{S}$ funz. C^∞ a decrescenza rapida, cioè tali che $\forall l, \forall m$

$$|x|^l \frac{d^{(m)}\varphi}{dx^m} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

non valgono zero al di fuori di un compatto, ma valgono pochissimo!

Si dimostra che $\mathcal{S}'$ è uno spazio di distribuzioni

$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ $\mathcal{S}'$ si chiama spazio delle distribuzioni TEMPERATE

T_f con f polinomio è una distrib. temperata!

es: $f = x^2+1$ è associato a una distrib temperata? sì

es. $\int_{\mathbb{R}} (x^2+1)e^{-x^2}\,dx < +\infty$ l'integrale c'è sempre.

Anche qua funziona la δ che quindi $\in \mathcal{S}'$

$\delta \in \mathcal{D}'$

$\delta \in \mathcal{S}'$

$\delta \in \mathcal{E}'$

$\delta \in (\mathcal{D}_-)'$

Lavorerò quasi esclusivamente con distribuzioni temperate.

contiene tutte le funz. a supp. compatto etc.

contiene tutte le distrib. di tutte le funz di L

Esercizietti:

- È vero $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$? Subito direi che non sono neanche confrontabili. Poi penso che abbiamo confuso le $f \in L_{loc}$ con le T_f (ricordo che $\langle T_f, \varphi \rangle$ e $\langle f, \varphi \rangle$ sono lo stesso). Una volta fatta questa identificazione allora l'~~uguaglianza~~ è vero.

- Se f è una funzione uniformemente continua su $\mathbb{R}$, esiste sempre la distribuzione associata T_f?

Sì perché essendo unif. continua è sicuramente $L_{loc}(\mathbb{R})$

– La δ di Dirac è un funzionale continuo su $\mathcal{D}$: è continuo anche su $\mathcal{E}$?

Certo. La $\delta \in \mathcal{E}'$ $\Rightarrow$ è un funzionale continuo su $\mathcal{E}$.

– La δ è una distribuzione temperata?

Si. Perché essa è un funzionale lin. cont. anche su $\mathcal{S}$. $\delta \in \mathcal{S}'$.

– Si dia la definizione di insieme nullo di una distrib.

– In quale problema differenziale si trasformerebbe, derivandola, la seguente equazione integrale?

$$y(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau + e^t \qquad \text{derivando:}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = y(t) + e^t - \cancel{y(0)} \end{cases} \qquad \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t y(\tau)\,d\tau = y(t) \right\}$$

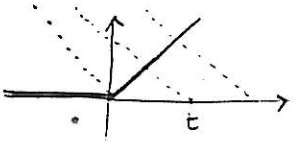
– Si risolva supponendo valido il metodo della trasformata di Laplace:

$$y' = \int_0^x y(t)\,dt \quad ; \quad y(0) = -2$$

$$\mathcal{L}(y') = s\,\mathcal{L}(y) - y(0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(y) \quad ; \quad \mathcal{L}(y)\left[s - \frac{1}{s}\right] = -2$$

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{2}{s - \frac{1}{s}} = -\frac{2s}{s^2 - 1} \quad ; \quad y = -2\cosh t$$

– Si calcoli in $\mathbb{R}_0^+$ il prodotto di convoluzione $t * t$



$$h(t) = t * t = \int_0^t \tau(t-\tau)\,d\tau = \left[t\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t - \left[\frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{6} \quad (t \geq 0)$$

$$\{\ldots = 0 \quad (t<0)\}$$

– Si dia un esempio di funzione non integrabile su $\mathbb{R}$, ma dotata di v.p.

Subito: $\frac{1}{x}$

– Si calcoli $\mathcal{L}\left(\int_0^{2t} \operatorname{sen}(u)\,du\right)$ calcolo dapprima $\mathcal{L}\left(\int_0^t \operatorname{sen} u\,du\right)$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}(\operatorname{sen} u) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} \quad (\rho = 0) \quad ; \quad \mathcal{L}(f(2t)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s/2}\cdot\frac{1}{(s/2)^2+1} = \ldots$$

- Si verifichi il teorema del valore finale per la funzione $f(t) = e^{-t}$.

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \qquad \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A}} s\mathcal{L}(f) = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A}} \frac{s}{s+1} = 0$$

ooo

$$\langle \alpha \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha \varphi \rangle = \alpha(0)\varphi(0)$$

$\langle x^n \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x^n \varphi \rangle = 0$ è la distribuzione nulla.

Questo è un prodotto che non rispetta la legge dell'annullamento del prodotto.

$$\langle e^x \delta, \varphi \rangle = 1 \cdot \varphi(0) = \varphi(0)$$

Su $\mathcal{D}'$ posso istituire una convergenza?

Una successione $\{T_n\}$ si dice convergente alla distribuz. T se $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ è $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

Teorema di completezza di $\mathcal{D}'$:

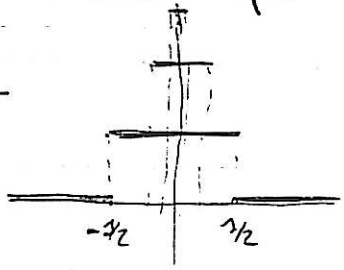
Il funzionale $F(\varphi)$ costruito come insieme dei valori $\lim_{n \to \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ è un funzionale lineare e continuo in $\mathcal{D}$.

Teorema di DENSITA': (MOLTO IMPORTANTE).

Ogni elemento $T \in \mathcal{D}'$ è limite (in $\mathcal{D}'$) di una successione di elementi di $\mathcal{D}$.

Tale teorema dice che ogni distribuzione di $\mathcal{D}$ la posso approssimare con delle funzioni C^∞

Consideriamo
$$f_n(x) = \begin{cases} n & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$$



$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n\,\varphi(x)\,dx =$$

applico il T. della media (la base è lunga $\frac{1}{n}$)

$$= \frac{n}{n}\varphi(\xi) \longrightarrow \varphi(0) \quad \text{dovendo } -\frac{1}{2n} < \xi < \frac{1}{2n}$$

$\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ per il t. dei carabinieri.

Attenzione però: se invece di $f_n(x) = n$ avessi $\ldots = n^2$ le cose cambierebbero di molto.

- Altro esempio: $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(nx)\,\varphi(x)\,dx$$

Prodotto di convoluzione tra distribuzioni

$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle$

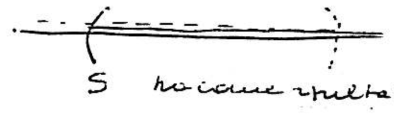
φ è una particolare funzione di 2 variabili in cui essa agisce S_y che però influisce solo sulla y

Lo definiamo tra le distribuzioni a supporto compatto;

→ Esso esiste sempre:

1) Se T ed S hanno supporto compatto

2) Se T ed S hanno supporto nella stessa semiretta.



e quindi esce un compatto.

Il prodotto di conv. tra dist. è commutativo

$S * T = T * S$

è anche associativo:

$T_1 * (T_2 * (T_3 * (\ldots\ldots * T_n))\ldots) = ((T_1 * T_2) * T_3) * \ldots\ldots * T_n\ldots)$

- Se $f, g \in L(\mathbb{R})$ $\exists$ q.o. $h(t) = (f*g)(t)$

$T_f * T_g = T_{f*g}$ per definire il funzionale come sempre guardo cosa fa nelle funz.

$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle (T_f)_x, \langle (T_g)_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle =$

$= \langle (T_f)_x, \int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(x+y)\,dy \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(x+y)\,dy \right) dx =$

$=$ (trucco del T. di Fubini) $=$ (posto $x+y = t$) $=$

$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{g(y) f(t-y)\, \varphi(t)\, dy}\, dt = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle$

$g(\tau) f(t-\tau)\,d\tau \equiv$ il prodotto di convoluzione nelle F.

- Andiamo a vedere cosa fa $\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle T * \delta, \varphi \rangle =$
$= \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle =$ ~~...~~ $\langle T_x, \varphi(x+0) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

δ è allora l'unità di questo prodotto. Ma allora forse le distrib. possono ~~dare~~ formare un'algebra.

Impropriamente, fisici e ingegneri usano una notazione scorretta (sfruttando la confusione di δ come funzione):

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-t) f(t)\,dt = f(x) \quad \text{cioè} \quad \delta * T_f = T_f$$

DERIVATA del p.d.c. di distrib.

- Se $f, g \in L(\mathbb{R})$ $\exists$ q.o. $h(t) = (f*g)(t)$

$\langle (T*S)', \varphi \rangle = -\langle T*S, \varphi' \rangle$ ho scaricato la derivata.

$= -\langle T_x, \langle S_y, \varphi'(x+y) \rangle\rangle =$ (applico la derivazione a ritroso) $= \langle T_x, \langle S'_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle =$ (derivare risp. a $(x+y)$ è lo stesso che deriv. risp. a x,

$= \langle T*S', \varphi \rangle$

- Vediamo un caso particolare:

$T' = \delta * T' = T * \delta'$

$(f*g)' = (T_{f*g})' = (T_f * T_g)' = f' * g$

e quindi ho reso banale un problema che prima era complicato.

- E se prendiamo un operatore differenziale:

$DT = a_0 T^{(n)} + a_1 T^{(n-1)} + \dots + a_n T =$ (scaricando la derivata su δ)

$= \left(a_0 \delta^{(n)} + a_1 \delta^{(n-1)} + \dots + a_n \right) * T$

$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \langle \delta_{(a)}, \varphi \rangle = \varphi(a)$ traslata della δ

- Si dice TRASLATA (della quantità a) della distribuzione la distribuzione $T_{(a)}$ così definita:

$$\langle T_{(a)}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x+a) \rangle$$

Vediamo se riesco ad esprimerla in maniera comoda:

$\langle T_{(a)} * \delta, \varphi \rangle = \langle \delta * T_{(a)}, \varphi \rangle = \langle \delta_x, \langle T_{(a)y}, \varphi(x+y) \rangle\rangle$

$= \langle \delta_x, \langle T_y, \underbrace{\varphi(x+y+a)}_{\text{la guardo come funzione di } x+a \text{ (risp. a } x\text{, è } \delta_x)} \rangle\rangle = \langle \delta_{(a)x}, \langle T_y, \varphi(y+x) \rangle\rangle =$

$= \langle \delta_{(a)} * T, \varphi \rangle =$ Ho imparato che traslare la T o traslare la δ è lo stesso.

$= (T * \delta)_{(a)}$

$(T*S)_{(d)} = T_{(d)} * S = T * S_{(d)}$ (Con come per la derivata).

Teorema: se $\alpha \in C^\infty$, $T \in \mathcal{D}'$, allora
$T * \alpha$ (se esiste) è una distribuzione associata ad una funzione $\gamma(x) \in C^\infty$ ed è:
$$\gamma(x) = (T * \alpha)(x) = \langle T_y, \alpha(x-y) \rangle$$

$\alpha \in C^\infty \Rightarrow$ sicuramente $L_{loc} \Rightarrow$ ad essa è sempre associata una distribuzione.

$\alpha * T$ si dice $\boxed{\text{regolarizzata}}$ della T tramite α.

Riesco a trasformare una cosa a casaccio convolvendola con una bellissima (C^∞) ottenendo una cosa bellissima (C^∞): si mantengono i pregi.

Teorema

se $T_i \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}'} T$ allora $T_i' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

Teorema

se $T_i \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}'} T$, $S_i \xrightarrow{\mathcal{D}'} S$ allora
$(T_i * S_i) \xrightarrow{\mathcal{D}'} (T * S)$

$T = T * \delta$

Se trovo una successione di distribuzioni $S_i \longrightarrow \delta$ allora $T * S_i \longrightarrow T * \delta = T$

Se voglio approssimare T basta che trovi una successione di distrib. che tende a δ e ancor di più rifacendomi ad un f. precedente basta che trovi una succ. che tende alla distrib. associata ad una $f \in C^\infty$.

Se α_n è una successione di funzioni C^∞ che tende in $\mathcal{D}'$ a δ, la succ. $\alpha * T$ è una succ. di funzioni C^∞ che tende in $\mathcal{D}'$ a T e si dice successione regolarizzante di T

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad f \in L(\mathbb{R})$$

$$\langle T_{\mathcal{F}(f)}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \varphi \rangle = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f) \cdot \varphi(x)\, dx} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right) \cdot \varphi(\omega)\, d\omega$$

$$\dots = \int_{\mathbb{R}} f(t) \Bigg(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega}_{\mathcal{F}(\varphi)} \Bigg) dt = \text{(applico il T. di Fubini}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathcal{F}(\varphi)\, dt = \underbrace{\langle f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle}$$

Scrivendo questo ho imbrogliato: nessuno mi garantisce che $\mathcal{F}(\varphi)$ è un elemento di $\mathcal{D}$

Ho trovato però l'interessante risultato:

$$\langle \mathcal{F}(\varphi), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

Sia T una distribuzione temperata, si dice sua trasformata di Fourier la distribuzione così definita

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

la quale risulta temperata anch'essa.

- Se T è a supporto compatto la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}(T)$ risulta associata ad una funzione C^∞ che è la restrizione ai reali di una funzione olomorfa e tale

$$\mathcal{F}(T) = V(\omega) = \langle T, e^{-i\omega t} \rangle$$