Metodi Matematici

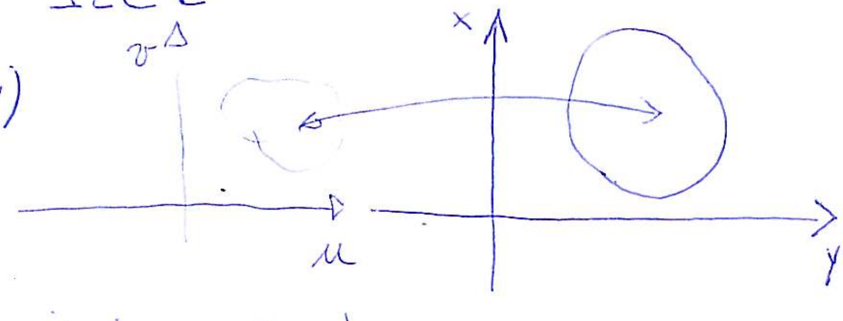
Funzione di variabile complessa

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{C}$

$z = x + iy \to (x, y)$

$W = f(z)$

$w = u + iv$



Per ipotesi Ω è un insieme aperto e connesso, dove per aperto si intende che per ogni punto può esserci un incremento delle variabili in tutte le direzioni, ciò ovviamente non avviene nei punti di frontiera, (qui non ci sono).

Connesso è quell'insieme percui presi due qualsiasi punti di Ω è sempre possibile unirli con una poligonale totalmente appartenente all'insieme.

Il concetto non si può dire che sia uguale al concetto di convesso, anzi è facile dimostrare che insiemi non convessi sono connessi.

- Gli insiemi aperti e connessi vengono chiamati regioni.

Noi parleremo sempre di funzioni definite in regioni.

Derivata di funzione di numeri complessi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$ come in campo reale

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \text{numero} = \ell = f'(z_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \right| < \varepsilon$$

$u(x,y) \qquad u_x(x_0, y_0)$

$$\lim_{h \to \infty} \frac{(u\, x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = u_x(x_0, y_0)$$ h = reale.

Per le funzioni di una variabile reale valeva la definizione di funzione differenziabile:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

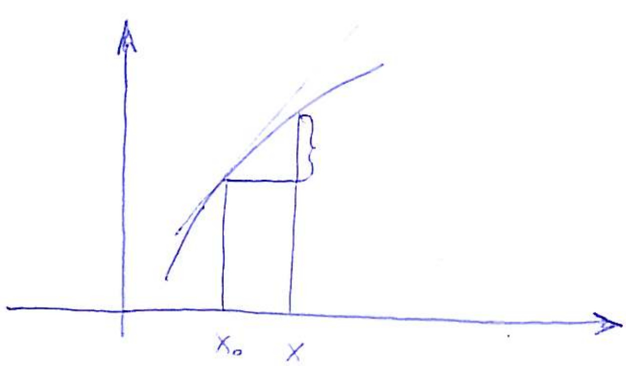
È diff $g(x) - g(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) = \alpha(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\alpha(x)(x - x_0)}$$

è un infinitesimo di ordine superiore. lo pongo uguale a $\omega(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0$$



per le funzioni reali di due variabili vale:

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + \omega(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\omega(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Se la funzione è differenziabile in un punto allora esistono le derivate parziali e il piano tangente (quello che approssima meglio la curva nel punto).

Il concetto di differenziabilità per le funz. di var. reali è una definizione debole, cioè il fatto che esistano le derivate parziali <u>non</u> significa che sia differenziabile.
Non è vero per le funzione di variabile complessa, cioè la derivata

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \omega(z)$$

è un concetto forte

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\omega(z)}{z-z_0} = 0$$

$$f(z) - f(z_0) = B(z-z_0) + \omega(z)$$

$$B = f'(z_0)$$

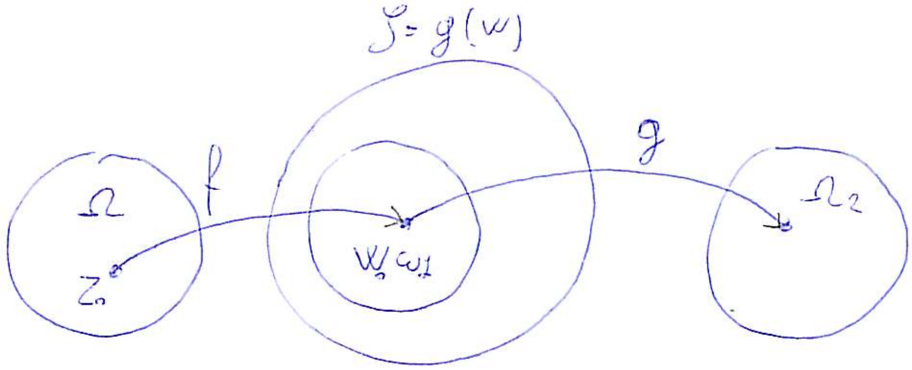
* Una funzione derivabile ovunque in una regione si dice olomorfa.

N.b. ci sarebbe da dire "se la derivata è continua", ma non serve perché se una derivata esiste essa <u>è continua</u>

Valgono le stesse regole di derivazione delle funzioni di var. reale.

Vale anche la regola di derivazione di funzione composta.

$W = f(z)$



$$\zeta = g(f(z)) = F(z)$$

$$F'(z_0) = g'(w_0)\, f'(z_0)$$

~ ∘ ~ ∘ — ∘ — ∘ — ∘ — ∘ — ∘ — ∘ ~

$\exists\, f'(z_0)$

$f(z) = u(x,y) + v(x,y)$

n.b. u e v sono differenziabili, cioè non solo esistono le derivate parziali, ma esiste anche il piano tangente.

$z_0 = x_0 + i y_0$

$u'_x(x_0, y_0) \qquad u'_y(x_0, y_0)$

$v'_x(x_0, y_0) \qquad v'_y(x_0, y_0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y) \end{array}}$$

Equazioni di Cauchy Riemann

condizioni di monogeneità

$\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$$f'(z_0) = A + iB = u'_x(x_0, y_0) + i\, v'_x(x_0, y_0)$$

Se la funzione è differenziabile in un punto, u e v sono differenziabili in quel punto e quindi soddisfano le equazioni di Cauchy Rieman

Ricordiamo

che le funzioni trigonometriche sono definite considerando la corrispondente serie.
anche gli esponenziali:
es.:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ cioè differenziabile ovunque.

$$sh\, z = sh(x+iy) = sh\,x\, ch(iy) + ch\,x\, sh(iy)$$ formule di addizione del seno.

$sen(\theta+\beta) = sen\,\theta \cos\beta + \cos\theta\, sen\beta$

$$ch(iy) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

$$sh(iy) = \frac{e^{iy} - e^{iy}}{2} = i\, sen\, y$$

Esprimo un legame tra le funzioni trigonometriche di variabile complessa e le funzioni trigonometriche di variabile reale.
Questo legame è dato dall'applicazione iperbolica e dal coefficente immaginario

$ch\, iy = \cos y$
$sh\, iy = i\, sen\, y$

$$sh\, z = sh(x+iy) = \underbrace{sh\,x \overset{ch\, iy = \cos y}{\cos y}}_{u} + \underbrace{i\, ch\,x \overset{sh\, iy = sin\, y}{sin\, y}}_{v}$$

$$u'_x = ch\,x \cos y \qquad u'_y = -sh\,x\, sin\, y$$
$$v'_x = sh\,x\, sin\, y \qquad v'_y = ch\,x \cos y$$

sono soddisfatte le condizioni di Cauchy Rieman.
"Quindi la f è olomorfa"

$$D\, sh\, z = ch\,x \cos y + i\, sh\,x\, sen\, y = ch\,x\, ch(iy) = ch(x+iy) = ch\, z$$

IMPORTANTE

Per la radice vale

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\theta + 2K\pi}{n} + i \,\text{sen}\, \frac{\theta + 2K\pi}{n}\right] \qquad K = 0, 1, 2 \ldots n-1}$$

Si vede che la funzione ha più rami uguali, al variare del parametro K.

Questi rami sono detti <u>determinazioni</u>.

Per la radice quadrata si ha:

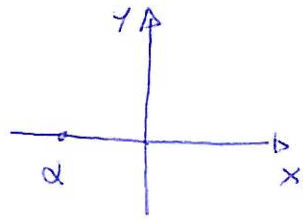
$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

ci sono due determinazioni

$$(\sqrt{z})_0 = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$ infatti si ha: $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot (\cos b + i\,\text{sen}\, b)$

$$-\pi \leq \theta < \pi$$

Non è vero che questa funzione è olomorfa nel piano $\mathbb{C}$ privato dello zero "Sbagliatissimo dire di sì".

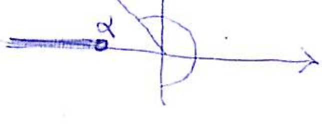


$$(\sqrt{\alpha})_0 = \sqrt{|\alpha|}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{|\alpha|}$$

Per essere continua deve valere $\lim_{z \to \alpha} (\sqrt{z})_0 = (\sqrt{\alpha})_0 = -i\sqrt{\alpha}$

ma ciò non è vero, infatti <u>sul semiasse negativo</u> la funzione è discontinua. (si vedano i due limiti).

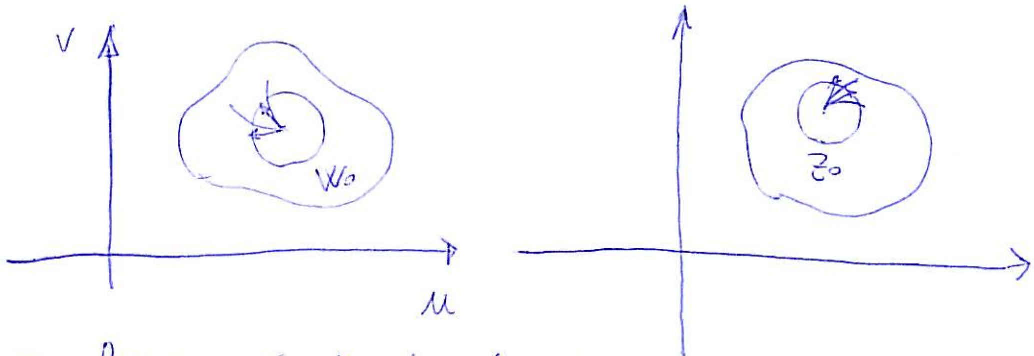
La funzione è quindi olomorfa in $\mathbb{C}$ privato del semiasse negativo reale.



anche il logaritmo è una funzione ad infiniti valori.

$$\boxed{\log z = \log|z| + i \arg z + 2k\pi i}$$

Posso associare un concetto di "olomorfo" solo ai suoi singoli rami e non alla funzione intera.
Sarà olomorfa in $\mathbb{C}$, ma non ovunque, bisognerà anche qui escludere una semiretta.



trasformazione conforme.

$W = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$

$$f'(z) \neq 0$$

Le equazioni di Cauchy Riemann associano una particolare trasformazione tra insiemi piani che è vera solo se la derivata prima è diversa da $\emptyset$.
Una trasformazione che è localmente biunivoca (ad un intorno nel dominio corrisponde ad un intorno nel codominio), e conserva gli angoli, si dice una trasformazione CONFORME cioè conserva gli angoli.

Un interessante esempio con i gradienti

$$(\text{grad } u)_{P=P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0)) \qquad u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$(\text{grad } v)_{P=P_0} = (v'_x(P_0), v'_y(P_0))$$ deve essere nullo il prodotto scalare

$$u'_x(P_0) v'_x(P_0) + u'_y(P_0) v'_y(P_0) = 0 \qquad - v'_x(P_0)\, u'_x(P_0)$$

scriviamo lo Jacobiano della trasformazione

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + v'^2_x = |f'(z)|^2 \neq 0$$

$f'(z)=0 \qquad w = e^z \qquad De^z = e^z \neq 0$

$z_1 \neq z_2 \Rightarrow e^{z_1} \neq e^{z_2}$

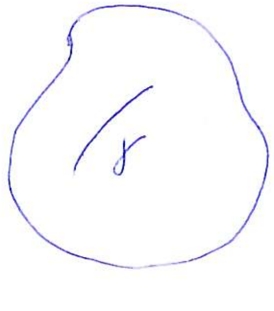
Se ciò è vero la trasformazione è conforme

Sabato 19/10/96

Concetto di integrale per una funzione estesa ad un arco di curva.

consideriamo $f(z)$ tale che:

$f(z)$ cont in Ω



$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

consideriamo anche il concetto di ARCO DI CURVA "secondo Jordan"

Esso si può esprimere con

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a \leq t \leq b \\ x, y \in C^0[a,b] \end{array}$$

1) c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo e i punti della curva
2) Deve esserci continuità della funzione e del segmento.

note:

L'arco di curva non è detto che sia finito e che abbia tangente.

n.b. se la curva è chiusa, la corrispondenza biunnivoca non è più valida solo per i punti estremi.

Si nota che la curva chiusa divide il piano in due regioni, una esterna ed una interna.

Le curve regolari sono quelle per cui

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} a \leq t \leq b \\ x, y \in C^1[a,b] \end{matrix}$$

cioè continue con la derivata prima.

La curva γ che considereremo è una curva regolare o al massimo una somma finita di archi di curva regolare dove negli attacchi può saltare la definizione di tangente.

definiamo: <u>raggio di curva</u>:

$z = x(t) + i\,y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leq t \leq b$ con t var reale e z è complesso.

dal punto di vista della derivabilità non si incontra alcun problema. cioè funziona di variabile reale a termini complessi

$$\begin{matrix} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r \operatorname{sen} t \end{matrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è la circonferenza

$z = z_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen}(t)) \qquad z = z_0 + r e^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

assumiamo come verso di percorrenza della curva quello dei valori crescenti di t.

L'integrale diventa:

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt$$

Se il verso di γ è discorde con i valori crescenti si devono invertire gli estremi

DA CUI

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy}_{\text{forma differenziale } 1} + i\underbrace{\int_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy}_{\text{forma differenziale } 2}$$

a titolo di promemoria può valere:

$$\boxed{f(z)\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy)}$$

con questo metodo si arriva facilmente all'integrale sovrastante (basta sviluppare il prodotto.

Dobbiamo definire come il modulo dell'integrale risulta uguale al modulo integrato.

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,ds$$

$$\int_a^b |f(z(t))| \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

Vediamo un paio di prime applicazioni.

ipotesi

$f(z)$ olomorfa in Ω semplicemente connesso (senza buchi cioe' quello tale che ogni poligonale chiusa e il bordo di un poligono tutto appartenente all'insieme). vale:

tesi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall \gamma \text{ chiusa} \quad \gamma \in \Omega$$

assomiglia al concetto di forma differenziale esatta la cui circuitazione è nulla.

n.b. ipotesi: semplic. connesso

riprendiamo per dimostrazione il teorema integrale.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dx \qquad \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Una forma differenziale si dice chiusa se si verifica.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-v)$$

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

$$X'_y = Y'_x$$

Se l'insieme é semplicemente connesso la forma differenziale é esatta.

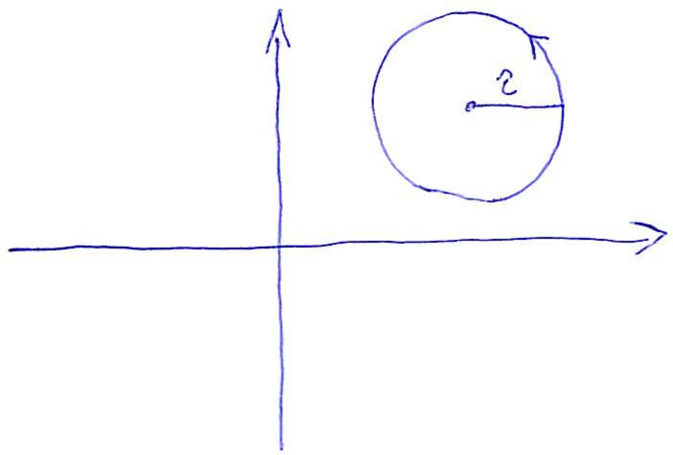
condizioni di cauchy Rieman.

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Le equazioni di Cauchy Rieman assicurano che le forme sono chiuse, ció implica indirettamente esatte.

Esempio

$$\int_C (z-z_0)^n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$



$z = z_0 + r e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$

L'integrale diventa:

$$= \int_0^{2\pi} (r e^{it})^n \, r e^{it} \, i \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{n+1} \, e^{i(n+1)t} \, dt$$

dove $(n+1)$ può essere zero o $\neq 0$

1° caso

$$\int_C (z-z_0)^n = \left[\frac{e^{i(n+1)}}{n+1} \right]_0^{2\pi} \qquad \text{se } (n+1) \neq 0$$

2° caso

$$\int_C (z-z_0)^i = \left[dt \right]_0^{2\pi} \qquad \text{se } n = -1 \text{ cioè } (n+1) = 0$$

In conclusione troviamo 0 per $n \neq -1$ e uguale a $2\pi i$ per $n \neq -1$.

Riflessioni

Olomorfa in $\mathbb{C}$ se $n \neq -1$, se $n = -1$ la funzione è olomorfa in $\mathbb{C}$ privato dell'origine, cioè l'insieme non è più semplicemente connesso.

La condizione sempl. conn. è sufficente ma non neccessaria, quindi possiamo continuare ad integrare.

$$\frac{1}{z-z_0} = D\log(z-z_0)$$

non é una fun. olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne nell'origine, ma bisogna togliere tutta la semiretta negativa.

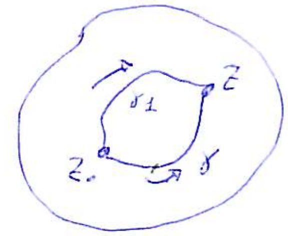
come $(z-z_0)$

$$\frac{1}{(z-z_0)^2} = D\,\frac{-1}{(z-z_0)}$$

Puó essere preso come dimostrazione del fatto che a volte l'integrale viene nullo e a volte non viene nullo.
Dipende da dove sono olomorfe le funzioni sovrastanti.

Una condizione sufficente per avere integrale nullo su γ chiuso é:

$f(z)$ olomorfa in un semplicemente connesso



in queste ipotesi: trovo la funzione integrale.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

la funzione diventa effettivamente una funzione ad un sol valore
n.b. non dipende dalla particolarre curva su cui si integra (é noto il non ordinamento dei complessi).

Si ritrova il teorema fondamentale del calcolo integrale. (ed é valido)

$$F'(z) = f(z)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad F'(x) = f(x)$$

a questo punto la situazione é la stesso degli integrali in $\mathbb{R}$, cioé una volta che si ha una primitiva, ce ne sono infinite altre che differiscono per una costante in Ω.

difatti

$$G'(z) = f(z) \qquad F'(z) = f(z)$$

N.B.

SIAMO NELLE IPOTESI DI Ω SEMPL. CONNESSO.

$$\frac{d}{dz}\left(G(z) - F(z)\right) = 0$$

$$G(z) - F(z) = \text{cost in } \Omega$$

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw + K \qquad G(z_0) = K$$

dove K è cost in Ω

Quindi riscriviamo il teorema fondamentale del calcolo integrale.

$$G(z) = G(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

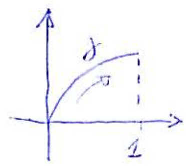
Esempio

Prendo una funzione continua non olomorfa (per dimostrare che non è più vero che l'integrale non dipende dal percorso se la funz non è sia continua che olomorfa).

es: $f(z) = |z|^2$ è continua in $\mathbb{C}$ ma non olomorfa.
Difatti quando c'è una cuspide perdiamo la derivabilità.

infatti $|z|^2 = x^2 + y^2$

mi scelgo l'arco di parabola $x = y^2$ $0 \le y \le 1$ orientato come



mi devo procurare le eq. parametriche della curva:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \qquad z = t^2 + it$$

allora devo usare la formula

$z = t^2 + it$
$z'(t) = 2t + i$

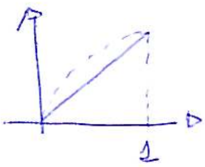
$$\int_\gamma |z|^2 dz = \int_0^1 \underbrace{(t^4 + t^2)}_{\text{difatti } |a| = \sqrt{x^2+y^2},\ \text{se } a = x+iy\ |a|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 =} \underbrace{(2t+i)}_{dz} = 2\int_0^1 t^5 dt + i\int_0^1 t^2 dt$$

svolgo il prodotto e poi integro.

si ottiene

$$= 2\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 + i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\,\frac{1}{6} + \frac{i}{3}$$

notare che è un numero complesso ottenuto da una funzione di var. reale, perciò non valgono le disequazioni.

consideriamo 

$y = x \quad 0 \leq x \leq 1$

le eq. parametriche del segmento sono

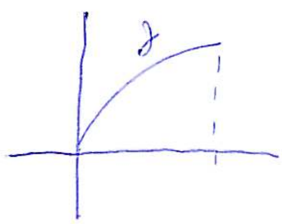
$$\begin{cases} x = t & 0 \leq t \leq 1 \\ y = t \end{cases}$$

$$\int_\gamma |z|^2 dz = \int_0^1 2t^2 (i+1)\, dt = 2\int_0^1 t^2 + 2i \int_0^1 t^2 = \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$$

N.B. abbiamo ottenuto due valori diversi, perciò abbiamo dimostrato che se la funzione non è sia continua che olomorfa in $\mathbb{C}$, in generale <u>non</u> vale che integrando lungo due curve diverse si ottiene lo stesso valore.

Facciamo un esempio dove siano verificate le ipotesi olomorfa e continua in $\mathbb{C}$.

$f(z) = z e^z$ olomorfa in $\mathbb{C}$ semplic. connesso



$\int_\gamma e^z z\, dz =$ negli estremi $z = 0 \quad z = \frac{\pi}{2} + i$

$= F\left(\frac{\pi}{2} + i\right) - F(0)$ per il teor. fond. del calcolo integrale dove F è una primitiva.

$y = \operatorname{sen} x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$x = t$

$y = \operatorname{sen} t$

$z = t + i \operatorname{sen} t$

Per trovare F la regola di integrazione per parti. (F è la primitiva).

integrazione per parti (la formula è)

$$\int_a^b D\left[u(x)v(x)\right] = \int_a^b u'(x)v(x) + \int_a^b u(x)\, v'(x)\,dx$$

$$\left[u(x)v(x)\right]_a^b$$

Vediamo cosa si può dire se f è olomorfa senza altre ipotesi.

1) - Se Ω e sempl. connesso, qualunque curva chiusa si può ridurre ad un punto- ed appartenere a Ω. (sono omologhe a zero)

2) - Se Ω non è sempl. connesso, o magari lo è solo in una regione, non tutte le curve chiuse possono ridursi ad un punto e continuare ad appartenere a Ω.

DEFINIZIONE

Una curva di Jordan si dice OMOLOGA A ZERO se si può deformare fino a ridursi ad un punto continuando ad appartenere ad Ω

$$\gamma \overset{\text{omologa}}{\sim} 0 \quad \text{in } \Omega$$

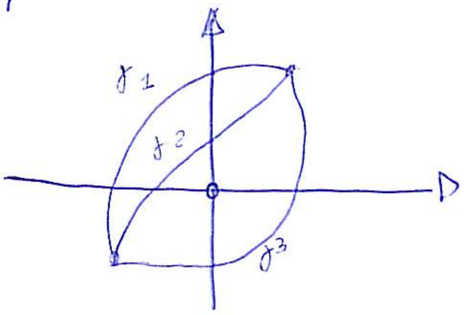
$f(z)$ omologa/olomorfa in Ω

implica

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall \gamma \sim 0 \text{ in } \Omega.}$$

Una curva può essere Omologa a 0 anche se il piano ha dei fori (ad esempio nell'origine).

Esempio

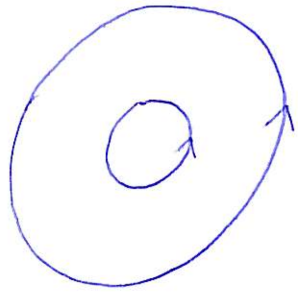


- La curva $\gamma_1 + \gamma_3$ non è omologa a 0
- La curva $\gamma_1 + \gamma_2$ è omologa a zero.

n.b. l'integrale su $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ è invariante, se invece integriamo su $\gamma = \gamma_1 + \gamma_3$ non è vero.

Procediamo nel seguente modo:

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ in Ω



Se $f(z)$ è olomorfa in Ω vale

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

Le curve chiuse risultano essere di due tipi. 1) quelle che circondano z_0
2) quelle che non circondano z_0.

n.b. tutte quelle che circondano z_0 sono omologhe tra di loro. (indipendentemente dal raggio della curva).

* Vale che l'integrale che facciamo su una curva è uguale a quello che facciamo su una sua curva omologa.
Le classi di omologia sono molto grandi, perciò vi sono molti integrali che danno lo stesso valore.

Possiamo anche parlare di archi di curve omologhe. Due archi sono omologhi se hanno in comune il punto di partenza ed il punto di arrivo, ma ciò non è sufficiente, devo poter trovare un terzo arco γ_3 che ha in comune con γ_1 e γ_3 solo gli estremi e tale che $\gamma_1 \sim \gamma_2$ $\gamma_1 - \gamma_2 \sim_0$ in Ω
γ_3 è omologa a tutti e due.

$f(z)$ olomorfa in Ω

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ in Ω

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Se un integrale lungo una certa curva risulta complicato, possiamo cercare una curva lungo cui sia più facile integrale.

* Formula di Cauchy (è fondamentale)

enunciato

$f(z)$ olomorfa in una regione Ω

senza altre ipotesi su Ω a parte aperto e connesso

$\gamma \in \Omega$ $\quad \gamma \sim 0$ in Ω

cioè può ridursi ad un punto e continuare ad appartenere ad Ω

n.b. se non si dice altro la curva è orientata sempre in senso antiorario.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \qquad z \in I(\gamma)$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 0 \qquad z \notin I(\gamma)$$

Distinguiamo tra z_0 interno a γ o esterno.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt \qquad z_0 \in I(\gamma)$$

Si ritrova che per il fatto che la funzione $f(z)$ è derivabile, e nota agli estremi nota anche in tutti i punti interni.

Se $f(z)$ è olomorfa, u e v sono funzioni armoniche, cioè soluzioni dell'equazione di Laplace.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

legame → Perché esistono le cond. di Cauchy-Riemann

Se il punto z_0 è fuori dalla curva γ l'integrale vale zero.

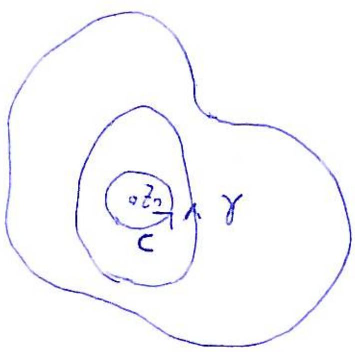
$$0 = \int_\gamma \frac{f(t)}{t - z_0}\, dt \qquad z_0 \notin I(\gamma)$$

$$\frac{f(t)}{t - z} \text{ olomorfa in } \Omega \setminus \{z_0\}$$

$$\gamma \sim 0 \text{ in } \Omega \setminus \{z_0\}$$

$z_0 \in I(\gamma)$ suppongo che il punto sia interno alla curva.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z_0}\, dt =$$



$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t - z_0}\, dt$$

dove c ha la solita equazione $t = z_0 + \rho e^{i\theta}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\cancel{\rho e^{i\theta}}}\, \cancel{\rho e^{i\theta}}\, \cancel{i}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

è invariante quando $\rho = 0$, cioè quando il limite tende a zero.

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{\rho \to 0} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underset{\text{è una cost. in da}}{f(z_0)}\, d\theta = f(z_0)$$

si è dimostrato che l'integrale del limite è il limite dell'integrale.

25/10/96 VENERDÌ

Riprendiamo un attimo la formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt \qquad \gamma \sim 0 \qquad z \in I(\gamma)$$

Dove γ è un curva chiusa omologa a zero

vediamo un'importante applicazione.

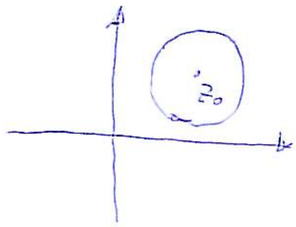
Il teorema di media.

ipotesi, invece di prendere la curva γ, prendiamo una circonferenza di centro z_0

vale l'invarianza dell'integrale.

$$t = z_0 + z e^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + z e^{i\theta})}{z e^{i\theta}}\, z i e^{i\theta}\, d\theta = f(z_0)$$



La media dei valori assunti dalla funzione nella circonferenza è uguale al valore della funzione in z_0

Le funzioni olomorfe godono della proprietà di media.

Dal punto di vista applicativo.

Se $f(z)$ è olomorfa in Ω limitata e continua in Ω unita alla frontiera di Ω (si scrive $\Omega \cup \partial\Omega$) "otteniamo cioè un insieme compatto", si ha il teorema di Weierstrass che dice "il max e il min appartiene al compatto", ma ora il max di $f(z_0)$ associato alla funzione, la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass, si trova neccessariamente sulla <u>frontiera</u> e non dentro al compatto.

riassumendo:

$f(z)$ olomorfa in Ω limitata

cont $\Omega \cup \partial\Omega$

cont $|f(z)|$ in $\Omega \cup \partial\Omega$

$\max |f(z)| : z \in \partial\Omega$

IMPORTANTE

~∘~∘~∘ DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

DIMOSTRA CHE SE DERIVABILE, LO È PER OGNI ORDINE.

La funzione $f(z)$ si può rappresentare con la formula di Cauchy.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt \qquad z \in I(\gamma)$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

* Vediamo se è possibile portare la derivazione sotto il segno di integrale.

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

N.B. la derivata è rispetto a z.

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt$$

* La legittimità del passaggio viene più che dall'olomorfia dalla continuità della funzione.

* Ricordiamo che per le funzioni di var. complessa se esiste la derivata prima esistono le derivate di qualunque ordine

ne deriva

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \qquad z \in I(\gamma)$$

* che dimostra l'esistenza delle derivate di qualunque ordine.

~o~o~o~

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$u'_x = v'_y \qquad u''_{xx} = v''_{yx}$$

$$u'_y = -v'_x \qquad u''_{yy} = -v''_{xy}$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

SOMMATO TERMINE A TERMINE

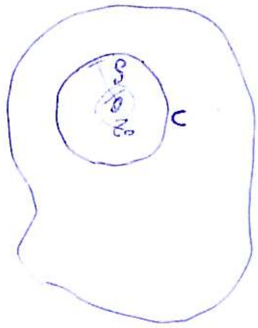
Se $f(z)$ è olomorfa u e v sono funzioni armoniche (sono cioè soluzioni dell'equazione di Laplace), e quindi, soddisfano le condizioni di Cauchy Rieman.

Le funzioni armoniche, come conseguenza del legame con le funzioni olomorfe, ereditano la proprietà di media, quindi il massimo di una funzione armonica viene assunto sul bordo.

Per scambiare il max con il min nelle funzioni armoniche basta invertire il segno di u da $+u$ a $-u$.
È facilmente verificabile che se sia il max che il min è assunto sul bordo, la funzione è identicamente nulla su tutto l'insieme.

~o~o~o

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \qquad z \in I(\gamma)$$



è verificata l'uguaglianza in modulo

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(t)|}{|t-z_0|^{n+1}} ds$$

$$\max_{t \in C} |f(t)| = M(\rho)$$

raggio della circonferenza

si ha:

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} \oint ds = \frac{n!}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho$$

Da cui si vede che le derivate successive non sono libere di crescere come vogliono, ma sono limitate da quanto scritto qui sopra

Vale quindi la disuguaglianza attribuita a Cauchy

- $$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{\rho^n} M(\rho)$$ Disuguaglianza di Cauchy

Vediamo un banale esempio:

$f(z) = z^3 \qquad z_0 = 0$

prendo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1

$f'(z) = 3z^2 \quad f''(z) = 6z \quad f'''(z) = 6 \quad f^{(n)}(z) \equiv 0$

$\rho = 1$

$$M(\rho) = \max_{|z|=1} |z^3| = 1 \qquad |z| = 1 \qquad |z^3| = 1$$

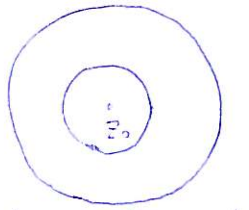
$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \qquad n=3$$

$$|6| \leq 3! \qquad f'''(0)=6$$

Si può migliorare la maggiorazione prendendo un cerchio grande
Come conseguenza dimostriamo il teorema di Liouville:
importante ricordarsi le ipotesi:

1) $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ ($f(z)$ è olomorfa in tutto il piano complesso)
2) $|f(z)| < K \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ($f(z)$ è limitata in $\mathbb{C}$ se è costante)

Th: $f(z)$ è una costante in $\mathbb{C}$



Sfruttiamo la disuguaglianza di Cauchy per far vedere che la derivata prima è nulla, ciò implica che la funzione è costante

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M(\rho)}{\rho} \leq \frac{K}{\rho} \leq \varepsilon$$

Dove il raggio ρ può essere preso arbitrariamente grande. Posso quindi scegliere ρ abbastanza grande affinché il rapporto con K dia un numero minore di ε (piccolo a piacere)

$$0 \leq |f'(z_0)| < \varepsilon$$

La conseguenza di questo teorema si vede nella falsità di

$$|\sin z| \leq 1 \quad \text{(non è vero)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \underline{\text{IMPORTANTE}}$$

$$|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

difatti $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

pag 24

conseguenza di Liouville è il teorema fondamentale dell'algebra:

ogni polinomio $P(z)$ di grado $n>0$ ammette almeno n valori in cui si annulla.

Altra conseguenza:
Preso un numero finito di funzioni olomorfe in Ω la somma delle funzioni è ancora una funzione olomorfa in Ω, questo è dovuto al fatto che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate.
Vediamo cosa succede se invece di considerare una somma consideriamo una serie e ci chiediamo se la sua convergenza ci da utili informazioni:
Arriviamo al teorema di Weierstrass.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$$

$$\underset{\text{convergenza uniforme}}{C^u} \quad \forall K \subset \Omega$$

Convergenza uniforme in ogni compatto contenuto in Ω assicura la convergenza uniforme nella regione Ω

Tesi: $f(z)$ è olomorfa in Ω ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z) = f'(z) \quad \underset{\text{convergenza uniforme}}{C.u.} \ \forall K \subset \Omega$$

Vale la derivazione per serie.

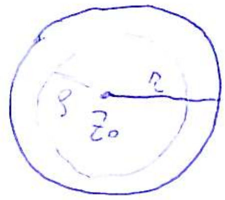
$$\sum_{n=0}^{\infty} f''_n(z) = f''(z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z) = f^{(n)}(z)$$

Questo teorema lo possiamo applicare subito nell'ambito di derivazione per serie di potenze.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < r$$

La convergenza di questa serie avviene all'interno, non converge fuori, nulla si sa sulla circonferenza.



La convergenza di essa è assicurata in ogni cerchio contenuto nel cerchio di definizione $\rho < R$

La somma di una serie di potenze è una funzione olomorfa nel cerchio di convergenza.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$$

posso continuare a derivare perché sto applicando il teorema di Weierstrass.

comunque ciò che accade nella frontiera non si ripercuote sulle derivate.

da $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ricavo $f(z_0) = 0$

dalla $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ ricavo $f'(z_0) = a_1$

da $f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$ ricavo $f''(z_0) = 2a_2$ $\quad a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \text{Percui} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

La somma di ogni serie di potenze si può rappresentare tramite la serie di Taylor

dimostriamo Cauchy Taylor

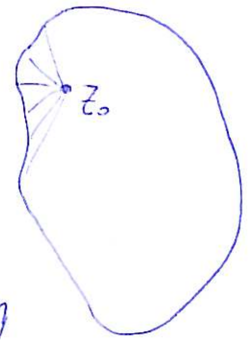
tesi

$f(z)$ olomorfa in Ω

prendiamo un punto z_0 contenuto in Ω

ipotesi

$$\eta = \inf_{t \in \partial\Omega} |t - z_0|$$



$$f(z) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \Big\{ |z-z_0| < \eta$$

in ogni cerchio minore della distanza con la frontiera la $f(z)$ è rappresentabile mediante una particolare serie di potenze che è la serie di Taylor:

dimostrazione

$$c: |z - z_0| = \rho < \eta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt \qquad z \in I(c)$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{t-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}}$$

$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$ deve essere minore del modulo di $t-z_0$ affinché sia sviluppabile

$$|z-z_0| < |t-z_0|$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}dt$$

è neccessario che l'integrale della serie sia uguale alla serie degli integrali.
vediamo se è verificato:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}dt = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n dt}_{\text{è uguale a } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

se si può fare questo cambio il teorema è dimostrato

è possibile perché:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt = \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

Una condizione neccessaria per poter eseguire il passaggio alla serie sotto il segno di integrale è la convergenza <u>uniforme</u>

La mia serie è, di cui mi interessa la convergenza uniforme rispetto a $\underline{t}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(t)\,(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}$$

applico il criterio di convergenza uniforme di Weierstrass

questo criterio prevede $\underline{\text{due}}$ ipotesi:

$$t \in D \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \qquad |g_n(t)| \leq a_n \qquad \sum a_n \ \underline{\underline{\text{conv.}}}$$

(realizzazione di a_n)

$$\frac{f(t)\,(z-z_0)^n}{|t-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M\,|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

$|z-z_0|<\rho$

risulta essere convergente perché

$$\frac{M}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{\rho}$$

è una serie geometrica di ragione minore di uno e quindi è convergente

Quindi si può derivare e integrare per serie.

Esempio:

consideriamo la funzione arcoseno di z, che è polidromo in campo complesso

$W = \arcsin z$

$$z = \sin w = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$2iz = e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}}$$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{-z^2+1}$$

ricavo w passando al logaritmo

$$W = \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right)$$

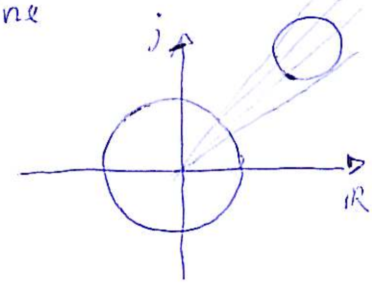
percui:

$$\text{arcsen } z = W = \frac{1}{i} \log \left(iz \pm \sqrt{1-z^2} \right)$$

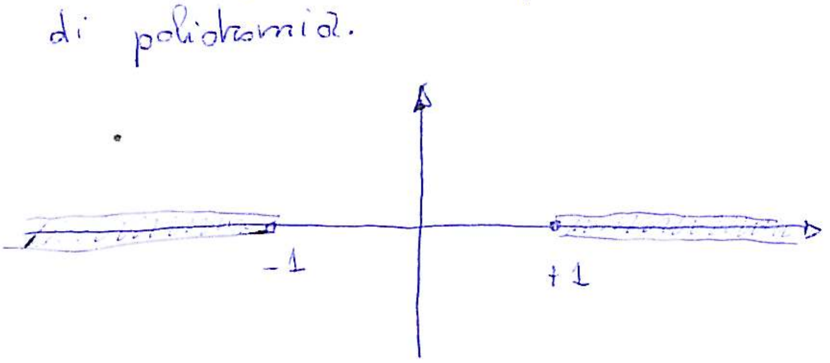
notiamo che ci sono infiniti valori per multipli di $2k\pi i$

girando attorno all' origine si passa da una determinazione della radice ad un'altra.

Non è vero se la rotazione avviene in un punto qualsiasi diverso dall' origine



capito che arcsen z è polidroma, non possiamo parlare di cauchy - taylor per arcsen z, ma solo dei suoi rami di polidromia.



Eliminiamo dal piano complesso le due semirette aventi origine dai punti ± 1.

Non è più possibile girarci attorno.

riesco così a definire i rami olomorfi di arcsen z

Questa regione è semplicemente connessa, quindi tutti i possibili rami olomorfi li posso sviluppare in questa regione.

Sappiamo quindi che il raggio dello sviluppo di Taylor sarà 1.
effettuiamo lo sviluppo.
consideriamo X reale e definito in $-1 \leq X \leq 1$ $\qquad |X| < 1$

arcsen X

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La serie binomiale è

$$(1+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{K} y^K \qquad |y|<1 \qquad \text{dove} \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}$$

$$\text{arcsin } x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^K \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1$$

è lo sviluppo di arcsin x dove si insiste sul fatto che si è considerato x reale.
Il ramo reale di arcsen X è quindi

$$(\text{arcsen } z)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2K+1} \qquad |z| < 1$$

viene chiamato reale perché prolunga i valori reali della funzione.
Vediamo cosa succede (o come si sviluppano tutti gli altri infiniti rami).

$W_1 = \arcsin z$ $\quad\quad$ $\operatorname{sen} W_1 =$

$W_2 = \arcsin z$ $\quad\quad$ $= \operatorname{sen} W_2$

$W_2 = W_1 + 2K\pi$

$W_2 = \pi - W_1 + 2K\pi$

Tutti gli altri rami si ottengono sommando al precedente i valori ora trovati.

$$(\arcsin z)_{2h\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + 2h\pi$$

$$(\arcsin z)_{2h+1} = (2h+1)\pi - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$$

E' lo sviluppo in serie di Taylor di tutti i rami di $\arcsin z$

n.B. non si può sviluppare la funzione completa ma i soli rami.

Sabato 26/10/96

Abbiamo visto che si può rappresentare una funzione olomorfa in un punto tramite uno sviluppo in serie di Potenze (serie di Taylor)
Da questo segue l'importante principio di identità

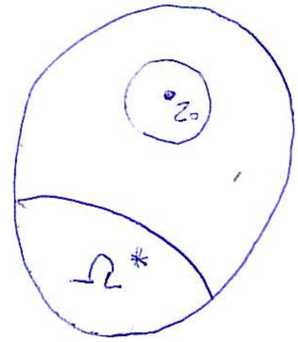
Principio di identità

Se $f(z)$ e $g(z)$ sono olomorfe in una stessa regione Ω

Una sub-regione è un insieme aperto e connesso, percui se una funzione coincide con un'altra in una subregione allora l'olomorfia delle due da la coincidenza in tutto Ω.

n.b. coincidenti in una subregione implica infiniti punti contenuti nella sub regione ~~dhi~~ $g(z)$ e $f(z)$ sono uguali.

$f(z) = g(z)$ in Ω^* subregione



Tesi $f(z) \overset{?}{=} g(z)$ in Ω

Dim.

$$f(z_0) = 0 \quad f'(z_0) = 0 \quad = f''(z_0) = 0$$

$$f^{(m)}(z_0) = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots$$

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m \qquad |z - z_0| < z$$

$f(z)$ olomorfa in Ω e non identica

$$z_0 \quad f(z_0) = 0 \quad f'(z_0) = 0 \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad f^{n}(z_0) \neq 0$$

$$f(z) = (z - z_0)^n \left[\frac{f^{(n)} z_0}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0) \dots \right]$$

quindi si può scrivere

$$f(z) = (z-z_0)^n \psi(z)$$

$\psi(z)$ = olomorfa

$\psi(z_0) \neq 0$

$$\lim_{z \to z_0} \psi(z) = \psi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \psi(z) \neq 0 \quad I(z_0)$$

$$f(z) = (z-z_0)^n \psi(z)$$

Ne ricaviamo la proprietà

Gli zeri di una funzione olomorfa (non identicamente nulla) sono <u>isolati</u>...

e quindi i punti di accumulazione devono appartenere alla frontiera.

ORDINE DI UNO ZERO

Quando c'è uno zero, si può sempre associare "l'ordine" di questo zero, che corrisponde all'ordine massimo delle derivate non nulle.

IMPORTANTE: PRINCIPIO DI IDENTITÀ RISTRETTO PER LE FUNZIONI OLOMORFE

1) Se funzioni $f(z)$ e $g(z)$ sono date olomorfe nella stessa regione Ω

2) Inoltre $f(z)$ e $g(z)$ sono uguali in un insieme E il quale ha un punto α di accumulazione con α appartenente alla regione di analiticità.

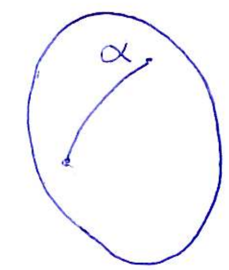
riassumendo le ipotesi:

1) $f(z), g(z)$ olomorfe in Ω

2) $f(z) = g(z)$ in E

3) α punto di acc. per E $\quad \alpha \in \Omega$

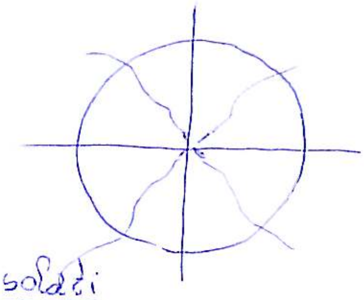
Tesi: se sono verificate le ipotesi le due funzioni sono coincidenti in tutto Ω.



$$\lim_{z \to \alpha} \varphi(z) = \varphi(\alpha) \qquad \varphi(z) = f(z) - g(z)$$

Se il limite c'è, comunque mi avvicino ad α lungo un qualsiasi cammino ottengo che il limite è uguale.

$$= \lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \in E}} \varphi(z) = 0 \qquad \varphi(\alpha) = 0$$



Essendo gli zeri di una funzione olomorfa isolati allora essa è identicamente nulla.
Tutto il ragionamento si basa sul fatto che il punto di accumulazione appartiene alla regione di analiticità della funzione considerata.

Un ovvio controesempio è dato dalla funzione $\sin \frac{1}{z}$
l'origine non appartiene alla regione di analiticità,
il punto di accumulazione che c'è nell'origine non comporta la identica nullità della funzione in tutta la regione di analiticità.

~o~o~o~o~

Vediamo quanto ristretto può essere il principio di identità.
supponiamo:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

è l'unica funzione olomorfa che coincide con $\operatorname{sen} x$ sull'asse reale.

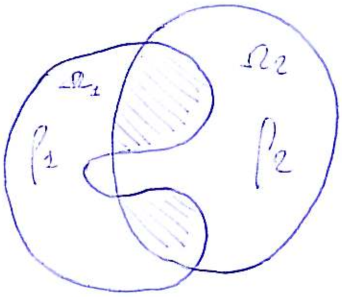
$f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$
$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esse sono univocamente determinate dal principio di identità.

Analogo concetto si può esprimere per tutte quelle funzioni del tipo $\sin z$, $\cos z$, e^z ecc.
Sulla base del principio di identità funziona il concetto di <u>prolungamento analitico.</u>

$f_1(z)$ olomorfa in Ω_1

$f_2(z)$ olomorfa in Ω_2 $\qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$



nell'intersezione "per quanti pezzi sia essa composta" le due funzioni olomorfe in Ω diversi sono coincidenti.

$$(f_1, \Omega_1), (f_2, \Omega_2)$$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{in } \Omega_1 \\ f_2(z) & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \qquad \text{olomorfa in } \Omega_1 \cup \Omega_2$$

si dice che la funzione f_2 definita in Ω_2 prolunga f_1 in Ω_2 e d'altro conto f_1 definita in Ω_1 prolunga f_2 in Ω_1.

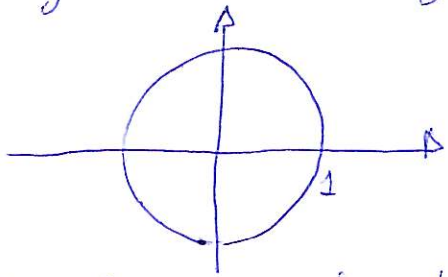
Il prolungamento "assegnata la regione" se esiste è <u>unico.</u>
Perché posso applicare il principio di identità.

- I prolungamento assegnata una regione o non esiste, o se esiste esso è unico (vedere la dimostrazione).

Vediamo un esempio:

Data la serie geometrica di ragione n essa converge per $|n| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$



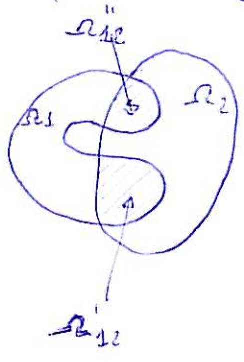
Questa serie di potenze rappresenta una funzione olomorfa nel cerchio di convergenza.

Chi è la funzione che prolunga questa funzione fuori dal cerchio di convergenza?

La somma della serie che è $\frac{1}{1-z}$ la quale è olomorfa ovunque tranne che sul punto $z=1$

Quello che abbiamo eseguito è un prolungamento analitico diretto.

Può accadere che le funzioni assumono valori uguali in solo una delle due parti (nel disegno sotto)



(f_1, Ω_1)

(f_2, Ω_2)

$f_1 = f_2$ in Ω'_{12} nell'altro sottoinsieme non è vero per ipotesi.

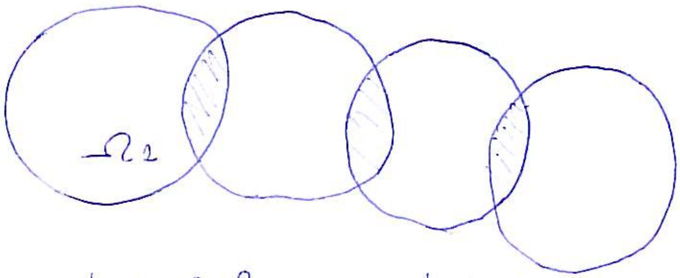
Il prolungamento, come visto prima potrei ancora farlo a patto di togliere la parte in cui non è verificata l'uguaglianza.

$$f(z) = \begin{cases} f_1 \text{ in } \Omega_1 \setminus \Omega''_{12} \\ f_2 \text{ in } \Omega_2 \setminus \Omega''_{12} \end{cases}$$

Risulta olomorfa nell'insieme Ω_2 privato della parte Ω''_{12}

Quindi se voglio prolungare la funzione mantenendola continua, devo considerare che essa sia una funzione a due o più o infiniti valori della quale in Ω'_{12} si è preso un valore in un ramo e nell'altro sottinsieme dell'unione c'è un altro ramo con il suo valore.

Si arriva al concetto più generale di funzione Analitica.

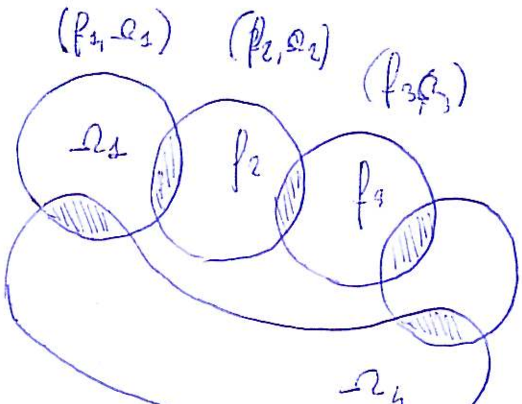


Facciamo dei prolungamenti diretti con altre regioni, nel momento che un insieme mi riprende un sottinsieme di quello di partenza, si può verificare che pur derivando da un prolungamento diretto, si chiude in un valore che è diverso da quello in cui si è cominciato a derivare.

È avvenuto un passaggio da un ramo ad un altro di una funzione polidroma.

Si è esteso con il termine Analitica il concetto di funzione che finora avevamo enunciato solo come olomorfa.

Quando parlavamo di funzione olomorfa intendevamo che essa fosse ad un solo valore, per funzione Analitica intendiamo quelle funzioni complesse che sono il prolungamento analitico "chiuso" come da sottostante schema.

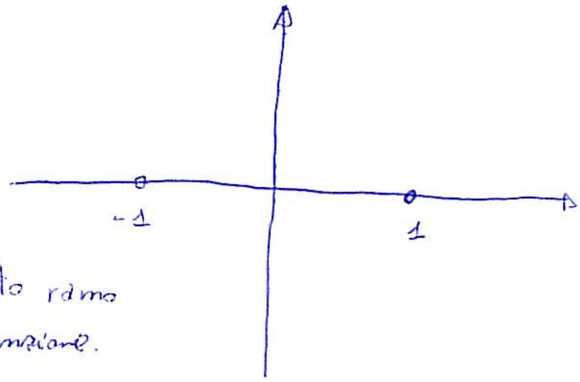


(f_1, Ω_4) che rientra in Ω_1 con un valore diverso.

Abbiamo già detto che le funzioni olomorfe erano rappresentabili tramite lo sviluppo in serie di Taylor.
Vedremo ora che le funzioni analitiche sono rappresentabili tramite lo sviluppo di Cauchy-Laurent.
Per costruire una qualunque funzione analitica completa bastano i punti dati da una successione.

*Un punto di una funzione Analitica completa, può essere singolare per un ramo della funzione polidroma, e non esserlo per altri.

Esempio $\dfrac{1}{\arcsin z}$



$z=0$ $\dfrac{1}{(\arcsin z)_0}$ in questo ramo della funzione.

in zero la funzione non è olomorfa, infatti il denominatore si annulla.

Per tutti gli altri rami invece il punto è un elemento di analiticità per la funzione.

- Olomorfa = funzione sempre ad un sol valore
- Analitica completa = funzione che può essere polidroma e quindi quanto visto per le funzioni olomorfe valgono solo per i suoi rami e non nella totalità della funzione.

SERIE DI CAUCHY - LAURENT

Se il punto non è di analiticità ovviamente non si può dire che lì sia rappresentabile tramite la serie di potenze di Taylor.

La serie di Cauchy-Laurent è un tentativo di rappresentare la funzione nel seguente modo.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

di convergenza uniforme in ogni compatto contenuto nella corona circolare.

Lo sviluppo è fattibile solo se $f(z)$ è olomorfa in una corona circolare, quindi è assurdo voler sviluppare nell'intorno di un punto di diramazione.

Nell'ipotesi che $f(z)$ sia olomorfa in una corona circolare si dimostra che è valido lo sviluppo di Cauchy-Laurent:

coefficienti di Taylor infinitesimi

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt$$

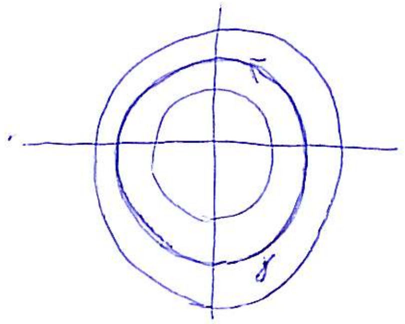
si può ricordare pensando che se il punto è singolare si ricade in una formula già vista.

residui infiniti.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(t) (t - z_0)^{n-1} dt$$

n.b. 1) Lo sviluppo di Cauchy Laurent se esiste è unico

2) Concetto di residuo.



- consideriamo la curva γ interna alla corona circolare.
essendo ivi la convergenza uniforme posso integrare per serie.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}$$

$$= b_1 \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\, b_1$$

dove $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz$

è il residuo relativo a tutti i punti singolari.
Quando possiamo parlare del residuo nel punto z_0, Quando il raggio della circonferenza interna è arbitrariamente piccolo, cioè se $f(z)$ è olomorfa in $0<|z-z_0|<r$ cioè in tutti i punti di una circonferenza di raggio z_0 escluso il punto z_0.
È l'unico caso in cui si parla di residuo in un punto.

Esempio

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}$$

ha un residuo proprio in $z=0$ infatti:
$R(0)=1$

Si vede come il concetto di residuo sia legato al calcolo degli integrali
difatti si scrive

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Residuo in } z_0}}{R(z_0)}$$

Esempio

$$\int_\gamma \sin \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i\, R(0) = 2\pi i$$

Posso parlare di singolarità isolata, non posso parlare di residuo nel punto se la singolarità non è isolata.
- non si può parlare di residuo nei punti di diramazione perché non c'è la serie di Cauchy-Laurent.
- non posso parlare di residuo in un punto dove la singolarità sia multipla, di fatti se la singolarità è multipla in quel punto il residuo può esistere ma è relativo al complesso delle singolarità.

Esercizio

Dire quali delle seguenti funzioni ammettono residuo in r_0 e quanto vale quando esiste.

$z = 0 \quad R(0)$

$$f_1(z) = \cos z \,\mathrm{sh} \frac{1}{z^2}$$

$$f_2(z) = \sqrt[4]{z}\, \mathrm{sen}^2 z$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)}$$

$$f_4(z) = e^{\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z^2 e^z}$$

Per ciascuna delle funzioni indicare quando esiste lo sviluppo di Couchy-Lourent

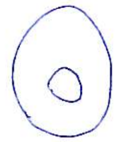
08/11/96

Ricordiamo la Serie di Cauchy Laurent.

Essa si può scrivere per le funzioni che sono olomorfe all'interno di una corona circolare.

Non si può scrivere nell'intorno di un punto di diramazione.

$f(z)$ olomorfa



$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dove $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(t)(t-z_0)^{n-1}\,dt$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(t)\,dt$$ residuo nel punto z_0

$0 < |z - z_0| < 2 \qquad 2(z_0)$

classificazione dei punti singolari isolati con $f(z)$ olomorfa in un intorno del punto z_0 escluso z_0

riassunto con : $f(z)$ olomorfa $0<|z-z_0|<R$

IMPORTANTE CLASSIFICAZIONE

- I punti di diramazione verranno esclusi dalle classificazioni che ci accingiamo a fare
- I punti singolari non isolati vengono esclusi dalla classificazione.

Esclusi queste condizioni distinguiamo tre casi

* 1) $\lim_{z \to z_0} f(z) =$ numero

Singolarità eliminabile.

Condizione neccessaria e sufficente a ciò é che tutte le b_n siano uguali a zero. $b_n = 0$

* 2) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

polo

cioé $\exists\, b_p \neq 0$ per $n > p \Rightarrow b_n = 0$

- Si é in presenza di un polo di ordine p.

* 3) non esiste il limite per z che tende a z_0

É un caso di singolarità essenziale.

Condizione neccessaria e sufficente perché ciò accada é che infinite b_m siano diverse da $\emptyset$.

riassumendo:

caso 1) Il limite esiste finito — singolarità eliminabile

2) Il limite è infinito — polo di ordine n

3) Il limite non esiste. — singolarità essenziale

nel primo caso si ha che vale:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

nello sviluppo di Cauchy-Laurent

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

Esempi di singolarità eliminabili

$\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ singolarità eliminabile in $z = 0$, infatti sviluppando:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+\cancel{1}}}{(2n+1)\cancel{z}}$$

Lo sviluppo può essere scritto in tutto $\mathbb{C}$ meno lo zero.

$\frac{1 - \cos z}{z}$ $\qquad \frac{1 - \cos z}{z^2}$

Scriviamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{a_n (z - z_0)^n}^{\text{è una serie di potenze}} \qquad 0 < |z - z_0| < R$

pongo $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ la funzione diventa una serie di potenze in z_0 e quindi è olomorfa in z_0. Eliminata la singolarità vediamo il secondo caso:

$b_p \neq 0$

$$f(z) = \frac{b_p}{(z-z_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \frac{-b_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$g(z)$ z_0 $g(z) = (z-z_0)^p \varphi$

consideriamo l'inversa

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)_p} \frac{1}{\varphi(z)}$$

se ad esempio considero una funzione che ha un polo

es:

$$\frac{1}{\cos z - 1}$$

le singolarità vengono dagli zeri del denominatore

$$\cos z - 1 = 0$$

$$z_k = 2k\pi$$

difatti:

$$\lim_{z \to z_k} \frac{1}{\cos z - 1} = \infty$$

chiediamoci: $z_k = 2k\pi$ sono zeri di $\cos z - 1$?

facciamo la derivata ed otteniamo

$$D[\cos z - 1] = -\sin z$$

$$(-\sin z)_{z=2k\pi} = 0$$

$$D^2\left[\cos z - 1\right] = -\cos z \qquad \left(-\cos z\right)_{z=2k\pi} = -1$$

Sono tutti poli doppi del suo reciproco.

Esempio di singolarità essenziale.

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z} \quad z=0 \qquad \operatorname{sh}\frac{1}{z} = \frac{e^{\frac{1}{z}} - e^{-\frac{1}{z}}}{2}$$

Ricordiamoci che $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ <u>non esiste</u>

difatti si ha

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{array}\right\} \text{QUINDI QUESTO LIMITE NON ESISTE.}$$

$$\operatorname{sh} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

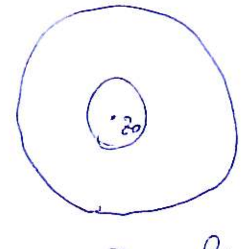
$$\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} \qquad z \neq 0$$

è uno sviluppo di Cauchy Laurent con infiniti b_n diversi da zero

<u>Teorema di Picard</u>

Se z_0 è singolarità essenziale

$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$



comunque si prenda un intorno della funzione di z_0 la funzione assume tutti i valori complessi escluso al più uno.

vediamo come tirare fuori i termini di uno sviluppo di cauchy laurent.

es $\dfrac{1}{e^z-1}$ ha infiniti poli in corrispondenza degli zeri del denominatore. $e^z = 1$ $z = \log 1 = 2k\pi i$

Sono tutti zeri semplici perché non annullano anche la derivata.

$$D(e^z-1) = e^z \qquad e^{2k\pi i} = 1$$

In $z=0$ la funzione ha un polo semplice.

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z}\frac{z}{e^z-1}$$

sviluppiamo in serie di potenze (di cui vogliamo trovare i coefficenti)

$$\frac{z}{e^z-1} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

$$z = (e^z-1)(a_0 + a_1 z + \dots\dots)$$

$$z = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

$$z = a_0 z + \left(a_1 + \frac{a_0}{2!}\right)z^2 + \left(a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!}\right)z^3 + \dots\dots$$

$$+ \left(a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \dots + \frac{a_0}{n!}\right)z^n + \dots$$

Lo sviluppo vale per $|z| < 2\pi$

Visto che ho una serie di potenze al primo membro e una al secondo membro (ed hanno la stessa somma) posso applicare il principio di identità.

$a_0 = 1$

$a_1 + \frac{a_0}{2!} = 0 \qquad a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} = 0 \qquad a_2 = +\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{2}z + \dots\right]$ quindi in un polo abbiamo calcolato questi coefficenti

Residui

consideriamo una funzione dove z_0 è un polo semplice

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad 0 < |z - z_0| < \varrho$$

$$f(z)(z - z_0) = b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = b_1$ è il residuo nel punto z_0 (polo semplice)

Questo limite deve essere calcolato nella maniera opportuna.

$$f(z) = \frac{b_p}{(z - z_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$f(z)(z - z_0)^p = b_p + b_{p-1}(z - z_0) + \dots b_1 (z - z_0)^{p-1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+p}$$

ATTENZIONE 99% SU CALCOLO INTEGRALI

CALCOLO DEI RESIDUI

si fa se la singolarità è eliminabile "ovviamente".

$$b_1 = \frac{1}{(p-1)!}\left\{\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[f(z)(z - z_0)^p\right]\right\}_{z = z_0}$$

nota bene, si troverà una forma indeterminata che si dovrà risolvere.

esempio

$$\frac{1}{\cos z - 1} \qquad z_k = 2k\pi$$

$$\lim_{z \to z_k} \frac{d}{dz} \frac{(z-z_k)^2}{\cos z - 1}$$

Vediamo quando e come si puó applicare la regola dell'Hopital.

si applica solo sul caso $\frac{0}{0}$ in un punto di olomorfia per entrambi le funzioni.

condizioni di applicabilitá
$$\begin{cases} f(z) \text{ olomorfa in } I(z_0) & f(z_0)=0 \\ g(z) \text{ olomorfa in } I(z) & g(z_0)=0 \end{cases}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2}{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + g''\frac{(z_0)}{2!}(z-z_0)^2}$$

é lo sviluppo in serie di MAC-Laurin.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)^m \left[f^m\frac{(z_0)}{m!} + \dots\right]}{(z-z_0)^n \left[g^n\frac{(z_0)}{n!} + \dots\right]}$$

se $m=n$ si semplifica $\frac{f^m(z_0)}{g^m(z_0)}$ $m=n$

se $m>n$ il limite vale 0

Se $m<n$ il limite vale ∞

In ogni caso il limite esiste sempre.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)^p (z-z_0)}{g(z)^p)(z-z_0}$$

Quindi la regola di de l'Hopital si può applicare solo nelle condizioni viste ma senza ulteriori restrizioni.

$\frac{1}{e^z-1}$ $z_h = 2h\pi i$ poli semplici.

$$R(2h\pi i) = \lim_{z \to 2h\pi i} \frac{z - 2h\pi i}{e^z - 1} = (H) \lim_{z \to 2h\pi i} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{2h\pi i}} = 1$$

vediamo un esempio della regola di de l'Hopital.

$$\frac{1}{z^6+1} \qquad z^6 = -1 = (\cos\pi + i \sin\pi)$$

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6} \qquad k = 0, 1, \ldots 5$$

$e^{i\frac{\pi}{6}}$ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ $e^{i\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}$ sono radici che si dispongono sui vertici di un poligono regolare.

$$R(z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{z^6+1} = \text{applichiamo } H = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_k^5}$$

moltiplico sotto e sopra per z_k ottengo

$$= \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{z_k}{6}$$

TEOREMA DEI RESIDUI

Sia $f(z)$ olomorfa "quindi ad un sol valore" in una regione Ω

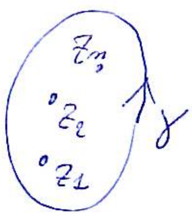
Abbiamo una curva γ appartenente alla regione di analiticità.

Dentro alla curva γ la funzione non è olomorfa.

Sempre dentro alla curva γ ci sono un numero finito di singolarità.

In queste ipotesi si ha:

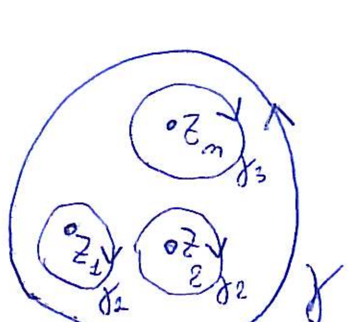
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(z_k)$$



sul percorso γ la funzione è olomorfa, quindi le singolarità devono essere interne.

Essendo le z singolarità isolate in un numero finito, io posso circondare le singolarità con dei cerchietti che identificano il confine di olomorfia.

Questo significa che la curva γ non può essere omologa a zero.



L'orientazione opposta delle curve interne si vedrà essere coerenti rispetto alla γ.

$$\boxed{\int_{\partial K} f(z)dz = 0}$$

L'integrale della $f(z)$ sulla curva γ è nulla.

$$\int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 0$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} R(z_k)$$

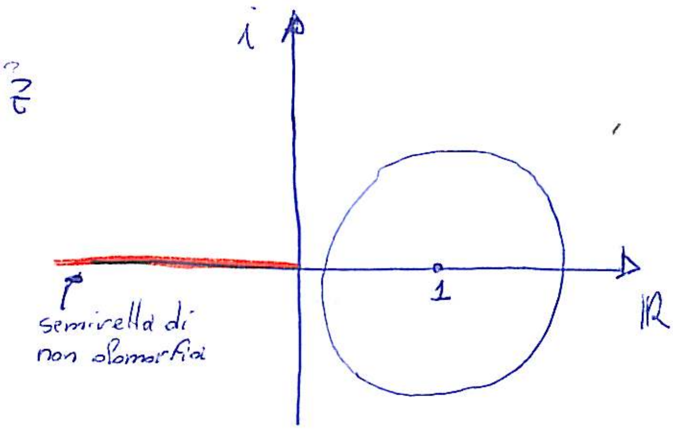
Esercizi

Sia $(\sqrt{z})_0$

e sia γ la circonferenza di equazione $|z-1| = r > 0$ antioraria.

calcolare i valori di r per i quali sia possibili calcolare con il teorema dei residui la somma della serie

$$\int_\gamma (\sqrt{z})_0 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$$



Per applicare il teorema dei residui la funzione deve essere olomorfa sulla circonferenza.

Quindi si può applicare per $r < 1$ infatti in 0,0 c'è la non olomorfia.

Studiamo a pezzi la singolarità:

$\sqrt{z}$ = olomorfa ovunque tranne nella semiretta già esclusa

$\frac{1}{z-1}$ = ha una singolarità in $z=1$ essenziale

dobbiamo calcolare il coefficiente della potenza $\frac{1}{z-1}$

$$\int_\gamma (\sqrt{z})_0 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz = 2\pi i R(1)$$

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 = \left(\sqrt{1+(z-1)}\right)_0$$

$$(1+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k$$

perciò

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 = \left(\sqrt{1+(z-1)}\right)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (z-1)^k \qquad |z-1|<1$$

sviluppiamo $\sin \frac{1}{z-1}$

$$\sin \frac{1}{z-1} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{(2h+1)!\,(z-1)^{2h+1}}$$

ora moltiplico tra di loro queste due serie per avere lo sviluppo di Cauchy-Laurent.

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \left[\binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}(z-1) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(z-1)^2 + \cdots\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{1}{z-1}\left[\binom{\frac{1}{2}}{0} - \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{3!} + \binom{\frac{1}{2}}{4}\frac{1}{5!} + \cdots\right]$$

attenzione a quali prodotti si svolgono.

cioè il residuo è uguale a =

$$R(1) = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{2h} \frac{(-1)h}{(2h+1)!}$$

09/11/96

SVILUPPARE IN SERIE DI CAUCHY LOURENT LA FUNZIONE

$$f(z) = \frac{3z - z^2 - 4}{(z-1)^2(z-2)}$$ nell'intorno del punto $z = 1$

e precisare l'insieme di convergenza.

Scomponiamolo in frazioni più semplici

Ricordarsi che ogni fattore, sarà presente con tanti termini quanto è il loro grado.

$$\frac{3z - z^2 - 4}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-2}$$

essendo i primi sono i residui

Non serve applicare il principio di equivalenza dei polinomi in quanto i coefficenti A $\boxed{B}$ C sono i residui nei vari punti.

nó è il secondo termine, non dovrebbe essere il residuo

$$A = \left[\frac{d}{dz} \frac{\cancel{(z-1)^2}(3z - z^2 - 4)}{\cancel{(z-1)^2}(z-2)}\right]_{z=1}$$

$$= \left\{\frac{(3-2z)(z-2) - (3z - z^2 - 4)}{(z-2)^2}\right\}_{z=1}$$

$p=2$ USO LA SOLITA FORMULA PER IL CALCOLO DEL RESIDUO.

$A_1 = b_1$ residuo di ordine 2

$B = b_2$

$$A = \frac{d}{dz}\left[f(z)(z - z_0)^2\right]$$

DOVE $z_0 = 1$ PERCHÉ È IL POLO SIOZ

La formuletta completa sarebbe.

$$R(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

DOVE m è l'ordine del polo.

$-1 - (3-5) = 1$ DA CUI $A = 1$

Per calcolare B è sufficente fare:

$$\frac{\cancel{(z-1)^2}(3z - z^2 - 4)}{\cancel{(z-1)^2}(z-2)} = A(z-1) + B + \frac{C}{(z-2)^2}(z-1)^2$$

$$B = \lim_{z \to 1} \frac{3z - z^2 - 4}{z-2} = \frac{3-5}{-1} = 2$$

c è un residuo in un polo semplice, quindi:

$$C = \lim_{z \to 2} \frac{\cancel{(z-2)}\,(3z - z^2 - 4)}{(z-1)^2\,\cancel{(z-2)}} = \frac{6-8}{}$$

In conclusione la decomposizione per

$$\frac{3z - z^2 - 4}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-2}$$

SERIE GEOMETRICA.

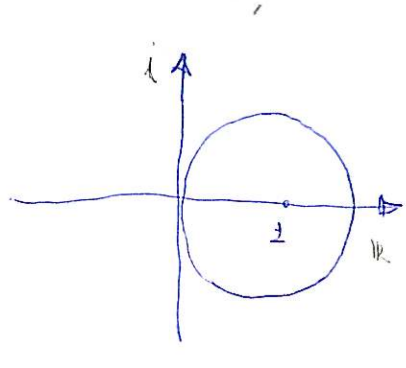
$$\frac{1}{1-p} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \qquad |p|<1$$

$$\frac{-2}{z-2} = \frac{-2}{(z-1)-1} = \frac{2}{1-(z-1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

VALE PER $|z-1|<1$

Lo sviluppo in serie di Cauchy Laurent è:

$$= \underbrace{\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}}_{\substack{\text{termini infiniti} \\ \text{al limite.} \\ \text{Essi sono i } b_n}} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n}_{a_n} \qquad 0<|z-1|<1$$



Esercizio di classificazione delle singolarità.

Studiare le singolarità della funzione. Esame 2/3/91

$$f(z) = \left(\frac{1}{e^{z}-1} - \frac{1}{z} \right) \frac{1}{sh(z^2)} ch \frac{1}{(z-1)}$$

1) Scegliere un ramo se la funzione è polidroma: questa non lo è

2) Studiare le singolarità delle (frazioni componenti)

es: $sh(z^2)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$, quindi i poli sono dati dagli zeri di $sh(z^2)$

tutte le singolarità si trovano in:

$e^{z}-1=0 \qquad z=0 \qquad sh(z^2)=0 \qquad z=1$

procediamo

$e^{z}=1 \Rightarrow z = \log 1 = 2k\pi i$ 1ª frazione

seconda frazione:

$z_k = 2k\pi i \quad k=\mathbb{Z} \quad z=0$

terza frazione

$sh(z^2)=0 \qquad sh\, w=0 \Rightarrow w = h\pi i$

quarta frazione

$z^2 = h\pi i \qquad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

• bisogna risolvere anche il quadrato.

$z^2 = h\pi i \quad h \geq 0 \quad h\pi\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$z_h = \pm\sqrt{h\pi}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$

se il modulo è negativo corrisponde a trovare le radici quadrate di -1

$h<0$

$z^2 = h\pi i = |h\pi|\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$z_h = \pm\sqrt{|h\pi|}\; e^{-\frac{i\pi}{4}}$

quindi:

$$z'_n = \pm \sqrt{|h\pi|}\; e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad h = -1, -2, -3, \dots$$

cerchiamo ora di fare la classificazione:

$$z_K = 2K\pi i \qquad K \neq 0$$

$$D(e^{z}-1) = e^{z} \qquad (e^{z})_{z=2K\pi i} = 1$$

$z = 2K\pi i$ zeri semplici di $e^{z}-1$

$\dfrac{1}{e^{z}-1}$ poli semplici di $f(z)$ per $K \neq 0$ difatti $z=0$ va esaminato a parte.

$$\frac{b_1}{z-2K\pi i} + \sum_{n=}$$

andiamo a vedere z_h sempre per h diverso da zero.

z_h $h \neq 0$

$$Sh(z^2) \qquad D\,\mathrm{senh}(z^2) = 2z\,ch(z^2).$$

$$2z_h\, ch(z_h^2) = 2z_h\, ch(\pi i h) \neq 0 \quad \text{se } z_h \neq 0$$

Sono zeri semplici di $sh(z)^2$ quindi sono poli semplici di $\dfrac{1}{Sh(z^2)}$ il resto si mantiene $\neq 0$ quindi z_h poli semplici di $f(z)$ per $h \neq 0$

Per $z=1$ La prima parte della funzione è olomorfa nel punto (quindi non ci sono problemi).

Invece per quanto riguarda $ch\left(\frac{1}{z-1}\right)$ si ha una singolarità essenziale.

difatti il limite non c'è.

$z=0$ è polo semplice $\frac{1}{e^z-1}$

$z=0$ è polo semplice di $\frac{1}{z}$

$z=0$ è polo doppio per $\frac{1}{\operatorname{sh} z^2}$

Studiamo la differenza

$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ per vedere se la singolarità è eliminabile.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z-1} = (H) \lim \frac{1}{e^z} = 1$$

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

facciamo il limite:

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{z-(e^z-1)}{z(e^z-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{z-\left[z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right]}{z\left[z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right]}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z^2\left[-\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\dots\right]}{\cancel{z^2}\left[1+\frac{z}{2!}+\dots\right]}$$

in conclusione $z=0$ è polo doppio per $f(z)$.

Calcoliamo integrali con il metodo dei residui.

1° tipo Integrale di una funzione razionale da $-\infty$ a $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

dove P e Q sono polinomi. Bisogna fare delle considerazione su di essi

Si ricordano gli integrali impropri del tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$|f(x)| \leq \frac{A}{X^\alpha} \quad \alpha > 1 \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

allora esisteva l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ in quanto ha una maggiorante sommabile, (corrisponde alla sommabilità secondo Lebegue).

Una $f(z)$ è sommabile se e solo se è sommabile il suo valore assoluto.

$$\lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = +\infty$$

n.b. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e la modulazione che mettendo il modulo non ha più compensazione (si sommano sempre funzioni positive)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx$$

1) Condizione di sommabilità: infinito di ordine $\alpha < 1$ in un intorno di x_0, non basta confrontarlo con $\frac{1}{x}$

i) infinitesima di ordine $\alpha > 1$

i punti 1) e 2) sono criteri di sommabilità.

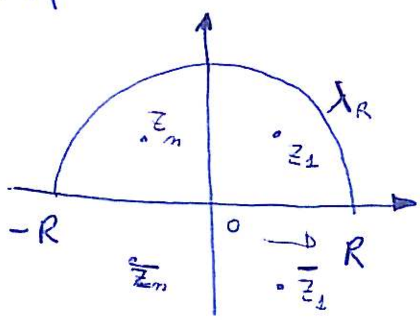
Tornando all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$ bisogna che $Q(x)$ non ha zeri reali

grado $P + 2 \leq$ grado Q

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_{a \to}^{\to b} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| dx$$

consideriamo la funzione $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$



$z_1 \ldots z_n$

$\bar{z}_1 \quad \bar{z}_n$

$$\int^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_{\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r(z_k)$$

N.B. L'INTEGRALE E' UGUALE ALLA SOMMA DEGLI INTEGR. SULL'ASSE REALE E SUL CERCHIO.

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \text{Valore Principale di} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad \text{in } a \text{ — } b$$

se la funzione invece è dispari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \sin x\,dx = 0$$

L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE ~~pari~~ DISPARI E' NULLO.

Teniamo sempre presente che se è finito l'integrale all'ora è finito l'integrale improprio ed è finito il valore principale.
I tre valori coincidono (non si può invertire l'ordine di come li ho citati)

$$\int |f(x)|\,dx < +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \text{ finito} = \text{Val prin.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$V_P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} + \lim_{R \to +\infty} \int_{\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{K=1}^{n} R(z_K)$$

nota bene è neccessario che ~~il~~ la funzione vada a zero almeno come $\frac{1}{z^2}$ e non basta dire che va a zero come $\frac{1}{z}$

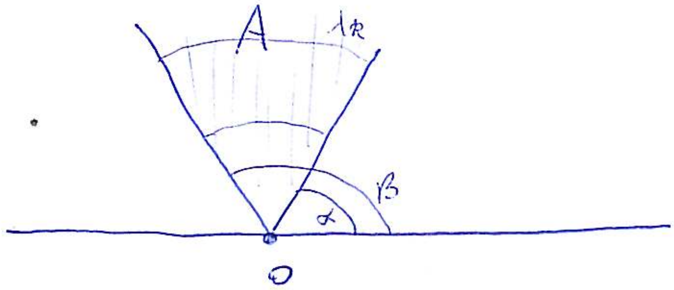
$$\lim_{z \to \infty} z \frac{P(z)}{Q(z)} = 0 \Rightarrow \lim_{R \to +\infty} \int_{\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

$$\left| \frac{z P(z)}{Q(z)} \right| < \varepsilon \qquad |z| > \delta$$

LEMMA DEL CERCHIO GRANDE

Si consideri una certa regione angolare costituita dai punti appartenenti a $\mathbb{C}$ tali che $|z| > \rho_0$ e l'argomento z sia compreso tra α e β con $\alpha \geq 0$ e $\beta \leq 2\pi$ cioè al massimo arriviamo al piano.

$f(z)$ è continua in A.



$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A}} z f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R \to +\infty} \int_{\lambda_R} f(z) dz = 0$$

significa dire: $|z f(z)| < \varepsilon \qquad |z| > \delta \; z \in A$

dove l'affermazione valle solo per i punti interni della regione A

$$\left|\int_{\lambda_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{\lambda_R}|f(z)|\,ds = \int \frac{|z f(z)|}{\underset{\downarrow R}{|z|}}\,ds \le$$

$$< \frac{\varepsilon}{R}\int_{\lambda_R} ds = \frac{\varepsilon}{\cancel{R}}(\beta-\alpha)\cancel{R} \qquad |z|>\delta$$

Vale nell'ambito delle funzioni razionali.
Possiamo passare al limite e scrivere:

~~V.P. princ.~~ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R(z_k)$$

~ o ~ o — o — o — o

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+2x^2+9}$$

troviamo le singolarità, ciò consiste nel trovare dove si annulla:

$$x^4+2x^2+9=0 \qquad x^2=-1\pm\sqrt{-8}$$

$$x^4+6x^2+9-4x^2$$

$$(x^2+3)^2-4x^2=(x^2+3-2x)(x^2+3+2x)$$

$$x^2-2x+3$$

$$x=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm i\sqrt{2}$$

$$x=-1\pm i\sqrt{2}$$

Quelle nel semipiano superiore sono: $z_1=1+i\sqrt{2}$ $\quad \bar{z}_1$

$z_2=-1+i\sqrt{2}$ $\quad \bar{z}_2$

Quindi $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+2x^2+9}=2\pi i\left[R(z_1)+R(z_2)\right]$$

$$\lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^4+2z^2+9} = (H) \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3+4z} = \frac{1}{4z_1(z_1^2+1)}$$

Il RISULTATO DI integrali di funzioni reali" devono essere funzioni reali"
se non troviamo un numero reale abbiamo sbagliato

— o — o — o — o

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

e contenente il semiasse reale positivo nel quale siano definiti i rami monodromi della funzione $f(z)$
Per ciascuno di questi rami trovare le eventuali singolarità:
e trovare se esiste il corrispondente residuo.

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{2+\sqrt{z}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

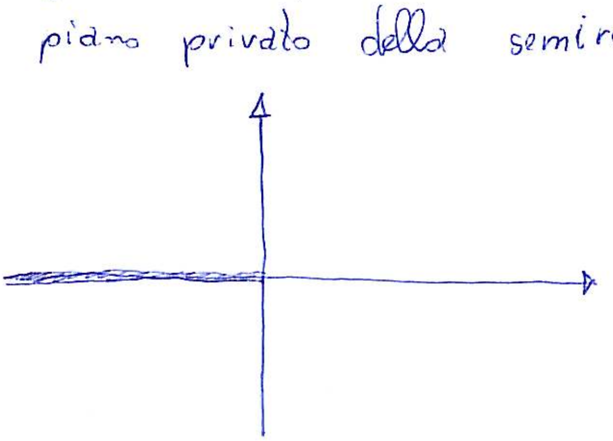
è noto che c'è un punto di diramazione in $z=0$

in generale se α non è intero è una funzione polidroma, difatti:

$$z^\alpha \overset{def}{=} e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log|z| + i\arg|z| + 2k\pi i)} \qquad \alpha \neq n$$

$$e^{\alpha(\log|z| + i\arg z)} \cdot e^{\alpha 2k\pi i} \qquad -\pi < \arg z < \pi$$

La regione nella quale si tolgono i punti di diramazione è il piano privato della semiretta negativa.



$(z^\alpha)_k \quad (\sqrt{z})_0 \quad (\sqrt{z})_1$

quindi possiamo parlare di singolarità solo per i rami e non per la funzione, scegliamo i due rami.

$$\frac{(z^\alpha)_k}{2+(\sqrt{z})_0} \quad , \quad \frac{(z^\alpha)_k}{2+(\sqrt{z})_1}$$

Le singolarità non possono che provenire dagli zeri del denominatore

$(\sqrt{z})_0 = -2 \qquad z=4$ QUADRANDO

se però facciamo

$(\sqrt{4})_0$ troviamo il solito ramo che dà valori reali $(\sqrt{4})_0 = 2$

$z=4 \qquad (\sqrt{4})_1 = 2$

ci sono per tutte le determinazioni delle singolarità per $z=4$

$$D\left[2+(\sqrt{z})_1\right] = \frac{1}{2(\sqrt{z})_1} \qquad \frac{1}{2(\sqrt{4})_1} \neq 0$$

$$\lim_{z \to 4} \frac{(z^\alpha)_k (z-4)}{} = (4^\alpha)_k \lim_{z\to 4} \frac{z-4}{2+\cancel{\sqrt{(z)}}_1}$$

$$= (4^\alpha)_k \lim_{z\to 4} \frac{1}{\frac{1}{2(\sqrt{z})_1}} = \underset{\text{ramo } k}{(4^\alpha)_k} \underbrace{(2\sqrt{4})_1}_{\text{VALE } -4}$$

$$= -4 (4^\alpha)_k$$

$$4 = 4(\cos \underset{\text{ZERO}}{0} + i \operatorname{sen} 0) \qquad 4^\alpha = e^{\alpha \log 4} \cdot e^{\alpha 2k\pi i} = 4^\alpha e^{\alpha 2k\pi i}$$

Quindi il residuo dipende dal numero del ramo che (è k) messo nel risultato trovato sopra.

$$-4\left(4^{\alpha}\right)_k = -4\,4^{\alpha}\, e^{\alpha 2k\pi i}$$

A ciascun ramo corrisponde un diverso residuo.

15/11/96 Esercizi sulle funzioni analitiche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(mx)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx)\,dx$$

dove P e Q sono polinomi
e m è un numero reale positivo

IPOTESI $Q(x)$ non ha zeri reali

$m > 0$

Il grado di $P+1$ sia $\leq$ grado Q

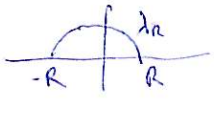
In queste ipotesi questi integrali esistono come integrali impropri

$$\lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx)\,dx$$

Queste ipotesi non garantiscono che la funzione sia sommabile.

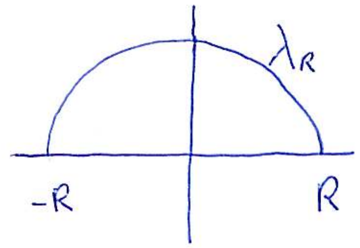
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \left|\operatorname{sen}(mx)\right| dx = +\infty$$

non si usa $\dfrac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{sen}(mz)$ infatti non funziona perché non va a zero quando R tende a $+\infty$



$$\boxed{\text{Si prende invece: } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}}$$

$m > 0$



$$\left| e^{im(x+iy)} \right| = e^{-my} \quad \text{ok.}$$

$$\left| e^{-im(x+iy)} \right| = e^{my}$$ con l'altra funzione, per cui quella non va bene

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$$

$\longrightarrow \cos mx + i \sin mx$

Ricordiamo il lemma del cerchio grande

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ y \geq 0}} z f(z) = 0 \Rightarrow \int_{\lambda_R} f(z) dz \to 0$$

L'integrale sulla curva è nullo per il lemma dell'arco di cerchio grande.

Lemma di Jordan

ATTENZIONE PER GLI INTEGRALI O QUESTO O IL LEMMA DEL CERCHIO GRANDE.

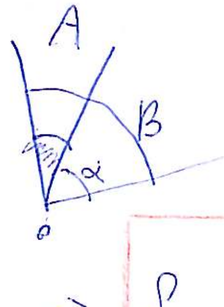
AMPIEZZA

$$A = \{ z \in C \quad |z| > \rho_0 \quad \alpha \leq \arg z \leq \beta \} \qquad \underbrace{0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi}$$

regione angolare

SIGNIFICA CHE L'AMPIEZZA MASSIMA DELL'ARCO È AL PIÙ UN SEMIPIANO

FONDAMENTALE



Ipotesi: la funzione $g(z)$ sia continua e

n.b.

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A}} g(z) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{R \to +\infty} \int_{\lambda} g(z) e^{imz} dz = 0} \quad \text{Dove } m > 0$$

ok.

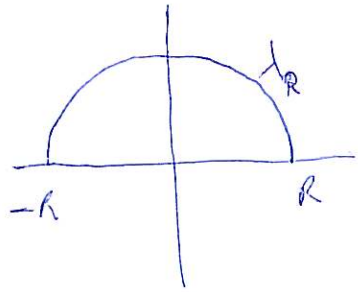
Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(3x)}{x^2+4x+8}\,dx$$ esiste come integrale improprio

$$f(z) = \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}$$ prendo questa funzione nel percorso

sostituisco il cos mx con e^{mxz}

$(x+2)^2+4$



Applichiamo il teorema dei residui

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\lambda_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathcal{R}(z_1)$$

$(z+2)^2 = -4$

$z+2 = \pm 2i$

$z_1 = -2+2i$

$\overline{z}_1 = -2-2i$

A Questo punto bisogna far tendere R all'infinito.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+4z+8} = 0 \qquad \lim_{R\to+\infty} \int_{\lambda_R} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}\,dz = 0$$

troviamo il valore principale calcolando il limite

$$V_p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\, \mathcal{R}(z_1)$$ ora "esiste come integrale improprio".

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{x}(\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x)}{x^2+4x+8} = 2\pi i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{residui}}}{\mathcal{R}}(z_1)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 3x}{x^2+4x+8}\,dx}_{a} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 3x}{x^2+4x+8}\,dx}_{b} = \underbrace{2\pi i\, \mathcal{R}(z_1)}_{\text{è un numero complesso } a+ib}$$

$$\mathcal{R}(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{(z-z_1)\, z e^{3iz}}{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)} = \frac{z_1 e^{3iz_1}}{z_1 - \bar{z}_1}$$

$$= \frac{\cancel{2}(-1+i)}{\cancel{4}^2 i} e^{3i(-2+2i)} = \quad 2\pi i\, \mathcal{R}(z_1) = \frac{(-1+i)\, e^{-6} e^{-6i}}{2i}\, 2\pi i$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(3x)}{x^2+4+8}\,dx = \operatorname{Re}\left[\pi e^{-6}(-1+i)(\cos 6 - i \operatorname{sen} 6)\right]$$

$$= \pi e^{-6}(-\cos 6 + \operatorname{sen} 6) \qquad \frac{x(1+\cos 6x)}{2(x^2+4x+8)^2}$$

$$\frac{x \cos 3x}{x^2+4x+8} \qquad \frac{x \cos^2 3x}{(x^2+4x+8)^2} \qquad z\, \frac{1+e^{6iz}}{z(z^2+4z+8)^2}$$

vediamo un altro esempio fatto su un integrale privo delle ipotesi iniziali grad P > grad Q m > 0 ecc.

è neccessario un altro lemma perché le cose possono non funzionare.

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x - 1)}{(2x-\pi)(x-\pi)} \, dx$$

Esaminiamo l'integrale.

per $x \to \pm\infty$ non ci sono problemi

Ci sono problemi dove si annulla il denominatore.

$x = \frac{\pi}{2}$ difatti $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{2x - \pi}$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2} = 0$

$x = \pi$ $\frac{-1}{0}$

non esistono separatamente da $-\infty$ a π e da π a $+\infty$ perché c'è un infinito del primo ordine e quindi non converge.

L'integrale esiste quando si prendono intervallini simmetrici rispetto a π

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\pi-\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{\pi+\varepsilon}^{+\infty} g(x)\,dx \right]$$

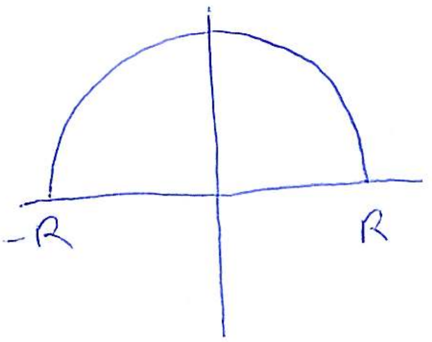
i due integrali possono essere infiniti, ma è finita la somma dei due ed è il v.p.

$$f(z) = \frac{e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} - 1}{(2z-\pi)(z-\pi)} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\overset{\nearrow\, = \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 1$$

La parte reale di questo complesso è proprio sen x

$$\operatorname{Re}\left\{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 1\right\} = \operatorname{sen} x - 1$$

Vediamo cosa succede sul percorso:



Vediamo se è olomorfa sul percorso.
Attenzione: stiamo studiando ora $f(z)$ e non quella dell'integrale.

per $z = \frac{\pi}{2}$

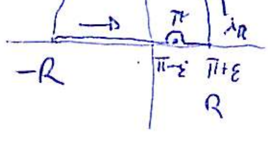
si ha $\frac{1-1}{0}$ pensando allo sviluppo dell'esponenziale si ha:

$$\frac{1 + i\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left[i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{2!} - 1}{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$$

nel punto $z = \pi$

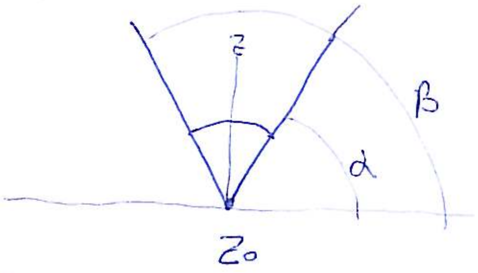
$$\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - 1}{0} = \frac{i-1}{0}$$

quindi c'è un polo semplice "non si può passare sopra a $z = \pi$



LEMMA DEL MEZZO RESIDUO

consideriamo ancora una volta una regione angolare B tale che



$$B = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho_0$$
$$\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta \}$$

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$$

IPOTESI Se:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B}} (z - z_0) f(z) = l$$

TESI allora:

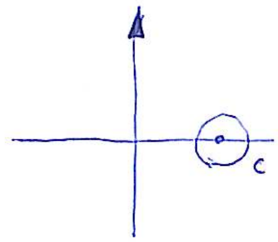
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\lambda_\varepsilon} f(z) dz = i (\beta - \alpha) l$$

raggio del semicerchio

valore dell'altro limite

È importante distinguere quando c'è un semicerchietto attorno al punto singolare e quando c'è un intero cerchietto. nel caso di cerchietto completo non è vero il limite, ma è:

$$\int_c \cdots = 2\pi i \, R(z_0)$$



Attenzione perché questa cosa è spesso fonte di errori

Inoltre è importante ricordare che il polo deve essere un polo semplice e non doppio (altrimenti non funziona più niente).

calcoliamo l'integrale

$$\int_{-R}^{\pi-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\lambda} f(z)\,dz + \int_{\pi+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{\lambda_R} f(z)\,dz = 0$$

perché sing. dentro al percorso non ce ne sono.

facciamo tendere ε a zero

e R a più infinito

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ y\geq 0}} z f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{\lambda_R} f(z)\,dz = 0$$

Dobbiamo prendere le maggiorazioni.

$$|zf(z)| \leq \frac{\left|e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}\right| + 1}{\left|(2z-\pi)(z-\pi)\right|}\,|z|$$

$$\left|e^{i\left(x+iy-\frac{\pi}{2}\right)}\right| = e^{-y} \leq 1 \qquad y \geq 0$$

da cui:

$$|f(z)| \leq \frac{2\,|z|}{\left|(2z-\pi)(z-\pi)\right|} \to 0$$

va a zero difatti $\dfrac{\cancel{|z|}}{|z|^{\cancel{2}}\left|2-\frac{\pi}{z}\right|\left|1-\frac{\pi}{z}\right|}$

Applichiamo il lemma del mezzo residuo (cerchiello) per il residuo

$$\lim_{z\to\pi} (z-\pi) f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)\left[e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} - 1\right]}{(2z-\pi)(z-\pi)} = \frac{i-1}{\pi}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\lambda_\varepsilon} f(z)\,dz = -i\cancel{\pi}\,\frac{i-1}{\cancel{\pi}} = 1+i$$

ora passo al limite di tutto l'integrale ricordando che non posso separare i due integrali che non esistono separatamente

legati tra loro

$$\int_{-R}^{\pi-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\lambda_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\pi+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{\lambda_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left[\int_{-R}^{\pi-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\pi+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \right] = -1-i$$

$$V.p. \int^{+\infty} f(x)\,dx = -1+i$$ è la somma dei due integrali. Questo V.p. non può essere buttato via.

$$\sin x - 1 = \mathrm{Re}\left[e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right]$$

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - 1}{(2x-\pi)(x-\pi)}\,dx = \mathrm{Re}\left[V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[-1-i\right] = -1$$

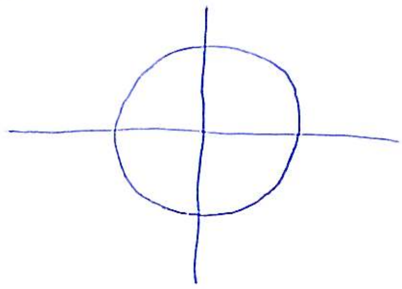
Vediamo un altro tipo di integrale

Funzione razionale di seno e coseno, con ipotesi tali che sia convergente

$$\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} = z \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$



$$= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

Vediamo un esempio

Consideriamo un integrale riconducibile a:

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2 + \cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2 + \cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}}{2 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

Faccio la sostituzione $e^{ix} = z$ ed ottengo:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{2 - (z^2 + z^{-2})}{\cancel{2}}}{\frac{4 + z + z^{-1}}{\cancel{2}}} \frac{dz}{iz}$$

Il numeratore è

$$2 - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{2z^2 - z^4 - 1}{z^2} = \frac{-(z^2 - 1)^2}{z^2}$$

$$= \frac{1}{i}\oint \frac{-\frac{(z^2-1)^2}{z^2}}{4z+z^2+1}\,dz = i\oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+4z+1)}\,dz$$

$z = -2 \pm \sqrt{4-1}$ $\qquad z_1 = -2+\sqrt{3}$ dentro

$\qquad z_2 = -2-\sqrt{3}$ fuori

$z = -2 \pm \sqrt{3}$ $\qquad$ uno è dentro e uno è fuori dal cerchio.

quindi ottengo:

$$= i\,2\pi i \left[R(0) + R(z_1) \right] = -2\pi \left[R(0) + R(z_1) \right]$$

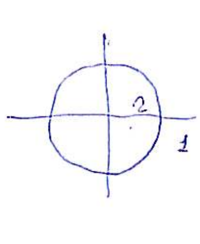
$$R(0) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z^2-1)^2}{z^2(z^2+4z+1)} \right]_{z=0}$$

$$R(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)(z^2-1)^2}{z^2(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{z_1^2-1}{z_1^2\,2\sqrt{3}}$$

attenzione: che la somma deve venire reale, infatti l'integrale è l'integrale di un numero reale, se viene un numero complesso abbiamo sbagliato.

Esercizio: Calcolare l'integrale esteso a c di:

$$\int_c \frac{\sin z}{z^m(1+z^2)}\,dz \qquad m = 1, 2, 3$$



Dove c è la curva che è una circonferenza di centro l'origine e raggio compreso tra zero e 1

$0 < R \leq 1$

$$\int \frac{\operatorname{sen} z}{z^n(1+z^2)}\,dz$$

$= 2\pi i \, R(0)$

per $n=1$ la funzione ha una singolarità eliminabile

$n=1 \quad R(0)=0$

per $n=$ c'è un polo di ordine $n-1$

Bisogna sviluppare il tutto in serie di Cauchy Laurent e vedere i coefficienti...

Se $n=$ dispari si ha una funzione pari.

quindi la serie di Cauchy Laurent ha solo termini pari quindi il residuo è nullo.

Dobbiamo considerare solo i casi in cui n è pari

$n = 2K$

$$\frac{1}{z^{2K}} \; \frac{\operatorname{sen} z}{1+z^2} \qquad \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{1+z^2}$$

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots\right)$$

$$z - \left(1 + \frac{1}{3!}\right)z^3 + \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)z^5 - \dots$$

In generale

$$(-1)^h \left(1 + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(2h+1)!}\right] z^{2h+1}$$

da cui si ricava il residuo.

$$c(0) = (-1)^{k-1}\left[1 + \frac{1}{3!} \dots\dots + \frac{1}{(2k-1)!}\right.$$

16/11/96

si consiglia di prendere $f(z)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx \qquad \frac{\log z}{(z-1)^2\sqrt{z}}$$

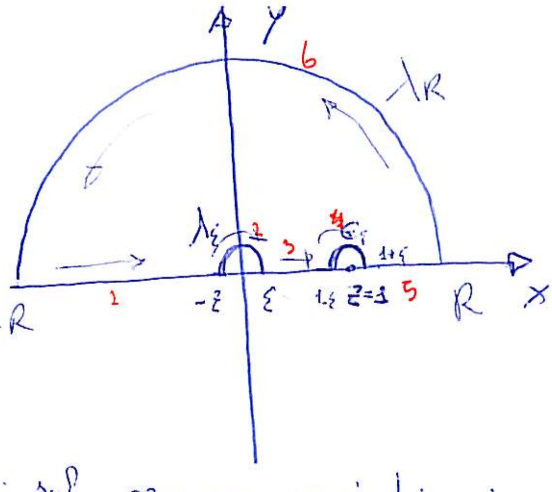
$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$$

Con queste definizioni la funzione è olomorfa. $(\sqrt{z})_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{2} + i\sin\frac{\arg z}{2}\right)$

Posso applicare il teorema dei residui

$$f(z) = \frac{\log z}{(z-1)^2 (\sqrt{z})_0}$$



si annulla in $z=1$

in $z=1$ c'è un polo

ora non ci sono buchi sul percorso quindi si può applicare il teorema dei residui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log x}{(x+1)^2 \cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}} = -\infty$$

vediamo qual'è l'ordine di infinito maggiore.

Proviamo a vedere cosa succede mettendo un infinito di ordine maggiore a denominatore

$$\alpha > \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\log x}{(x+1)^2 \sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \cancel{0}$$

Applichiamo il teorema dei residui

$$\boxed{\int_{-R}^{-\varepsilon}} \quad x = |x| (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\operatorname{Log} x = \log|x| + i\pi$$

$$(\sqrt{x})_0 = \sqrt{|x|}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{|x|}$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\log|x| + i\pi}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}\, i} dx + \int_{\lambda_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\log|x|}{(x-1)^2 (\sqrt{|x|}} dx +$$

$$+ \int_{\sigma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log|x| \, dx}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}} + \int_{\lambda R} f(z) dz = 0$$

QUI LA FUNZIONE VALE

$$x = |x| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$\operatorname{Log} x = \log|x|$$

$$(\sqrt{x})_0 = \sqrt{|x|}$$

Si è integrata la funzione a tratti

ora posso fare il cambio di variabile

$x = -t$

$$\int_{R}^{\varepsilon} \frac{\log|t| + i\pi}{(t+1)^2 \sqrt{|t|}\, i} (-dt) = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log|t| + i\pi}{(t+1)^2 i \sqrt{|t|}} dt$$

$$-i \int \frac{\log|t|}{(t+1)^2 \sqrt{t}} + \pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{(t+1)^2 \sqrt{t}} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\log|x|}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}} + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log|x| \, dx}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}} + \int_{\lambda_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\sigma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\lambda} f(z) dz = 0$$

ora applichiamo i lemmi

Lemma del cerchio grande

6) $\lim_{\substack{z \to \infty \\ y \geq 0}} z\, f(z) = 0 \qquad \lim_{R \to +\infty} \int_{\lambda R} f(z)\, dz = 0$

n.b "non applicare Hopital"

cerchiamo di riportarci a dei valori reali.

$$\left| \frac{z \operatorname{Log} z}{(z-1)^2 (\sqrt{z})_0} \right| = \frac{|z| \sqrt{\log^2 |z| + (\arg z)^2}}{|z-1|^2 |z|^{\frac{1}{2}}} \leq$$

$$\leq \frac{\cancel{|z|^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\log^2 |z| + \pi^2}}{|z|^{\cancel{2}\frac{3}{2}} \underbrace{\left| 1 - \frac{1}{z} \right|^2}_{\to 1}} \quad \text{se } |z| = \rho \text{ si ha}$$

$$\leq A \frac{\sqrt{\log^2 \rho + \pi^2}}{\rho^{\frac{3}{2}}} \to 0 \quad \text{per } \rho \to +\infty$$

essendo la funzione maggiorata da un'altra che va a zero va anch'essa a zero.

Passiamo ora al cerchietto λ_ρ

2) $\lim_{\substack{z \to 0 \\ y \geq 0}} z\, f(z) = 0 \Rightarrow \lim \int_{\lambda_\rho} f(z)\, dz = 0$

$$|z\, f(z)| \leq \frac{|z|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log^2 |z| + \pi^2}}{\underbrace{|z-1|^2}_{1} |z|^{\frac{1}{2}}} \leq B \underbrace{\rho^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log^2 \rho + \pi^2}}_{0}$$

Vediamo il cerchietto λ_ε

④ $$\lim_{z \to 1} \frac{\cancel{(z-1)} \operatorname{Log} z}{(z-1)^{\cancel{2}} (\sqrt{z})_0} = \lim_{z \to 1} \frac{\operatorname{Log} z}{z-1}$$

$$(\sqrt{1})_0 = 1$$

Qui si può applicare (H) perché la funzione Log è analitica regolare per $z=1$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\frac{1}{z}}{1} = 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)\, dz = -i\pi \cdot 1 = -i\pi$$ il segno meno deriva dal fatto che il cerchietto gira in senso opposto

$$-i \int_0^{+\infty} \frac{\log|t|}{(t+1)^2 \sqrt{|t|}} dt + \pi \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2 \sqrt{|t|}} +$$

$$\int_{-R}^{1} \frac{\log|x|}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}} dx +$$ DOVREBBE ESSERCI ANCHE QUESTO.

$$+ \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left[\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\log|x|}{(x-1)\sqrt{|x|}} dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log|x|\, dx}{(x-1)^2 \sqrt{|x|}} \right] = i\pi$$

ATTENZIONE PRENDERLI SOLO ASSIEME, PERCHÉ ALTRIMENTI NON ESISTONO

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\log|t|\, dt}{(t+1)^2 \sqrt{t}} = -\pi}$$

$$\pi \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{|t|}} + V.p. \int_0^{+\infty} \frac{\log|x|}{(x-1)^2 \sqrt{x}} = 0$$

classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{(z^2+4)\, sh(\pi z)}{ch\,(\pi z)} \left[sen\left(\frac{1}{\underbrace{\cos \frac{1}{z}}_{\text{definito per } z \neq 0}}\right) + \frac{\pi}{\pi z - 2} \right]$$

$ch\,(\pi z) - 1 = 0$

$z = 0$

$\cos \frac{1}{z} = 0$

$\pi z - 2 = 0$

Fuori da questi punti non ci sono singolarità

$ch \; w = 1 \quad \Rightarrow \quad w = 2k\pi i$

$\pi z = 2k\pi i \qquad z_k = 2ki \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$z_k = 2ki \qquad k \in \mathbb{Z}$ } sono possibili punti di singolarità.

$D\left[ch\,(\pi z) - 1\right] = \pi\, sh\,(\pi z) \qquad D^2\left[\quad\right] = \pi^2 ch\, \pi z$

zeri doppi di $ch\,(\pi z) - 1$

$\cos \frac{1}{z} = 0$ quando $\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + h\pi \qquad z_h = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + h\pi}$

$z_h = \dfrac{2}{\pi(1+2h)}$

$z_h = \dfrac{2}{\pi(1+2h)} \qquad D \cos \frac{1}{z} = + sen \frac{1}{z} \frac{1}{z^2}$

$\downarrow$

Sono zeri semplici di $\cos \frac{1}{z}$

per $h = 0$ corrisponde $z = \frac{2}{\pi}$.

$z_k = 2ki \qquad k \neq 0 \neq \pm 1$ sono zeri doppi di $\cosh(\pi z) - 1$

sono zeri semplici di $\operatorname{sh}(\pi z)$

sono poli semplici di $f(z)$

$z = \pm 2i$ sono anche zeri semplici di (z^2+4) quindi sono zeri doppi del numeratore e zeri doppi del denominatore, quindi sono singolarità eliminabili di $f(z)$.

$z_h \qquad h \neq 0$ sono poli semplici del reciproco, cioè

$\lim_{z \to z_h} \frac{1}{\cos \frac{1}{z}} = \infty$ dato che il limite per $w \to \infty$ del sen di w non esiste, succede che non esiste

$$\nexists \lim_{z \to z_h} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}\right)$$

z_h singolarità essenziali di $f(z)$

$z = \frac{2}{\pi}$ singolarità essenziale di $f(z)$

Integrale con percorso di tipo rettangolare $\qquad$ 19/2/94

Calcolare con il metodo dei residui

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{sh} x}\, dx \qquad -1 < a < 1$$

$\frac{e^{-az}}{\operatorname{sh} z}$ l'integrale esiste solo come valore principale nell'origine c'è un infinito del primo ordine.

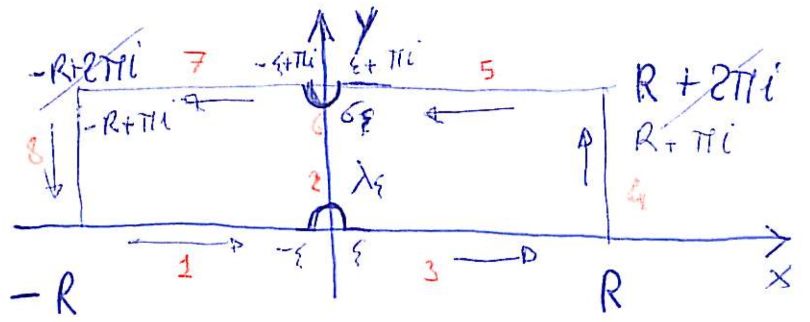
al denominatore c'è

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{per } x \to \infty \text{ è asintotico a } \frac{e^{-ax}}{\frac{e^x}{2}} = \frac{2}{e^{x(1+a)}}$$

Perché percorso rettangolare?

Perché $sh\,z$ ha infinite singolarità, e i percorsi di tipo circolare ne inglobano infinite $\to$ non si possono applicare i lemmi.

Quindi prendiamo un percorso di tipo rettangolare.



NEL TRATTO ORRIZZONT. IN ALTO $y = cost.$

$x = t$

$y = 2\pi$

$z = t + 2\pi i$

Quindi il seno iperbolico rimane uguale, mentre il numeratore è proporzionale.

$$\underbrace{\int_{-R}^{-\xi} f(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{\lambda_\xi} f(z)\,dz}_{2} + \underbrace{\int_{\xi}^{R} f_x\,dx}_{3} + \underbrace{\int_0^{\pi} f(R+it)\,i\,dt}_{4} + \underbrace{\int_{R}^{\xi} f(t+i\pi)\,dt}_{5} +$$

$$\star \quad \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

NEI TRATTI VERTICALI EFFETTUIAMO UN CAMBIO DI VARIABILE.

4 $\Downarrow$

$x = R$	$0 \le t \le \pi$
$y = t$	NEL TRATTO VERTICALE $x = cost$
$z = R + it$	

in 5 si ha

$\cancel{x} = t \qquad \xi \leq t \leq R$

$y = R$

$z = t + i\pi$

in verso discorde di valori crescenti di t

in 8

$x = -R \qquad 0 \leq t \leq \pi$

$y = t$

$z = -R + it$

$$+ \underset{6}{\int_{\sigma_\xi}} f(z)\,dz + \underset{7}{\int_{-\xi}^{-R}} f(t + i\pi)\,dt + \underset{8}{\int_{\pi}^{0}} f(-R + it)\,i\,dt = 0$$

Il valore principale che a noi interessa è:

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ R \to +\infty}} \left[\int_{-R}^{-\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{R} f(x)\right] = V_p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

se prendiamo il 5 si ha

$$5 = \int_R^{\xi} \frac{e^{-a(t+i\pi)}}{sh\,(t+i\pi)}\,dt = e^{-ai\pi} \int_R^{\xi} e^{-at}$$

$$sh\,(t+i\pi) = sh\,t\; ch(i\pi) + ch\,t\; sh(i\pi)$$ PER LE FORMULE DI ADDIZIONE DEL SENO

quindi

$$⑤ = \int_R^{\xi} \frac{e^{-a(t+i\pi)}}{sh\,(t+i\pi)}\,dt = e^{-ai\pi}\int_R^{\xi}\frac{e^{-at}}{-sh\,t}\,dt = e^{-ai\pi}\int_{\xi}^{R}\frac{e^{-at}}{sh}\,dt$$

$$= \int_{\xi}^{R} f(t)\,dt$$

analogamente per l'integrale 7 (è la stessa funzione)

$$⑦ = e^{-ai\pi}\int_{-R}^{-\xi} f(t)\,dt$$

$$①+⑦ = 1 + e^{-ai\pi}\int_{-R}^{-\xi} f(t)\,dt$$

L'integrale ③+⑤ invece $= \left(1+e^{-ai\pi}\right)\int_{\xi}^{R} f(t)\,dt$

Il tutto può essere scritto come:

$$\left(1+e^{-ai\pi}\right)\left[\int_{-R}^{-\xi} f(t)\,dt + \int_{\xi}^{R} f(t)\,dt\right] + \int_{\lambda_\xi} f(z)\,dz + \int_{\sigma_\xi} f(z)\,dz$$

$$+ \int_0^{\pi} f(R+it)\,i\,dt + \int_{\pi}^{0} f(-R+it)\,i\,dt$$

$$\left| \int_0^{\pi} f(R+it)\, i\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} |f(R+it)|\, dt$$

al posto di z mettiamo $R+it$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{-a(R+it)}\right|}{\left| \frac{e^{R+it} - e^{-(R+it)}}{2} \right|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-aR}}{|\operatorname{sh} R|} dt$$

al denominatore invece

$$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big| \qquad \frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{\big||a|-|b|\big|}$$

$$\frac{\left|e^{R+it} - e^{-R+it}\right|}{2} \geq \left| \frac{|e^{R+it}| - |e^{-(R+it)}|}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{R} - e^{-R}}{2} \right| = \operatorname{sh} R$$

$$\left| \int_{\pi}^{0} f(-R+it)\, i\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} |f(-R+it)|\, dt$$

Per i due pezzetti $\to$ lemma del mezzo residuo

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z e^{-az}}{\operatorname{sh} z} = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\lambda_\varepsilon} f(z)\, dz = -i\pi$$

$$\lim_{z \to i\pi} \frac{(z-i\pi)\, e^{-az}}{sh\, z} = e^{-a i\pi}$$

$$\lim_{z \to i\pi} \frac{1}{\cos z} = -e^{-a i\pi}$$

$$\left(1+e^{-ai\pi}\right) V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = i\pi \frac{\left(1-e^{-ai\pi}\right)}{1+e^{-ai\pi}}$$

vediamo se viene "come dovrebbe" un numero reale

$$= i\pi \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}} - e^{-ai\frac{\pi}{2}}}{e^{ai\frac{\pi}{2}} + e^{-ai\frac{\pi}{2}}} = \frac{\cancel{2} i \sin\left(a\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{2} \cos\left(a\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= -\pi\, \tan\left(a\frac{\pi}{2}\right)$$

22/11/96 1° compitino 2 dicembre ore 9 P2

Serie di Fourier

Si consideri, per cominciare una serie trigonometrica, essa è del tipo:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) = f(x) \qquad [-\pi, \pi]$$

Si fa l'ipotesi che essa converga uniformente verso $f(x)$ in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$

vista questa convergenza si può procedere all'integrazione per serie.

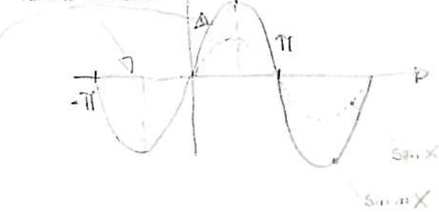
$$f \in C^0 [-\pi, \pi]$$

$$\frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx}_{\text{VALE } 0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx}_{\text{VALE ZERO}} \right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Con le ipotesi fatte vale perciò

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$$

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Prendiamo la serie di partenza e moltiplichiamola per $\cos x$

$$\frac{1}{2} a_0 \cos x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx \cos x + b_n \sin nx \cos x\right) = f(x)\cos x$$

La $\underbrace{\text{convergenza}}_{\text{uniforme}}$ si mantiene uniforme in $[-\pi, \pi)$ difatti la ridotta:

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_{ij} \sin(kx)$$

difatti esiste un p che soddisfa a:

la funzione a cui S_n converge.

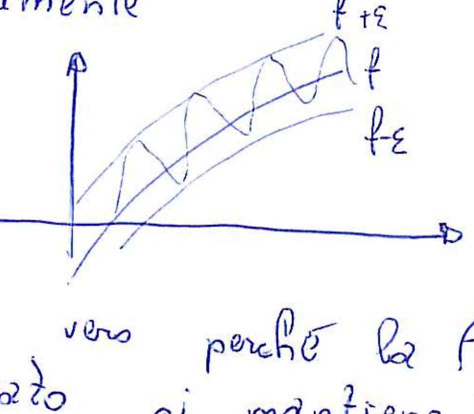
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, p(\varepsilon) \quad n > p \quad |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ciò vale

Def. di convergenza di una successione

- $\forall x \in [-\pi, \pi]$

graficamente



La ridotta oscilla dentro alla striscia se la $\underbrace{\text{convergenza}}_{\text{uniforme}}$ si mantiene.

ciò è vero perché la funzione per cui abbiamo moltiplicato si mantiene limitata.

se la funzione $g(x)$, abbiamo:

$$|g(x)| < K \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$S_n(x)\, g(x) - f(x)\, g(x) = K f(x)$$

tornando alla nostra funzione:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$ è il termine

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$

formule di prostaferesi $\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos\{(n+1)x\} + \cos\{(n-1)x\}\right] dx = 0 \quad n \neq 1$$

* Il tutto vale 0 per $n \neq 1$ e per $n=1$ vale π

Analogamente prendendo $\sin nx \cos x$, si vede che il tutto è una funzione dispari e quindi il suo integrale è nullo.

In definitiva rimane solo il coefficente di a_1, tutti gli altri danno contributo nullo.

Quindi viene:

$$a_1 \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

cioè $$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

Nulla cambiava se invece di moltiplicare per $\cos x$ moltiplicavo per $\cos mx$, quindi ottengo:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ \pi & \text{per } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{per } m = n = 0 \end{cases}$$

questa formula ci permette di ottenere tutti i coefficenti a_n.

Analogamente: moltiplicando la serie di partenza per un $\operatorname{sen}(mx)$ ovrei integrali del tipo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & \text{per } m = n \end{cases}$$

Quindi posso ricavare tutti i b_n

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx}$$

La dimostrazione della verità che b_n e a_n sono quelle funzioni, si trova nel fatto che l'intervallo di integrazione è di ampiezza $[-\pi, \pi)$.

Ciò si riassume dicendo che una successione di funzioni del tipo $f_1(x)$, $f_2(x)$ ... è ortogonale a b se:

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_n(x) f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ > 0 & \text{per } m = n \end{cases}$$

Se una serie trigonometrica converge uniformemente verso una funzione $f(x)$ allora i coefficienti a_n e b_n sono dati da quanto appena visto.

OCCHIO

Per essere sicuri che a_n e b_n esistano bisogna assicurarsi che: f sia sommabile in $-\pi, \pi$

$$f(x) \in \underset{\text{Spazio delle funzioni sommabili}}{L}[-\pi, \pi] \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$$

$$|f(x) \cos nx| \leq |f(x)| \quad |f(x) \sin nx| \leq |f(x)|$$

n.b.

Il prodotto di due funzioni sommabili può non essere sommabile.

Il prodotto di una f. sommabile per una che si mantiene limitata è una f. sommabile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \sim f$$

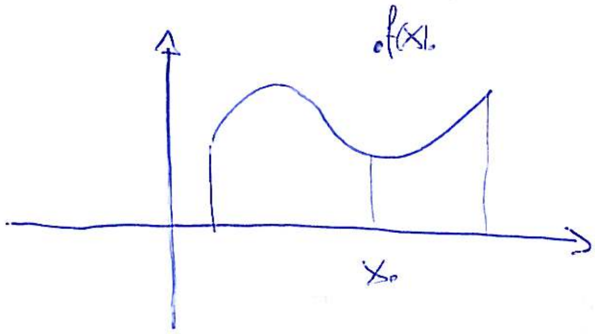
ci sono delle serie trigonometriche ad es:

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos nx + d_n \sin nx\right) = g(x)$$

* in cui non può esserci convergenza uniforme.

es: $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$$ non è la serie di Fourier perché non è sommabile.

osservazioni preliminari al calcolo



L'integrale non rileva la variazione del valore della funzione in un insieme di misura nulla.

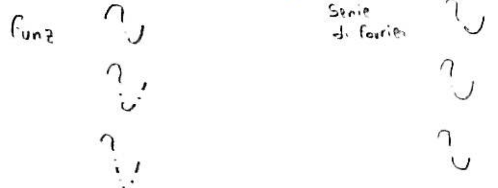
si ha

$$f, g \in L[-\pi, \pi]$$

$$f = g \text{ q.o in } [-\pi, \pi]$$

cioè le due funzioni hanno la stessa serie di Fourier

Si può dire che se la serie di Fourier converge verso una funzione f, essa converge anche su tutte quelle funzioni che differiscono da f per un insieme di misura nulla.



si vede che le tre serie hanno punti in cui sono diverse, ma hanno la stessa Ser. di Fourier, ma questa converge alla media sgangherata

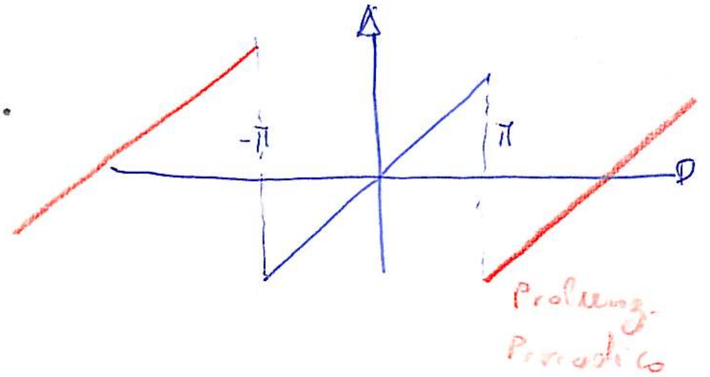
2ª osservazione

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left[n(x+2\pi)\right] + b_n \sin n(x+2\pi)\right\} = f(x+2\pi)$$

Se la Serie di Fourier converge verso $f(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, fuori dell'intervallo si ha la convergenza verso il prolungamento periodico

$$f(x) = x \quad [-\pi, \pi]$$

Se la Ser. di Fourier ha convergenza puntuale verso x nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, fuori da questo intervallo, essa converge al prolungamento periodico con periodo 2π.



$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \right)$$

Consideriamo la ridotta ennesima

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$$

i coefficenti a_k e b_k sono i soliti coefficenti di fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt$$

Sfruttando la periodicità della funzione, si elabora la ridotta S_n nel seguente modo

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \, D_n(z) \, dz$$

È INUTILE PER GLI ESERCIZI

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right]}{\operatorname{sin}\left(\frac{z}{2}\right)}$$

nucleo di Dirichleth

ha la proprietà che

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) \, dz = 1$$

Se come indicato l'integrale del nucleo vale 1, si ha che:

$$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\text{é una costante}}{f(x)}\, D_n(z)\,dz$$

L'abbiamo portato sotto il segno di integrale.

Vediamo quindi la differenza tra la ridotta ennesima e la funzione:

$$S_n(x) - f(x) = \overset{\text{SARÀ SPEZZATO IN 3 PEZZI}}{\int_{-\pi}^{\pi}} [f(x+z) - f(x)]\, D_n(z)\,dz$$

Se il $\lim_{n\to\infty}$ dell'integrale vale zero (se e solo se)

allora la F converge a $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} S(x) - f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)]\, D_n(z)\,dz = 0$$

TEOREMA DI LEBEGUE-RIEMAN

~ o ~ o ~ o ~ o

significa "é sommabile in $[a, b]$"

$$\varphi(x) \in L[a, b]$$

$$\lambda \in R$$

$$|e^{i\lambda u}| = 1$$

ció assicura che

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\,dx = 0$$

Se va a zero una $f(z)$ significa che va a zero sia la parte reale che la parte immaginaria.

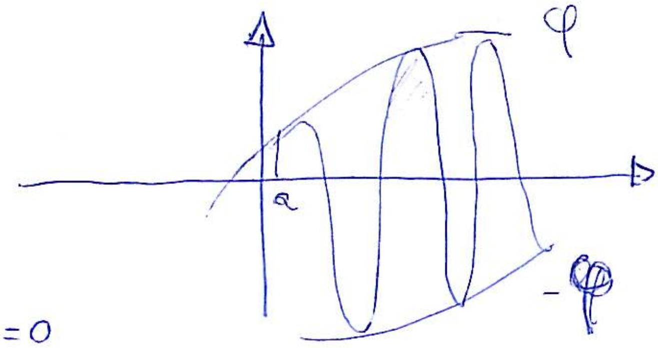
Quindi

$$e^{i\lambda x} = (\underbrace{\cos\lambda x}_{R} + \underbrace{i\,\mathrm{sen}\,\lambda x}_{i})$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0 \text{ (modulazione di frequenza)}$$

$$\cos \lambda x = 0$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\lambda}$$



$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int \varphi(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$$

quando λ va a più infinito le oscillazioni si infittiscono e l'integrale tende a zero.

~ o ~ o ~ o

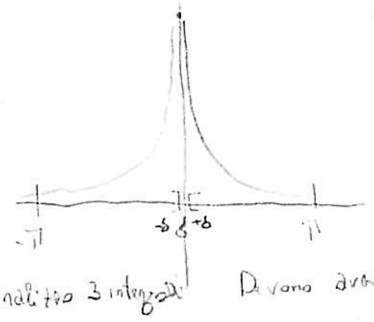
Nello studio precedente, notiamo che abbiamo una situazione analoga:
Quindi riprendendo da dove lasciato

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) z\right] dz$$

In $z=0$ il denominatore si annulla, quindi non sono più in grado di dire se il tutto è sommabile tra $-\pi$ e π.

L'unico problema si ha in zero, quindi se cambio l'intervallo di integrazione in modo da lasciare fuori il problema.

1) $$\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x+z) - f(x)}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} \qquad \delta > 0$$



Analizzo 3 integrali

Devono avere somma nulla.

sommabil × limitata = sommabile

$$\left| \frac{1}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} \right| < M \quad [-\pi, -\delta]$$

analogamente, dall'altra parte ho:

$$2)\ \lim_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{2\pi\sin(z/2)}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]dz=0\qquad\forall\delta>0$$

$$3)\ =\lim_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+z)-f(x)}{2\pi\sin(z/2)}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]dz=$$

il fatto della convergenza della serie di Fourier a $f(x)$ dipende dal comportamento della funzione in un punto..

$$=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)-f(x)$$

La convergenza della ? Serie di Fourier in un intorno arbitrariamente alla $f(x)$ è che l'integrale sia nullo ?

Criterio Dini "Per guardare nei punti sfigati" sono criteri di convergenza "con sufficienti"

Se fissato x $\exists\delta>0$: Se esiste δ

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\right|dz<+\infty$$

Se il rapporto incrementale nell'intervallo $-\delta,\delta$ è sommabile allora la funzione risulta sommabile.

L'ipotesi garantisce la sommabilità:

$$\underbrace{\frac{f(x+z)-f(x)}{\pi z}}_{\text{sommabile}}\ \underbrace{\frac{z/2}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\text{limitata}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]$$

ho riscritto la funzione moltiplicando e dividendo per z

Posso applicare il Dini: (è un'ipotesi che ci permette di affermare la sommabilità, quindi l'integrale va a zero).

Osservazioni   ipotesi: fissato $f'(x)$ la funzione è derivabile

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(x+z)-f(x)}{z} = f'(x)$$

vogliamo che questo rapporto sia limitato.

$$\left| \overbrace{\frac{f(x+z)-f(x)}{z}} \right| < M \qquad |z| \le \delta$$

Se la funzione è continua nel punto il limite è limitato.

$$|f(x+z)-f(x)| < M|z| \qquad |z| \le \delta$$

al dove però vale 1
ALTRIMENTI VEDI SOTTO

si dice che la funzione è Lipschitziana nel punto x considerato

affinché il rapporto incrementale sia limitato è sufficiente

$$|f(x+z)-f(x)| < M|z|^{\alpha} \qquad \alpha > 0$$

$$\left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| < \frac{M|z|^{\alpha}}{|z|} = \frac{M}{|z|^{1-\alpha}}$$

ha la maggiorante sommabile e quindi è sommabile.
(Caso particolare del criterio del Dini)

Si dice che la funzione è Hölderiana in x se esistono le tre costanti $M, \alpha, \delta > 0$ tali che

$$|f(x+z)-f(x)| < M|z|^{\alpha} \qquad |z| \le \delta$$

$$|f(x)-f(0)| < M|x|^\alpha \qquad |x|<\delta$$

in

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+1)\log(x)} & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\} \\ & x=0 \end{cases}$$

$\forall \alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

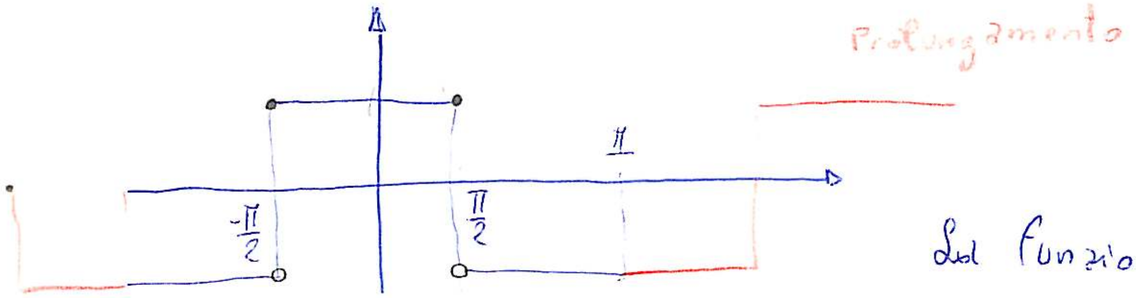
$$\lim_{x \to 0} |x|^\alpha \log|x| = 0 \qquad \frac{1}{(x^2+1)\log|x|\,|x|^\alpha}$$

Questa funzione è continua in $x=0$ ma non è Holderiana in $x=0$.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

prolungato per periodicità in $\mathbb{R}$



La funzione è PARI

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx\,dx\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ per } n = \text{pari} \\ \text{per } n = \text{dispari} = \dfrac{2}{\pi}\left\{\left[\dfrac{+\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\dfrac{\sin nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} = \dfrac{2}{\pi n}\, 2\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

quindi

$$a_0 = 0 \qquad a_n = \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ per } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi(2k+1)} \underbrace{\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{(-1)^k} \text{ per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

i b_n sono tutti nulli, infatti

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

perciò la serie di Fourier è:

$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left[(2k+1)x\right]$$

Studiamone la convergenza:

negli aperti $\frac{\pi}{2} < x < \pi \qquad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

la funzione è derivabile, perciò la serie di Fourier è proprio

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left[(2k+1)x\right] = \begin{cases} f(x) \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad \pi < |x| < \\ 0 \text{ per } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La somma della serie nei salti si vede dal occhio.

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left[(2k+1)\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

il coseno è nullo, quindi i termini della serie nei punti $\pm\frac{\pi}{2}$ valgono tutti zeri

ABBiamo visto che che:
CRITERIO DEL DINI PUNTUALE

$f \in L[-\pi,\pi]$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$

$\& \exists\ \delta>0 \quad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < +\infty$

Se i limiti sono finiti si ha la convergenza puntuale in x della serie di Fourier,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \text{numero} = f(x_0 - 0) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(S_n(x) - f(x) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \text{numero} = f(x_0+0)$$

$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ è la semisomma del valore dei limiti (salto) "vale solo se i limiti sono finiti

si considera la ridotta ennesima:

$$S_n(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+z)\, D_n(z)\, dz$$

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\, dz = 1$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x_0+z)\, D_n(z)\, dz + \int_{0}^{\pi} f(x_0+z)\, D_n(z)\, dz$$

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$\int_{-\pi}^{0} \left[\underline{f(x_0+z)} - f(x_0-0) \right] D_n(z)\, dz + \int_{0}^{\pi} \left[f(x_0+z) - f(x_0+0) \right] D_n(z)\, dz$$

Possiamo applicare il teorema di Rieman Lebegue, difatti il termine sottolineato vale

$$\frac{f(x_0+z)-f(x_0-0)}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) z$$

Per quanto riguarda il lato destro della funzione:

vediamo le Regole del Dini unilaterale ("condizioni")

$$\int_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x_0+z) - f(x_0-0)}{z} \right| dz < +\infty$$

$$\int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x_0+z) - f(x_0+0)}{z} \right| dz < +\infty$$

Bisogna che siano verificate tutte e due.
N.B. non sono dei rapporti incrementali in quanto confrontiamo la funzione con i limiti dx e sx.

Le condizioni di Hölder unilaterali dicono se sono sommabili

A>0

$$|f(\underbrace{x_0+z) - f(x_0+0)}_{\text{Limite DX "vedi criterio del Dini"}}| < A z^{\alpha} \quad 0<z<\delta$$

e analogamente

$$|f(x_0-z) - \underbrace{f(x_0-0)}_{\text{Limite SX "vedi criterio del Dini"}}| < A z^{\alpha} \quad 0<z<\delta$$

Devono essere verificate entrambi

Vogliamo ora vedere un criterio di convergenza uniforme.

È necessario avere un insieme di punti in cui la serie converge:
Vediamo se la serie converge uniformemente in quell'intervallo.

ammettiamo
Conv. puntuale $\forall x \in [a, b] \subset [-\pi, \pi]$

Chiediamoci se la serie converge uniformente.

Se le condizioni che assicurano la convergenza puntuale sono verificate uniformente per ogni punto dell'intervallo.

Vediamo il Criterio del Dini: per la conv. uniforme: IPOTESI sia $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$, f sommabile in $[-\pi,\pi]$ prolungabile per periodicità in $\mathbb{R}$, f limitata in $[a,b]$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < +\infty$$

(PER IPOTESI)

come conseguenza che questa è funzione sommabile, si ha:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz = 0$$

STRINGENDO L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE, L'INTEGRALE TENDE A ZERO

$\exists \delta_1$ (funzione di ε e x)

CONDIZIONI DEL DINI UNIFORMI:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1(\varepsilon, x) > 0 \quad 0 < \delta < \delta_1 \\ \forall x \in [a,b] \text{ VALE L'INTEGRALE} \\ \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < \varepsilon \end{cases}$$

Si verifica che δ_1 dipende solo da ε e

La dipendenza è tale che:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < \varepsilon$$

$$\forall x \in [a,b]$$

aggiungiamo l'ipotesi che $f(x)$ sia limitata in $[a,b]$

* conclusioni implica che:

Si ha la convergenza uniforme di tutta la serie in $[a,b]$

Questo è il criterio del Dini.

Cosa significa che la funzione è uniformente Holderiana nell'intervallo $[a,b]$.

Significa che:

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \; M > 0, \; \alpha > 0 \text{ tale che:} \\ |f(x+z) - f(x)| < M|z|^\alpha \qquad \forall x, \; x+z \in [a,b] \end{array}}$$

importante per verificare se una funzione è holderiana e di che ordine

QUESTO NON GARANTISCE LA CONVERGENZA IN $[a,b]$

Difatti non si hanno informazioni nel punto a solo dal suo intorno dx e in b solo del sinistro nei punti a, b non c'è informazione completa negli intorni di a, b.

Se vogliamo che le condizioni di Holder funzionino, bisogna restringere la funzione ad un intervallo chiuso contenuto in $[a,b]$.

Non è vero neanche se consideriamo (a,b) aperto.

n.b. stiamo parlando di convergenza uniforme.

C.U. $\forall [a+\eta, b-\eta] \quad \eta>0$

$$|f'(x)| < A \quad \forall x \in [a,b]$$ è la funzione derivata limitata in $[a,b]$

$$|f(x+z) - f(x)| = |f'(\xi)\cdot z| < A|z| \quad \forall x \quad x+z \in [a,b]$$

Le cose cambiano solo se l'intervallo diventa uguale a $[-\pi,\pi]$

inoltre $f(\pi) = f(-\pi)$

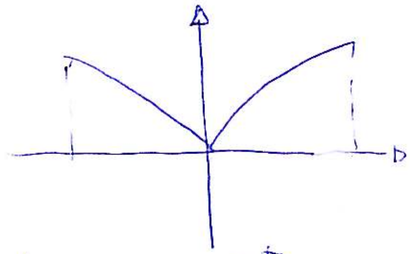
$$|f'(x)| < A \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

si ha convergenza uniforme in $[-\pi,\pi]$

Esempio

Prendiamo una funzione sommabile in $g \in [-\pi, \pi]$ (simmetrica rispetto all'asse y)

$$g(x) = g(-x)$$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = 0$$

trasformata di Fourier di g

$$g \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Se la serie converge a $g(x)$ si ha

$$g(x_0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x_0)$$

$$g(-x_0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(-n x_0) = g(x_0)$$

- Se $f \in L[0, \pi]$ sommabili

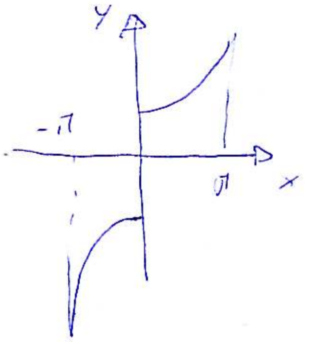
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \qquad g \in L[-\pi, \pi]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx =$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

quindi in $[0,\pi]$ si ha una serie di soli coseni.

analogamente si possono fare le funzioni di soli seni, prendendo delle $g(x)$ che siano dispari.



$$g \in L[-\pi,\pi] \qquad g(-x) = -g(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx$$

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$f \in L[0,\pi]$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

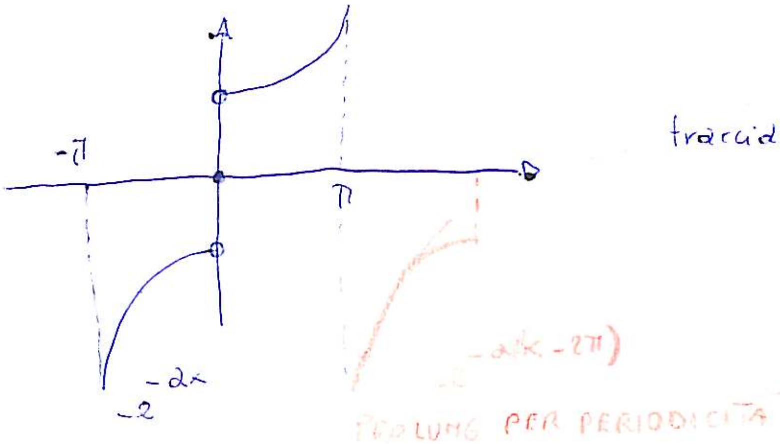
vediamo un nuovo esempio

ESERCIZIO

$f(x) = e^{\alpha x} \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \alpha > 0$

Ricordarsi che per le funzioni dispari si ha sempre $f(0)=0$

Vogliamo la serie di soli seni in $[0,\pi]$



tracciamo la funzione

I b_n sono dati da $b_n = \frac{2}{\pi}\int f(x)\,\text{sen}\, nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,dx$

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{n}{\alpha}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{n}{\alpha}\left\{\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{n}{\alpha}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\,\text{sen}\, nx\,dx\right\}$$

$$=\left(1+\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,dx = -\frac{n}{\alpha^2}\left[e^{\alpha\pi}(-1)^n\right]$$

$$=\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,dx = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n^2}\,\frac{n}{\alpha^2}\left[1-(-1)^n e^{\alpha\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{\alpha^2+n^2}\left[1-(-1)^n e^{\alpha\pi}\right]$$

$$f \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha^2+n^2}\left[1-(-1)^n e^{\alpha\pi}\right]\sin nx = \begin{cases} f(x) & 0<x<\pi \quad \text{Aperto } (0,\pi) \\ 0 & x = 0,\pi \\ -f(-x) & \end{cases}$$

In zero e π si vedono ad occhio i valori assunti
In $-\pi$ e zero vi ad prolungamento dispari

Vediamo che in zero soddisfa le condizioni di Hölder unilaterali.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\alpha x} = 1 = f(0+)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^{-\alpha x} = -1 .$$

confrontiamo la funzione a dx e a sx con i suoi rispettivi limiti

$$|f(x) - f(0+)| < A x^{\alpha} \qquad 0<x<\delta$$

$$|e^{\alpha x} - 1| < A x^{\alpha} \qquad 0<x<\delta$$

$$e^{\alpha x} - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$1 - \varepsilon < \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} < 1 + \varepsilon$$ a dx le cose vanno bene.

vediamo a sx

$$|f(x) - f(0^-)| < A(-x)^{\alpha} \qquad -\delta<x<0$$

$$|-e^{-\alpha x} + 1| < A(-x)^{\alpha}$$

$$|-e^{-\alpha x} - 1| = |e^{-\alpha x} - 1| \sim |x|$$

Soddisfa alle condizioni unilaterali di Lipschitz quindi va alla semisomma dei limiti (si vedeva anche a occhio).

pag 109

tornando alla nostra funzione si ha:

$$0 < x < \pi \qquad e^{\alpha x} \qquad |\alpha e^{\alpha x}| < M \quad \text{funzione limitata}$$

$\forall\, [\eta, \pi - \eta]$ c'è convergenza uniforme in $[-\pi + \eta, -\eta]$ per il criterio di holder uniforme

La convergenza unif. nel chiuso non assicura la medesima nell'aperto.

Supponiamo per assurdo che ci sia C.U. nell'aperto $]0,\pi[$

$$|S_n(x) - e^{\alpha x}| < \varepsilon \quad n > p(\varepsilon) \quad \forall x \in]0,\pi[$$

$$|S_n(0) - 0| < \varepsilon \quad n > p_1(\varepsilon)$$

$$|S_n(\pi) - 0| < \varepsilon \quad n > p_2(\varepsilon)$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

vediamo ora la:

La serie di soli coseni di $e^{\alpha x}$ è

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}\left[(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$|a_n \cos nx| \leq \frac{A}{n}$$

Quindi si vede che la serie di soli coseni approssima meglio la funzione.

Scriviamo la serie di Fourier di $1, \cos mx, \sin nx$

$f(x) \in L[-\ell,\ell]$ $\qquad \underbrace{x = \frac{\ell}{\pi} t}_{\text{cambio di variabile}}$ $\qquad -\pi \le t \le \pi$

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) = F(t) \in L[-\pi,\pi]$$

$1, \cos nt \ \sin nt$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \frac{\pi}{\ell} dx$$

$t = \frac{\pi}{\ell} x$

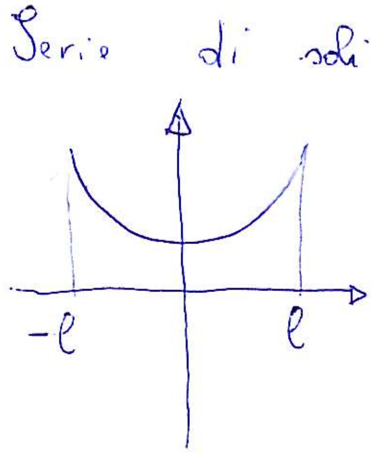
$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

quindi il sistema di funzioni $1, \cos nt, \sin nt$ diventa $1, \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ è un sistema ortogonale.

$$f \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

lunghezza del periodo

Serie di soli coseni in $[0,\ell]$ $\qquad f \in L[0,\ell]$



$1, \cos \frac{n\pi x}{\ell}$

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

"soli seni" in $[0,\ell]$ $\quad \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad f \in L[0,\ell]$

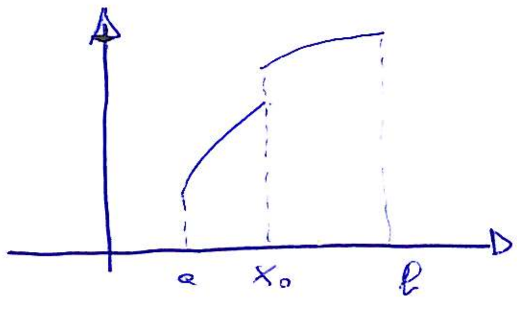
$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

29/11/96

$f \in L[-\pi,\pi]$ prolungata con periodo 2π

supponiamo $f(x)$ monotona $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$



$x_0 \in]a,b[$

$f(x)$ crescente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{a \le x \le x_0} \{f(x)\} = f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < x \le b} \{f(x)\} = f(x_0 + 0)$$

La somma dell'integrale di Fourier è la semisomma dei valori dei limiti dx e sx

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

? nel caso particolare che la funzione sia continua.

Questo è il criterio DI Dirichlet

Consideriamo una combinazione lineare di funzioni:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \qquad f_1(x),\ f_2(x) \text{ monotona in } [a,b]$$

Se chiamo $f(x)$ la comb. lineare delle funzioni,

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f_1 \sim \frac{1}{2}a_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \cos nx + b_n^{(1)} \sin nx$$

$$f_2 \sim \frac{1}{2}a_0^{(2)} + \dots\dots$$

$$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)}$$

$$b_n = \dots\dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$ se al posto di $f(x)$ metto $c_1 f_1 + c_2 f_2$

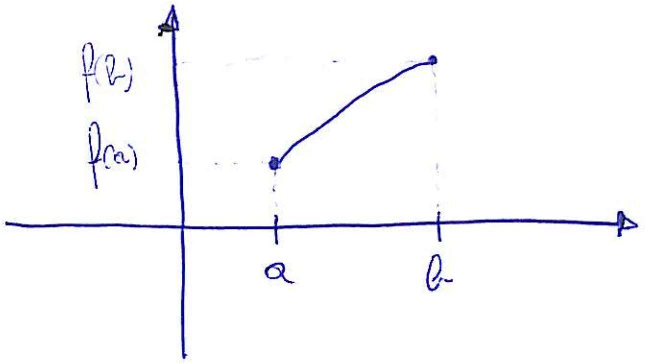
noto che si ritrovano proprio i coefficienti dati dalla serie di Fourier sopra citate.

In definitiva

I teoremi visti per le funzioni monotone valgono anche per la combinazione lineare di funzioni limitate

Queste sono funzioni a variazione limitata nell'intervallo a, b

Funz. a var. limitata.



prendiamo una funzione monotona nell'intervallo $[a, b]$

la variazione della funzione è data dalla differenza tra il valore assoluto di $f(b)$ e $f(a)$

cioè

$$\text{variazione} = |f(b) - f(a)|$$

Definizione di funzione a var. limit. nell'intervallo $[a,b]$

suddividiamo l'intervallo $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

$$= \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

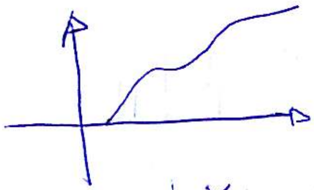
la funzione è a var. limitata in $[a, b]$ se esiste M tale che comunque si prenda la suddivisione dell'intervallo la somma non supera M

$$\sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$ ed inoltre

il $\sup \sum_{K=1}^{n} \left| f(x_K) - f(x_{K-1}) \right| = V[f, a, b]$

VARIAZIONE DELLA FUNZIONE IN $a\,b$

Sia $f(x)$ non decresente



$$x_{k-1} < x_k$$

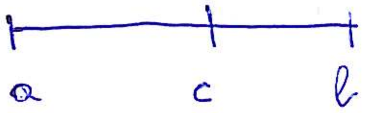
$$f(x_{k-1}) \leq f(x_k)$$

$|f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots$

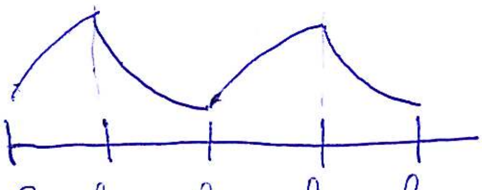
$\dots |f(b) - f(x_n)|$

$f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) \dots$

$\dots + \dots\dots\dots = f(b) - f(a)$

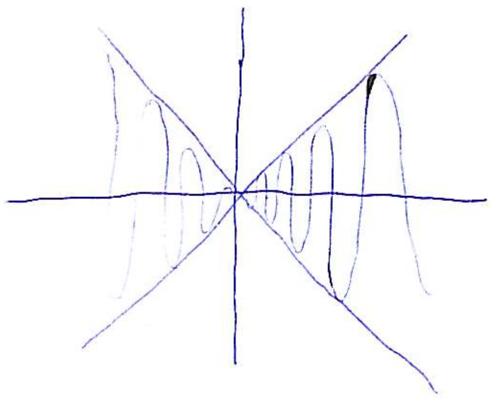


$V[f, a, b] = V[f, a, c] + V[f, c, b]$



$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in \left]0,1\right] \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$



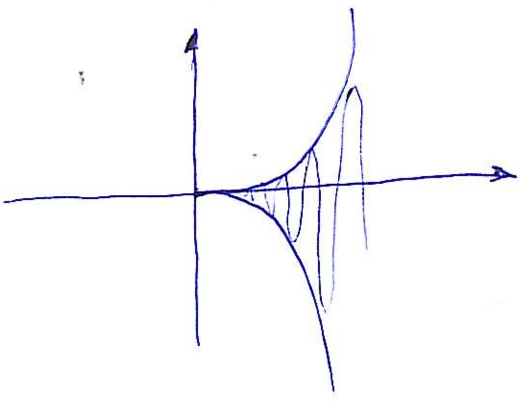
$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = K\pi$$

$$x = \frac{1}{K\pi}$$

è continua, ma non è a variazione limitata, infatti non è sufficientemente schiacciata in zero dalle due rette.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \in \left]0,1\right] \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



a variazione limitata in $[0,1]$

Condizioni di Dirichlet (caso particolare)

1) la funzione in $[a\,b]$ può essere suddivisa in un numero finito di intervalli, ed in ciascuno di esso la $f(x)$ è monotona.

$f(x)$ a variazione limitata in $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$

$f(x)$ cont in $[a,b]$

implica

Convergenza uniforme, non in a,b ma in un intervallo chiuso contenuto in a,b

C.U. serie di Fourier $[a+\eta, b-\eta]$ $\eta > 0$

Esercizio

Sia $f(x) = \begin{cases} h & x \in [0, \frac{l}{3}] \\ 0 & x \in]+\frac{l}{3}, 2\frac{l}{3}[\\ -h & x \in [2\frac{l}{3}, l] \end{cases}$ $h > 0$

Trovare la serie di soli seni in $[0,l]$ discutendo la convergenza puntuale o uniforme.

dedurre la somma di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{3}\right) \sin\frac{2k\pi}{3}$$

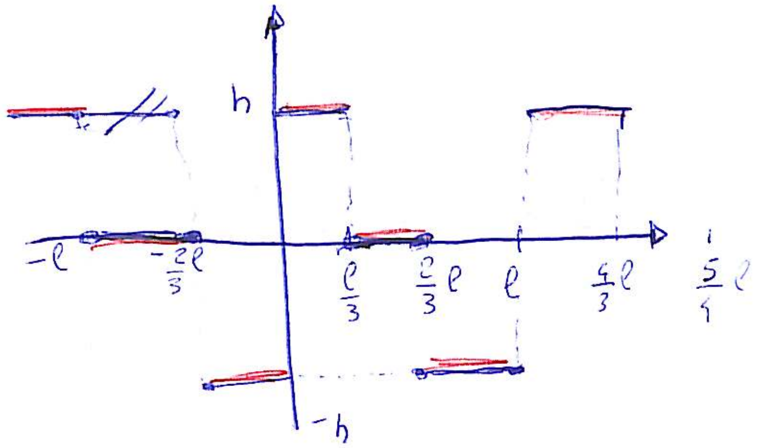
si chiede se la serie di Fourier converge uniformemente in $]0, \frac{l}{3}[$

e la convergenza puntuale verso f in $[\frac{l}{3}, \frac{2}{3}l]$

inoltre

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \quad x \neq \frac{l}{3} \quad x \neq \frac{2}{3}l \\ 0 & x = 0 \\ \frac{h}{2} & x = \frac{l}{3} \quad \frac{2l}{3} = x \end{cases}$$

Procediamo



La funzione va pensata prolungata dispari

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \quad [0, l] \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{l}\left\{\int_0^{\frac{l}{3}} h\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx - \int_{\frac{2l}{3}}^{l} h\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} = \frac{2}{l}\left\{-\frac{hl}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{\frac{l}{3}} +\right.$$

$$\left. + \frac{hl}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_{\frac{2l}{3}}^{l}\right\} =$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{3} + \cos(n\pi) - \cos\frac{2n\pi}{3}\right] =$$

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{3}\right) = \cos n\pi \, \cos\frac{n\pi}{3}$$

vedi addizione del coseno

$$b_n = \frac{2h}{n\pi}\left\{1-\cos\frac{n\pi}{3} + \cos n\pi\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\right\} =$$

$$= b_n = \frac{2h}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\left(1+\underset{(-1)^n}{\cos n\pi}\right) = \begin{cases} b_n = 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \frac{4h}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}\right) & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

$n = 2k$

$$\frac{4h}{2k\pi}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{3}\right) = b_{2k}$$

La serie di Fourier di f è

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2h}{k\pi}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\sin\frac{2k\pi x}{\ell} =$$

La somma della serie nei punti di discontinuità è la semisomma dei valori dei limiti (nei punti di discontinuità) Per criterio di Dini unilaterale.

$$= \begin{cases} f(x) & x \in \left]0,\ell\right[\setminus \left\{\frac{\ell}{3}, \frac{2\ell}{3}\right\} \\ 0 & \text{per } x = 0, \ell \\ \frac{h}{2} & x = \frac{\ell}{3} \\ -\frac{h}{2} & x = \frac{2}{3}\ell \end{cases}$$

escluso

pag 119

per quanto riguarda la convergenza.

C.U. $\left[\eta, \frac{\ell}{3}-\eta\right], \left[\frac{\ell}{3}+\eta, \frac{2}{3}\ell-\eta\right], \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2h}{k\pi}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\sin\frac{2k\pi}{3} = \frac{\cancel{h}}{2}\frac{1}{2\cancel{h}}$$

C.U. $\left[\eta, \frac{\ell}{3}-\eta\right]$ è falso C.U. $\left]0, \frac{\ell}{3}\right[$

Supponiamo per assurdo che ci sia C.U. $\left]0, \frac{\ell}{2}\right[$

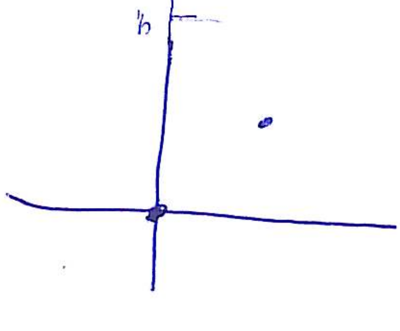
$$|S_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall n>p(\varepsilon) \quad \forall x\in\left]0, \ell/3\right[$$

$$|S_n(0)-0|<\varepsilon \quad n>p_1(\varepsilon)$$

$$\left|S_n\left(\frac{\ell}{3}\right)-\frac{h}{2}\right|<\varepsilon \quad n>p_2(\varepsilon)$$

La somma della serie in $0, \frac{\ell}{3}$ è

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & \left]0, \frac{\ell}{2}\right[\\ 0 & x=0 \\ \frac{h}{2} & x=\frac{\ell}{3} \end{cases}$$



$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in\left[0, \frac{\ell}{3}\right] \quad n>(p, p_1 p_2)$$

C.U. serie verso $S(x)$ in $\left[0, \frac{\ell}{3}\right]$

Siccome si vede che la funzione non è continua, si vede che non c'è convergenza uniforme.

attenzione!!!

$\forall x \in \left[\frac{\ell}{3}, \frac{2}{3}\ell\right]$ la somma della serie è $f(x)$?

Falso !!!

perché in quel punto la somma è $\frac{h}{2} \neq f\left(\frac{\ell}{3}\right) = h$ (in $x = \frac{\ell}{3}$)

$x = \frac{2}{3}\ell \qquad -\frac{h}{2} \neq f\left(\frac{2}{3}\ell\right) = -h$

La funzione $g(x)$ invece:

$$g(x) = f(x) \text{ quasi ovunque in } [0, \ell]$$

Se due funzioni sono uguali quasi ovunque hanno la stessa serie di Fourier.

$x = \frac{\ell}{3} \qquad \frac{h}{2} = g\left(\frac{\ell}{3}\right)$

$x = \frac{2}{3}\ell \qquad -\frac{h}{2} \neq g\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{h}{2}$

perciò non c'è convergenza puntuale in $\frac{\ell}{3}, \frac{2}{3}\ell$

Esercizio ATTENZIONE "COMPITO!!!"

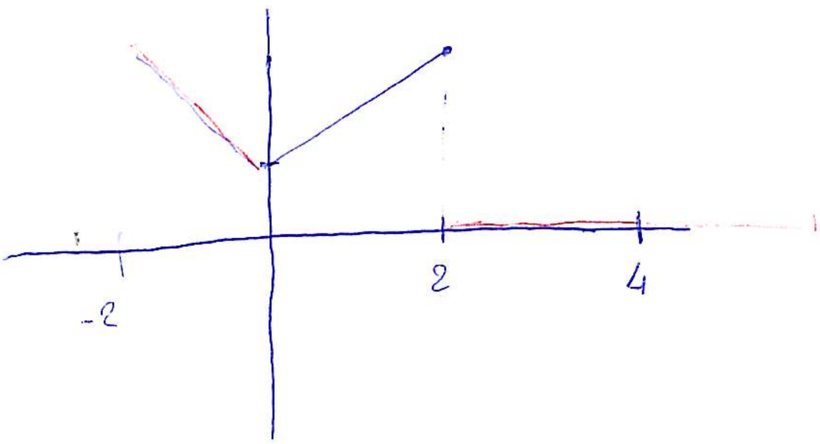
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2px & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \qquad p \in R$$

"soli coseni" in $[0,4]$ convergenza puntuale ....

$\exists p$ serie ha convergenza uniforme in $[-2,2]$ verso $f(x)$

$\exists p$ conv. unif. in $[-4,4]$ verso $f(x)$



prolunghiamo pari con periodo 8

$[0, \ell]$ $\quad 1, \cos\frac{n\pi x}{\ell}$ $\quad \ell = 4$

$[0,4]$ $\quad 1, \cos\frac{n\pi x}{4}$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (1 + 2px)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx \qquad n \neq 0 \qquad = \frac{1}{2}\left\{(1+2px)\frac{4}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_0^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{4}\, 2p\,dx\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{(1+4p)\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{8p}{n\pi}\frac{4}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_0^2\right\}$$

$$=\left(1+4p\right)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{16}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)=a_n$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2(1+2px)dx=\frac{1}{2}\left[x+px^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(2+4p)=1+2p$$

$$\frac{1+2p}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{4}$$

Vediamo la convergenza puntuale e uniforme.

La serie è lipschitziana in $[-2,2]$

Attenzione al prolungamento pari

$$\frac{1+2P}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{4}=\begin{cases}1+2p|x| & x\in\,]-2,2[\\ 0 & x\in\,]2,6[\\ \frac{1}{2}(1+4p) & x=2,6\end{cases}$$

c.u. in $[-2+\eta,2-\eta],[2+\eta,6-\eta]$

30/11/96 Finiamo l'esercizio di ieri

Ora una serie di soli coseni

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{4} = \begin{cases} 1+2p|x| & -2<x<2 \\ \frac{1}{2}(1+4p) & x=\pm 2 \\ b & 2<x<6 \end{cases}$$

$[-2,2]$

La somma della serie è in generale discontinua, ma p ci dà la possibilità di togliere la discontinuità.

$1+4p=0 \Rightarrow p=-\frac{1}{4}$

infatti..

Si ritrova che f è continua e a variazione limitata in $[-4,4]$

$f(-4)=f(4)$

c'è c.u. verso $f(x)$ in $[-4,4]$ $\quad \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{1}+4p}{2}=0$

Fine esercizio

Esercizio

Sia

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\operatorname{tg}x|\ 1-(\operatorname{sen}x)}{x} & x\in\,]0,2[\,\setminus\{\pi/2\} \\ \dfrac{1}{\pi} & x=0,\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} p>0 \\ p\in\mathbb{R}\end{matrix}$$

Trovare i valori di p per i quali f ammette serie di Fourier in $[0,2]$.

(α) Determinata tale serie se ne discuta la convergenza in $]0,2[$

si chiede se $f(x)$ è Lebesgueiana in $x=\frac{\pi}{2}$

NOTA: QUANDO SI CHIEDE SOLO SERIE, SI INTENDE SERIE COMPLETA DI FOURIER.

Vediamo se ci sono punti di singolarità nell'intervallo 0,2 ci sono problemi in 0 e $\frac{\pi}{2}$ vediamo cosa succede in $x=0$

$\operatorname{tg} x \underset{\text{assintotico}}{\sim} x$ per $x \to 0^+$ $\quad |\operatorname{tg} x|^p \sim |x|^p$ per $x \to 0$

$$f(x) \overset{\text{per } x\to 0^+}{\sim} \frac{|x|^p}{x} = \frac{1}{|x|^{1-p}}$$

$$|f(x)| \sim \frac{1}{|x|^{1-p}} \quad x \to 0^+ \qquad 1-p<1$$

per ogni p positivo la funzione è sommabile nell'intorno di zero.

Vediamo per $x = \frac{\pi}{2}$

c'è una zero doppio dato da $(1-\sin x)$ perchè c'è una zero dell'ordine $(1-\sin x)^2$

Facciamo un confronto

pag 125 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{\cos x}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = (H) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin x} = 1$$

$$\operatorname{tg} x \sim -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{per } x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\operatorname{tg} x| \sim \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \quad \text{per } x \to \frac{\pi}{2}$$

$$|\operatorname{tg} x|^p \sim \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^p}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = (H) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{+\sin x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin x \underset{\text{Asintotico}}{\sim} \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{per } x \to \frac{\pi}{2}$$

$$|f(x)| = |f(x)| \sim \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^p} \frac{1}{2} \left|x - \frac{\pi}{2}\right|^2 \frac{2}{\pi}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{p-2}} \quad \text{per } x \to \frac{\pi}{2}$$

È sommabile se $p - 2$ o è ≥ 0 o è ≤ 0 oppure è > 0 ma più piccolo di 1, cioè

$$p - 2 < 1 \Rightarrow p < 3$$

quindi riassumendo

$0 < p < 3$ La funzione è sommabile in 0,2 se p è compreso tra 0 e 3

Il sistema ortogonale è: $\quad$ intervalli equivalenti

$$1, \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \qquad [-l, l] \quad [0, 2l]$$

$$1, \cos(n\pi x) \sin(n\pi x) \qquad l = 1$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^2 f(x)\cos(nx\pi)\,dx$$

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$\alpha_p \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\right]$$

La funzione è derivabile in $[0,2]$ escluso $\frac{\pi}{2}$

$$f(x) \text{ deriv }]0,2[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

per il criterio del Dini la somma $S(x)$ della serie è

$$S(x) = \; f(x) \quad x \in]0,2[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{p-2}} = \begin{cases} 0 & p-2<0 \quad \boxed{0<p<2} \\ \frac{1}{\pi} & p-2=0 \quad \boxed{p=2} \\ +\infty & p>0 \quad \boxed{2<p<3} \end{cases}$$

prendiamo in considerazione $0<p<2$

$$0<p<2 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\frac{1}{\pi}}$$

La funzione non è continua $\Rightarrow$ non è holderiana, ma potrebbe soddisfare alle condizioni di Holder unilaterali:

$$\Big| f(x) - \underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}+0\right)}_{0 \text{ il limite}} \Big| < A\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \qquad 0 < x-\tfrac{\pi}{2} < \delta$$

$$\Big| f(x) - \underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}-0\right)}_{0 \text{ il limite}} \Big| < A\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha} \qquad 0 < \tfrac{\pi}{2}-x < \delta$$

$$|f(x)| = f(x) \sim \frac{1}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{2-p} \qquad 2-p>0$$

per $0<p<2$ la $f(x)$ soddisfa le condizioni di holder unilaterali (non di holder e basta) infatti ho analizzato i limiti dx e sx ed essi sono nulli.

<u>Vediamo $p=2$</u>

$$p=2 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

La funzione è continua in $x=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ è Holderiana:

$$\left|f(x) - f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| < A\left|x-\tfrac{\pi}{2}\right|^{\alpha}$$

$$\left|f(x) - \tfrac{1}{\pi}\right| < A\left|x-\tfrac{\pi}{2}\right|^{\alpha}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^2(x)(1-\sin x)}{\ldots} & x\in\,]0,2[\, \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2}\right\} \\ \tfrac{1}{\pi} & x=\pi \end{cases}$$

prolungando per continuità si ha.

$$\frac{\sin^2 x \ (1-\sin x)}{\cos^2 x \ x}$$ che risulta essere addirittura analitica

$\exists f'(\frac{\pi}{2})$ se una funzione è derivabile nel punto è holderiana di ordine 1 e quindi è Lipschitziana.

ESERCIZIO

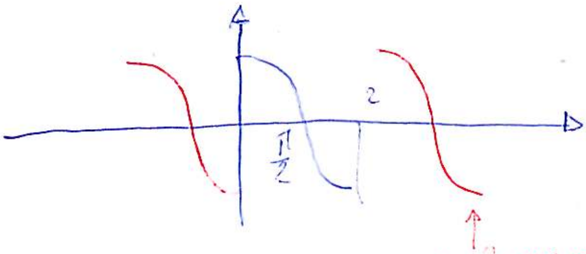
Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativi a f in $[0,2]$ e se ne scriva conv. puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$

posto $g(x) = \begin{cases} \cos x & x \text{ razionale} \in [0,2] \\ 1 & x \text{ irrazionale} \in [0,2] \end{cases}$

"soli seni" di g in $[0,2]$ se esiste qualche intervallo la serie converge unifor. verso $g(x)$ e verso altre funzioni

La funzione è

$f(x) = \cos x \quad x \in [0,2]$ "soli seni" in $[0,2]$



bisogna pensarla prolungata dispari in $(-2,0)$

prolungamento periodico di periodo 4 dispari (simmetrico rispetto all'origine)

$\sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad [0,\ell] \qquad \sin \frac{n\pi x}{2} \quad [0,2]$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 \cos x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

questo è l'integrale da calcolare.

$$b_n = \int_0^2 \cos x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\left[\left(\frac{n\pi}{2}+1\right)x\right] + \sin\left[\left(\frac{n\pi}{2}-1\right)x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}+1\right)x}{\frac{n\pi}{2}+1} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}-1\right)x}{\frac{n\pi}{2}-1}\right]_0^2\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(2+n\pi)-1}{\frac{n\pi+2}{2}} + \frac{\cos(n\pi-2)-1}{\frac{n\pi-2}{2}}\right]$$

$$\cos(2+n\pi) = \cos 2\cos n\pi = (-1)^n\cos 2$$

$$\cos(2-n\pi) = \cos 2 \cos n\pi = (-1)^n \cos 2$$

allora i numeratori sono uguali, quindi li posso raccogliere.

$$-\left[(-1)^n\cos 2 - 1\right]\left[\frac{1}{n\pi+2}+\frac{1}{n\pi-2}\right] = \left[1-(-1)^n\cos 2\right]\frac{n\pi-\cancel{2}+n\pi+\cancel{2}}{n^2\pi^2-4} =$$

$$= \frac{2n\pi}{n^2\pi^2-4}\left[1-(-1)^n\cos 2\right] = b_n$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi\left[1-(-1)^n\cos 2\right]}{n^2\pi^2-4}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

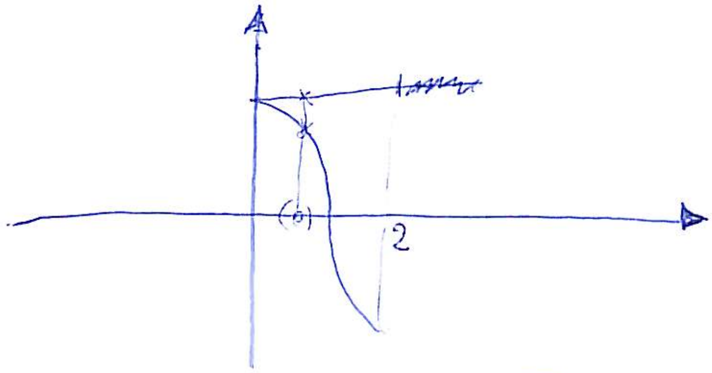
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi\left[1-(-1)^n \cos 2\right]}{n^2\pi^2-4} \sin\frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} \cos x & 0<x<2 \\ 0 & \text{per } x = [0,2) \\ -f(-x) & -2<x<0 \end{cases}$$

$[\varepsilon, 2-\varepsilon] \quad |f'(x)| < M$

c.u. $[\varepsilon+\eta, 2-\varepsilon-\eta]$ c.u. $[\delta, 2-\delta]$

[

La funzione $g(x)$ non siamo in grado di disegnarla. difatti è discontinua ovunque (è data da due curve sovrapposte che, zero a parte, salta sempre tra due valori di ordinata).



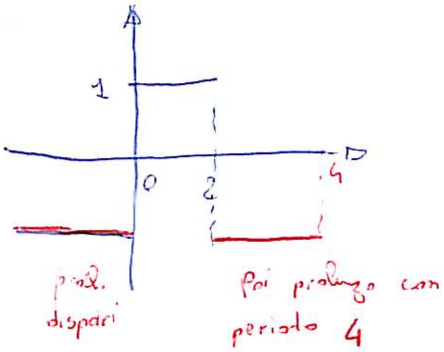
$g(x) = 1$ quasi ov. $[0,2]$

$$\int_0^2 g(x)\, dx = \int_0^2 1\, dx = 2 \qquad g \in L[0,2]$$

quindi la funzione è sommabile in $[0,2]$ in quanto differisce solo in insiemi di misura nulla

Esiste quindi la serie di Fourier

pag 131



$$\begin{cases} 1 & 0 \le x \le 2 \\ \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$\Downarrow$

b_n sono 0 per n pari

b_n sono $\frac{4}{n\pi}$ per n dispari

in altre parole $\frac{4}{(2K+1)\pi}$ per $n = 2K+1$

$$g \sim \sum_{K=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2K+1)} \sin\frac{(2K+1)\pi x}{2}$$

C.U. verso 1 nell'intervallo $[\eta, 2-\eta]$

C.U verso -1 nell'intervallo $[-2+\eta, -\eta]$

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{|\operatorname{sen} x|}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{[\log(1+\sqrt{x})]^{p}} & x \in \left]0, 4\right[\setminus \{1, \pi\} \\ & x = 0, 1, \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$

determinare : quali $p > 0$ per $f(x)$ serie completa in $[0,4]$

$-\ (\alpha_p)$ conv $]0,4[$

$-\ p=1 \quad p=4$ soddisfa a condizioni di holder unilaterali in $x=0$

per $p=4$ ho variazione limitata in $[0,3]$

1) passo

Vediamo se è sommabile

$x=0$ singolarità

$x=\pi$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \text{numero} \quad \text{ok.}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = (H) \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{1} = -1$$

quindi

$$\sin x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{asintotico}}}{\sim} -(x-\pi) \text{ per } x \to \pi$$

$$|\sin x| \sim |x-\pi| \text{ per } x \to \pi$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\sin x|}} \sim \frac{1}{\sqrt{|x-\pi|}}$$

è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ e quindi è sommabile in $x=\pi$

Analizziamo $x=0$

$$x \to 0^+ \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$

moltiplico sotto e sopra per $\sqrt{x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{x \operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{x \operatorname{sen} x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)}$$

Vediamo a cosa è asintotico "passare agli sviluppi"

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x\, 2\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{x^3}{3!}}{2x\sqrt{x}} \sim \frac{x^{\frac{3}{2}}}{12}$$

quindi il denominatore è asintotico a $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{12}$

$$\log\left(1+\sqrt{x}\right)^p \sim \left(\sqrt{x}\right)^p = x^{\frac{p}{2}}$$

per $x \to 0^+$

$$\left|f(x)\right| \sim \frac{x^{3/2}}{12}\,\frac{1}{x^{p/2}} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{x^{\frac{p-3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p-3}{2} < 1 \qquad p<5$$

perciò la funzione è sommabile in $0<p<5$

il sistema ortogonale è

$$1,\ \cos\frac{n\pi x}{2},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

La fase non è limitata per $p=4$

[illegible]
8-10-? [illegible]

SECONDA PARTE.

06/12/96

Integrale di Fourier

È una trasformazione integrale.

Sono operatori che ad una funzione appartenente ad un certo spazio associano una funzione diversa nello spazio di arrivo diverso dal quello di partenza

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2$$

$$f \in V_1 \rightarrow T(f) \in V_2 \qquad T(f) = \int_E f(t)\, k(t,\lambda)\, dt$$

tempo REALE

$$f \in L(\mathbb{R}) = V$$

se c'è i è trasformata di Fourier

$$\boxed{\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Tutte le trasformate integrali sono operazioni lineari

Si può parlare di funzioni trasformabili secondo Fourier solo per quelle funzioni percui vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$$

tutte le funzioni sommabili

se

$f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$ non varia nulla "l'integrale non se ne accorge se la funzione varia in un insieme di misura nulla".

Funzioni diverse possono avere la stessa trasformata di Fourier

Se $f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$

* la trasformata di Fourier di f è uguale alla trasformata di g.

BANALE DA DIMOSTRARE

Dimostrare il contrario è difficile, ma vero.

ESISTE L'ANTITRASFORMATA

Se $f \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\ \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)$

se nel fissato punto t la funzione soddisfa il criterio del Dini,

cioè

$$f(t) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t+z) - f(z)}{z} \right| dz < +\infty$$

Allora la formula di inversione mi restituisce proprio la $f(t)$ in quel punto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda}$$

Questo integrale va inteso come $\lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{M} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda$

VALE ANCHE PER UNA FUNZ. A VAR. LIMITATA.

Se siamo in un intervallo $t \in \,]a, b[$ la funzione è a variazione limitata si ha

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

la semisomma dei valori dei limiti.

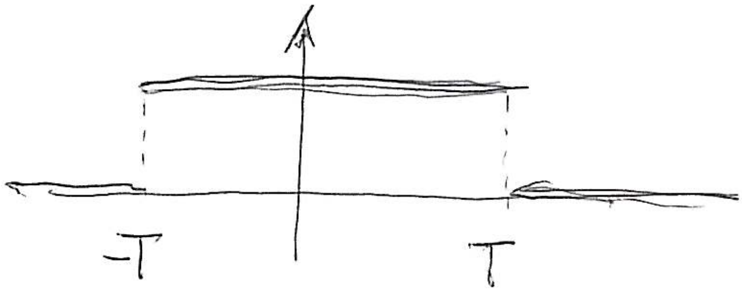
Se la f soddisfa il criterio del Dini si ha che la formula di inversione restituisce o la semisomma del valore dei limiti o il valore di f nel punto, se è ivi continua.

Dimostrare che se f è sommabile in $\mathbb{R}$ non è detto che la sua trasformata lo sia in $\mathbb{R}$.

DIMOSTRIAMO CHE:

se $f \in L(\mathbb{R})$

non è detto che $\hat{f}(\omega) \not\in L(\mathbb{R})$



$$p_T = \begin{cases} 1 & x \in [0, T] \\ 0 & x < T \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-i\lambda t}\, dt = \left[\frac{e^{-i\lambda T}}{-i\lambda}\right]_{-T}^{T} = \frac{e^{i\lambda T} - e^{-i\lambda T}}{2i\lambda}\, 2 =$$

Formule di Eulero

$$= \frac{2\sin(\lambda T)}{\lambda} \qquad \lambda \neq 0$$

oscilla quindi non è sommabile.

se $\lambda = 0$

$$\int_{-T}^{T} 1\, dt = 2T = \lim_{\lambda \to 0} \frac{2\sin(\lambda T)}{\lambda T}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2\sin(\lambda T)}{\lambda} \notin L(\mathbb{R})$$

difatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda T)}{\lambda} = \lim_{\substack{h \to +\infty \\ k \to -\infty}} \int_{0}^{h} \quad \ldots \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin(\lambda T)}{\lambda}\right| d\lambda = +\infty$$

DIVERGE c.v.d.

pag 137

Se una funzione è sommabile in $\mathbb{R}$ non è detto che la sua trasformata sia sommabile.

~~cosen~~ trasformata di Fourier

$$f \in L(\mathbb{R}) \quad f \text{ pari} \Rightarrow f(t) = f(-t)$$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t)\right] dt =$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt}$$

Sono nulli tutti i b_n perché la funzione è pari "Serie di fourier"

è la coseno-trasformata di fourier della funzione.

Che significato ha?

$$f \in L[0, +\infty)$$

$$\boxed{\text{la coseno-trasformata è: } \hat{f}_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt}$$

nel caso particolare che $g \in L(\mathbb{R})$ PARI

* $\mathcal{F}(g) = 2 \mathcal{F}_{\cos}(g)$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda}$$

Anticoseno-Trasformata di Fourier

* Se $f \in L(\mathbb{R})$ f dispari $f(t) = -f(-t)$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = \boxed{-2i \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt}_{\text{Sen trasformata di Fourier}}} =$$

$$= -2i \hat{f}_s(\lambda)$$

quindi abbiamo trovato per le funzioni dispari

$$f \in L[0, +\infty)$$

$$f(y(\lambda)) = \int_0^{+\infty} f_s(t) \sin(\lambda t)\, dt$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f_s(\lambda) \sin(\lambda t)\, d\lambda}$$

Vediamo le proprietà

1) se $f \in L(R)$ LIMITATEZZA

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \qquad \omega \in R$$

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-i\omega t}|\, dt = \ell$$

le trasformate sono funzioni limitate in R

2) Una trasformata è sempre infinitesima per $\omega \to \infty$ per ogni valore di t

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right| < \varepsilon \qquad |\omega| > \omega_0$$

QUANDO C'È UNA DISCONTINUITÀ:

$$= \left| \int_{-\infty}^{-M} f(t) e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-M}^{M} f(t) e^{-i\omega t}\, dt + \int_{M}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{-M} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| + \left| \int_{-M}^{M} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| + \left| \int_{M}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

Siccome

con $M>0$

$$\left| \int_{-\infty}^{-M} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-M} |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{0} |f(t)| dt + \underbrace{\int_{0}^{-M} |f(t)| dt}$$

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{0}^{-M} |f(t)| dt = \int_{0}^{-\infty} |f(t)| dt$$

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(t)| dt < \varepsilon \quad M > M_0 \quad \int_{M}^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$$

$$\left| \int_{-M}^{M} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| < \varepsilon \qquad |\omega| > i\omega_0$$

Applico Riemann Lebesgue

$$\varphi \in L [a,b] \qquad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{a}^{b} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

Riassumendo

1) $|\hat{f}(\omega)| < K \quad \forall \omega \in R$ (funz. limitata)

2) $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ (infinitesima per $\omega \to \infty$)

3) uniformemente continua in R ($\hat{f}(\omega)$ cont. in R se $\forall \omega_0 \in R$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, \omega_0)$

($|\omega - \omega_0| < \delta$ $|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| < \varepsilon$ per tutti i punti della retta

Una funzione continua in R può non essere uniformemente continua.

Una funzione $\hat{f}(\omega)$ è uniformemente continua in R

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \delta(\varepsilon)$

$|\omega_1 - \omega_2| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(\omega_1) - \hat{f}(\omega_2)| < \varepsilon$ qualunque sia

la posizione del punto in esame sulla retta..

Esempio di funzione continua in R ma non

uniformemente continua

$$|\omega^2 - \omega_0^2| = |\omega - \omega_0| |\omega + \omega_0| < \varepsilon$$

$$|\omega - \omega_0| < \frac{\varepsilon}{|\omega + \omega_0|}$$

CHIARA La condiz. sufficiente è $|g'(\omega)| < K \quad \forall \omega \in R$

$$|g(\omega_1) - g(\omega_2)| = |g'(\xi)| \, |\omega_1 - \omega_2| < K |\omega_1 - \omega_2| < \varepsilon.$$

$$|g(\omega_1) - g(\omega_2)| < A |\omega_1 - \omega_2|$$

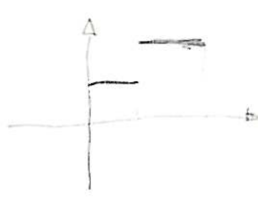
La condizione di assoluta continuità (sufficente) è che abbia derivata limitata.

FUNZIONE ASSOLUTAMENTE CONTINUA

f cont $[a, b]$ vedi integrale di Riemann

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\, dt \qquad F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1 \\ 3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



pag 131

Sia

$f \in AC$ (assolutamente continua) in $[a,b] \Rightarrow \exists\, f'(x)$ quas. ovunque in $[a,b]$

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a) \qquad\qquad F(x) \in C^1[a,b]$$

$$f \in L[a,b] \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F'(x) = f(x) \text{ quasi ovunque in } [a,b]$$

quindi posso scrivere $\boxed{F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt}$

ATTENZIONE BUONO PER GLI ESERCI. É VALIDO SE LA F è assolutamente continua.

Le ipotesi utili per la regola della derivazione sono.

IPOTESI $f, f' \in L(\mathbb{R})$ $\boxed{f \in AC_{loc}(\mathbb{R})}$

allora vale la regola

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\, \mathcal{F}(f)$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d] & \hat{f}(\omega) \arrow[d, "\text{derivata della trasformata}"] \\ f'(t) & i\omega \hat{f}(\omega) \end{tikzcd}}$$

Ecco cosa succede nello spazio delle trasformate quando derivo nello spazio delle funzioni del tempo.

N.B. Nell'esercizio controllare prima se $f \in AC_{loc}$ e $f, f' \in L(\mathbb{R})$

$$u, v \in C^1[a,b]$$

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$\int_a^b D[u(x)\,v(x)] = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

nell'ambito delle funzioni assolutamente continue vale la regola di derivazione per parti.

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \left[f(t)\,e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - i\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}}_{i\omega \mathcal{F}(f)}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t)\,e^{-i\omega t} = 0 \iff \lim_{t \to \pm\infty} |f(t)| = 0$$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2+1} & t \neq n \\ e^{t^2} & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,d\tau$$ da l'assoluta continuità.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(\tau)\,d\tau \equiv l$$

per assurdo $l \neq 0$

$$\lim_{t \to +\infty} |f(t)| = |l| > 0$$

$$|l| - \varepsilon < |f(t)| < |l| + \varepsilon \qquad t > t_0$$

$$\Downarrow$$

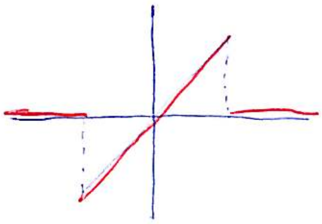
$$\mathcal{F}(f') = i\omega\,\mathcal{F}(f)$$

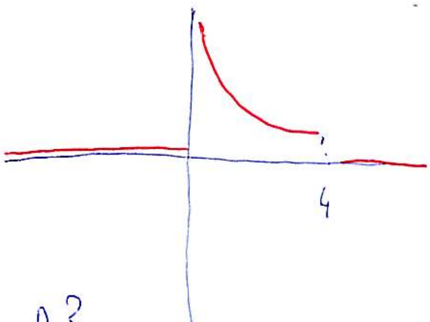
FINE DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo un prodotto di convoluzione.

Sia $f(t) = \begin{cases} t; & t \in [-1,2] \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R} \end{cases}$ e $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} & t \in]0,4] \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R} \end{cases}$

calcolare $f * g$ $\quad \mathcal{F}(f) \overset{?}{=} \hat{f}(\omega) \in C^\infty \mathbb{R} \quad \hat{f} \in L(\mathbb{R})$





$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{2} \tau\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$t - \tau = u \Rightarrow \int_{t+1}^{t-2} (t-u)\, g(u)(-du) = \underbrace{\int_{t-2}^{t+1} (t-u)\, g(u)\, du}_{\text{è il prodotto di convoluzione}}$$

$t + 1 \leq 0 \Rightarrow t \leq -1 \qquad f * g = 0$

$t-2 \quad 0 \quad t+1 \quad 4$

$\begin{cases} t-2 < 0 \\ 0 < t+1 < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} t < 2 \\ -1 < t < 3 \end{cases} \quad -1 < t < 2$

$$f * g(t) = \int_{t-2}^{0} 0 + \int_{0}^{t+1} (t-u) \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\, du \qquad -1 < t < 2$$

$0 \quad t-2 \quad t+1 \quad 4$

$$f * g(t) = \int_{t-2}^{t+1} (t-u) \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\, du$$ ora trovo i valori dell'intervallo

$$\begin{cases} 0 < t-2 & 2<t<3 \\ t+1 < 4 \end{cases}$$

nel caso che $t-2$ rimanga nell'intervallo e $t+1$ vada fuori, si ha:

$$f*g = \int_{t-2}^{4} \frac{t-2}{\sqrt[3]{u}} + \int_{4}^{t+1} 0 \, du$$

$$\begin{cases} 0 < t-2 < 4 \\ t+1 > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < t < 6 \\ t > 3 \end{cases} \Rightarrow$$

ultimo caso $t-2$ e $t+1$ sia tutto fuori dall'intervallo

$$\Rightarrow f*g = 0 \qquad t > 6$$

Ricapitolando:

$$f*g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le -1 \text{ e } t \ge 6 \\ \int_0^{t+1} \frac{t-u}{\sqrt[3]{u}} du & -1 < t < 2 \\ \int_{t-2}^{t+1} \frac{t-u}{\sqrt[3]{u}} du & 2 < t < 3 \\ \int_{t-2}^{4} \frac{t-u}{\sqrt[3]{u}} du & 3 < t < 6 \end{cases}$$

$$\int \frac{t-u}{\sqrt[3]{u}} du = t\int u^{-\frac{4}{3}} - \int u^{\frac{2}{3}} du$$

$$= t \frac{3}{u} u^{\frac{2}{3}} - \frac{3u^{\frac{5}{3}}}{5}$$

Alla seconda domanda rispondiamo

$$\frac{d\hat{f}}{du} = \mathcal{F}(-it\,f(t)) \qquad tf \in L(\mathbb{R}) \qquad t^n f \in L(\mathbb{R})$$

$n = 0, 1, \ldots\ldots$

$$\frac{d^n \hat{f}}{du^n} = \mathcal{F}\left[(-it)^n f(t)\right]$$

<u>INVECE</u>

$f, f', f'' \in L(\mathbb{R}) \quad f' \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ <u>non vale</u>, infatti non è applicabile.

si può fare:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{2} t\, e^{-i\omega t}\, dt = \qquad \Rightarrow \omega \neq 0$$

$$= \left[\frac{t\, e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{2} e^{-i\omega}\, dt$$

$$= \frac{2e^{-2i\omega} + e^{i\omega}}{-i\omega} - \frac{1}{(i\omega)^2}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{2} =$$

$$\frac{i\,2e^{-2i\omega} + e^{i\omega}}{\omega} + \frac{e^{-2i\omega} - e^{i\omega}}{\omega^2} \qquad \hat{f}(0) - \lim_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega)$$

la $\hat{f}$ è sommabile se e solo se è sommabile la prima frazione, in quanto, si vede facilmente che la seconda è maggiorata da $\left|\frac{2}{\omega^2}\right| \in L[a, +\infty]$

per la prima frazione

$$\left|\frac{i2e^{-2i\omega}+e^{i\omega}}{\omega}\right| \geq \frac{\left|2e^{-2i\omega}\right|-\left|e^{-i\omega}\right|}{|\omega|} = \frac{1}{|\omega|} \notin L[a,b$$

$$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$$

quindi la $\hat{f}$ appartiene alla classe C^{∞} ma non è sommabile.

~ o — o — o — o — o — ~

$$f(t) = \begin{cases} t^2-a^2 & |t|\leq 1 \qquad a>0 \qquad a\in R \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$$

$\mathcal{F}(f)$

$$\int_0^{+\infty}\left[(1-a^2)\frac{\sin u}{u}+\frac{2}{u^2}\cos u-\frac{2}{u^3}\sin u\right]\cos(2au)\,du$$

DOMANDA

$$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}(f) \qquad \hat{f}\in S_\omega\,? \qquad \mathcal{F}(f')=i\omega\,\mathcal{F}(f)$$

procedo

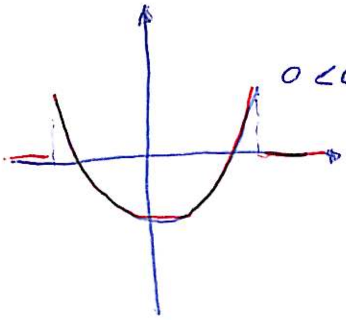
$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-1}^{1}(t^2-a^2)\left(\cos\omega t-\cancel{i\sin\omega t}\right)dt$$

$$=2\int_0^1 (t^2-a^2)\cos(\omega t)\,dt \Rightarrow \text{per parti}$$

ottengo

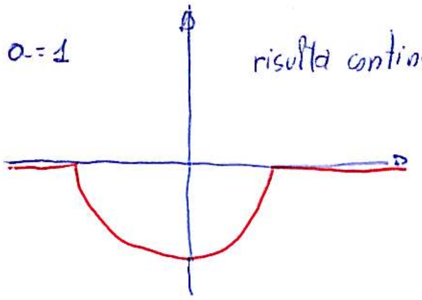
$$2\left[(1-a^2)\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{2}{\omega^2}\cos\omega-\frac{2}{\omega^3}\sin\omega\right]$$

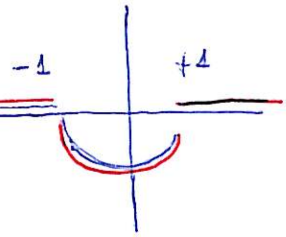
siccome la funzione è pari $= 2\hat{f}_c(\omega)$ il doppio della coseno trasform



$0<a<1$

per $a=1$ risulta continua.





$a>1$ discontinua.

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$ è la formula di inversione per $\hat{f}(\omega)$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2}\,\frac{f(2a+0)+f(2a-0)}{2}}_{\text{dipende da dove cade il punto } 2a \text{ (nei grafici sovrastanti)}} = \int_0^{+\infty}(1-a^2)\left[\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{2\cos\omega}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega}{\omega^3}\right]$$

se $2a<1$ cioè se $0<a<\frac{1}{2}$ qualunque sia il grafico, la funzione è continua, e quindi

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{f(2a+0)+f(2a-0)}{2} = \frac{\pi}{2}f(2a) = \frac{\pi}{2}3a^2$$

se $2a>1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ si ha $\frac{\pi}{2}\,\frac{f(2a+0)+f(2a-0)}{2}=0$

se $2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ bisogna vedere la semisomma dei limiti dx e sinistro. si ha dunque:

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}3a^2$ dove $a=\frac{1}{2}$ quindi $=\frac{3}{16}\pi$

$$\hat{f}(\omega) = 2\left[(1-a^2)\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2\cos\omega}{\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega^3}\right]$$

$\omega^3 \hat{f}(\omega)$ non va a zero.

$$f'(t) = \begin{cases} 2t & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$$ ciò nonostante $f' \in L(R)$

$f, f' \in L(R)$ $\quad f \in A(\cancel{C}\ \text{\small cos}\ LR)$

per $a=1$ la funzione è continua "ciò non è sufficiente per dire che è assolutamente continua".

vediamo se è finito l'integrale della sua derivata.,

$$f(-1) + \int_{-1}^{t} f'(\tau)\,d\tau \stackrel{?}{=} f(t)$$

se $t<-1$ $\quad f'(\tau)=0$ e quindi $\int_{-1}^{t} f'(\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{t} 0 = $

se invece t è compreso tra -1 e 1

$-1<t<1 \quad |t|<1$ $\qquad f(t)=0$ per $t<-1$

$$\int_{-1}^{t} 2\tau\,d\tau = \left[\tau^2\right]_{-1}^{t} = t^2-1 = f(t) \text{ per } |t|<1$$

se $t > 1$ $\int_{-1}^{t} f'(\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{1} 2\tau + \int_{1}^{t} 0 = 0 = f(t)$ per $t > 1$

Esercizio

Sia
$$g(\omega) = \begin{cases} \sin \omega & |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases} \qquad \omega \in R$$

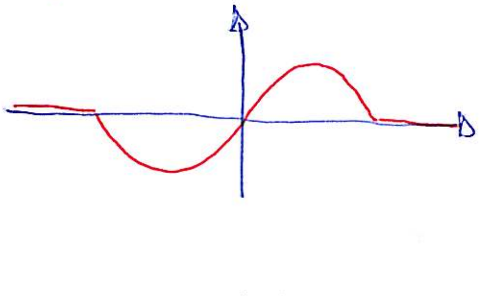
e siano $g_1(\omega) = \omega^n \cdot g(\omega)$ $\quad n \in N$ $\quad g_2(\omega) = e^{i\omega p} g(\omega)$ $p \in R$

$g_3(\omega) = e^{-\omega^2} g(\omega)$ $\quad \exists f_i(t) \in L(R)$ $\quad i = 1, 2, 3 \ldots$

$g_i(\omega) = \mathcal{F}\left(f_i(t)\right)$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi - 2)t - \cos(\pi + 2)t}{1 - t^2}\,dt$

vediamo se $g(\omega)$ soddisfa alle condizioni per essere una trasformata.

$g(\omega)$ unif. continua in R $\qquad \lim_{\omega \to \pm\infty} g(\omega) = 0$



questa funzione non appartiene a $C^\infty(S(\omega))$ in quanto ha due punti in cui non si può derivare.

$g(\omega) \in L(R)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad f \in L(R)$$

il v.p. può essere cancellato perché la $f(\omega)$ è dotata sommabile

se ciò è verificato, la $g(\omega)$ è una trasformata.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\omega \left(\cos\omega t + i \sin\omega t \right) d\omega$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\omega \sin(\omega t) d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos(1-t)\omega - \cos(1+t)\omega \right] d\omega$$

si ottiene

$$f(t) = \frac{i}{\pi} \frac{\sin(\pi t)}{1-t^2} \in L(R) .$$

quindi possiamo dire che $g(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{i}{\pi} \frac{\sin(\pi t)}{1-t^2} \right]$

$$(i\omega)^n g(\omega) = \mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right) \quad f, \dots\dots\dots f^{(n)} \in L(R)$$

$$f^{(n-1)} \in A(\text{loc} LR)$$

$$\cancel{\frac{\pi}{i}} f(t) = \text{sen}(\pi t)(1-t^2)^{-1}$$

$D^n\left[g(t)\phi(t)\right] =$ si può calcolare con la formula "che assomiglia al binomio di Newton"

$$= \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} D^{(K)}_{g} D^{n-K} f(t)$$

$$D^n\left[(1-t^2)^{-1} \sin(\pi t)\right] = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} D^K (1-t^2)^{-1} D^{n-K} \text{sen}(\pi t)$$

$$-(1-t^2)^{-2}(-2t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

che dice che per qualunque ω la $g_1(\omega)$ è una trasformata.

La g^2 è una traslazione, e quindi è una trasformata.

$$g_3(\omega) = e^{-\omega^2} g(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

$$= \mathcal{F}[f_1 * f_2]$$ è la trasformata del prodotto di convoluzione.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi-2)t - \cos(\pi+2)t}{1-t^2}\, dt =$$

La differenza $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

quindi:

$$\cos[(\pi-2)t] - \cos(\pi+2)t = -2 \sin \frac{\pi t - 2t + \pi t + 2t}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin \pi t \quad \ldots\ldots}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi-2)t - \cos(\pi+2)t}{1-t^2} = 2 \overbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \sin 2t\, dt}^{\text{vedremo che varrà } \pi g(2)}$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{1-t^2} (\cos \omega t - i \sin \omega t)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{1-t^2} \sin(\omega t)\, dt$$

compito del 5/10/91

Siano $f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-|t|}}{\sin \pi t} & t \in R \setminus Q \\ 0 & t \in Q \end{cases}$ $\qquad g(t) \begin{cases} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-|t|}}{t} & t \in R - Q \\ t^2 & t \in Q \end{cases}$

dire se:

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} \qquad \mathcal{F}(g) = \hat{g} \qquad \hat{f} \in C^\infty(R), \ \hat{g} \in C^\infty(R)$$

$$\mathcal{F}(t^3 f) \qquad \mathcal{F}[\sin 2t\, f] \qquad \mathcal{F}[ch\, t\, f(t)]$$

$$\mathcal{F}(t^3 g) \qquad \mathcal{F}[\sin 2t\, g] \qquad \mathcal{F}[ch\, t\, g]$$

$$\exists \ \hat{f}(0) \quad \hat{g}(0)$$

vediamo come si comporta per $t \Rightarrow 0$

$$\frac{1 - t^2 + o(t^2) - [1 - |t| + o(|t|)]}{t} \sim \frac{|t|}{t} \begin{cases} 1 & t \to 0^+ \\ -1 & t \to 0^- \end{cases}$$

$$t^n g \in L(R) \Rightarrow \hat{g} \in C^\infty(R)$$

$$\mathcal{F}[(-it)^3 g(t)] = \frac{d^3 \hat{g}}{d\omega^3} \qquad \mathcal{F}[t^3 g(t)] = \frac{1}{(-i)^3} \frac{d^3 \hat{g}}{d\omega^3}$$

$$\mathcal{F}[\sin 2t\, g(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} g(t)\right] = \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{F}\left(e^{2it} g(t)\right) - \mathcal{F}\left[e^{-2it} g(t)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\hat{g}(\omega - 2) - \hat{g}(\omega + 2)\right]$$

$$\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{-t^2} - e^{-|t|}}{t} \sim \frac{e^{t}}{2}\,\frac{e^{-t}}{t}$$

$t \to +\infty$ può togliere il modulo

in conclusione viene $\frac{1}{2t}$ che non è sommabile.

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = 0$$

FORMULARIO

- Negli esercizi di classificazione dei punti di singolarità bisogna aver presente i seguenti valori di z che soddisfano le equazioni:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = K\pi$$

$$\cos z = 1 \Rightarrow z = 2K\pi$$

$$\sin z = 1 \Rightarrow z = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

N.B. Si arriva a questi risultati perché sussistono le formule di Eulero:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$ch(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$sh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

per ottenere le uguaglianze sovrastanti, è necessario svolgere le equazioni sostituendo le formule di Eulero.
Si ottiene spesso un'equazione di secondo grado, risolvibile con la classica tecnica $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\theta+2K\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2K\pi}{n}\right] \quad \text{con } K = 0 \div n-1 \quad n = \text{ordine.}$$

$$\log z = \ln|z| + i \arg z + 2K\pi i$$

- Negli esercizi in cui bisogna integrare, sono fondamentali le seguenti formule.

Lemma del mezzo residuo (quando il residuo si trova sull'asse reale)

$$R(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$$

dove n è l'ordine del polo.

Teorema dei residui (quando nell'insieme di integrazione ci sono dei buchi "residui").

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{1}^{n} r_i$$

Sviluppo in serie di Cauchy Laurent.

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt}_{a_n}\,(z-z_0)^n + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{1-n}}\,dt}_{b_n}\,(z-z_0)^{-n}$$

N.B. b_1 è il residuo.

$$f^{n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dt$$

- negli esercizi che riguardano le serie di Fourier, è opportuno conoscere bene le seguenti cose:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

con periodo $(-\pi, \pi)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

N.B. compare davanti il coefficiente uno sul mezzo periodo, e gli integrali sono fatti con estremi - semiperiodo e + semiperiodo.

* Se la serie è di soli coseni, si sviluppa calcolando solo gli a_n
* Se la serie è di soli seni si sviluppa calcolando solo i b_n

nelle discontinuità: applichiamo Dini unilaterale se i limiti dx e sx vanno a $+\infty$, applichiamo Holder unilaterale se i limiti dx e sx vanno a $Az^{\alpha} = l$ finito.

Ricordarsi i seguenti sviluppi.

$$\operatorname{senh} \frac{1}{z} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$

$$\operatorname{senh} z \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin z \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(2n+1)!}$$

pag 167/A

Formula di addizione del seno

$\sin z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen}x \operatorname{ch}y + i \cos x \operatorname{sen}y$ {si usa spesso}

Esercizio <u>Classificazione dei punti singolari</u>

$$f(z)=\underbrace{\left(\frac{1}{(e^{z}-1)}-\frac{1}{z}\right)}_{a}\cdot\underbrace{\frac{1}{sh(z^2)}}_{b}\cdot\underbrace{ch\left(\frac{1}{(z-1)}\right)}_{c}$$

1) scegliere un ramo se la f è polidroma. questa non lo è la f. è monodroma.

2) Studiare le singolarità:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right\} \text{punti di singolarità.}$$

considero b.

ho singolarità se $sh(z^2)=0$ e quindi:

$$\frac{e^{z^2}-e^{-z^2}}{2}=0 \quad \text{da cui} \quad e^{z^2}-e^{-z^2}=0 \Rightarrow e^{z^2}=e^{-z^2} \Rightarrow e^{z^2}=\frac{1}{e^{z^2}}$$

si ricava moltiplico ambo i membri per e^{z^2}

$$e^{2z^2}=1 \Rightarrow \underset{\text{passando ai logaritmi}}{2z^2=0+2\underline{K}\pi i} \qquad z^2=\underline{K}\pi i \qquad z=\sqrt{\underline{K}\pi i}$$

$$z=\sqrt{|\underline{K}\pi|}\cdot\left[\cos\frac{\theta+2K\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\theta+2K\pi}{2}\right] \text{ per } K=0,1$$

quindi la singolarità c'è in due punti $\theta=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

n.b. $\underline{K}$ e K sono due K diversi

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } \underline{K}\geq 0 \Rightarrow z=\sqrt{|\underline{K}\pi|}\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}\right) \\ \text{se } \underline{K}<0 \Rightarrow z=\sqrt{|\underline{K}\pi|}\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}+i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}\right) \end{array}\right\} K=0,1\ldots$$

poniamo prima $K=0$ si ottiene

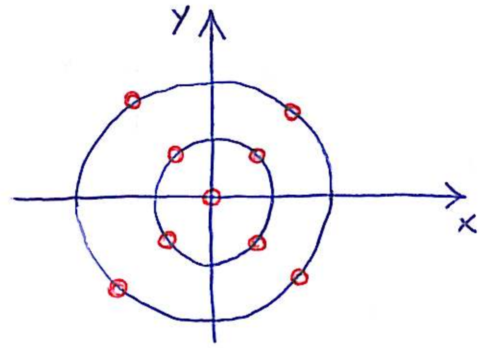
$k=0$ se $\underline{K} \geq 0$ $\quad z=\sqrt{|\underline{K}\pi|}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\left(+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{\underline{K}\pi}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$k=0$ se $\underline{K}<0$ $\quad z=\sqrt{|\underline{K}\pi|}\left[\cos-\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{\underline{K}\pi}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Pongo ora $k=1$

$k=1$ $\quad \underline{K}\geq 0$ $\quad z=\sqrt{|K\pi|}\cdot\left[\cos\left(\frac{+\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{K\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$k=1$ $\quad K<0$ $\quad z=\sqrt{|K\pi|}\cdot\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\,\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{\underset{\text{meno}}{-}K\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

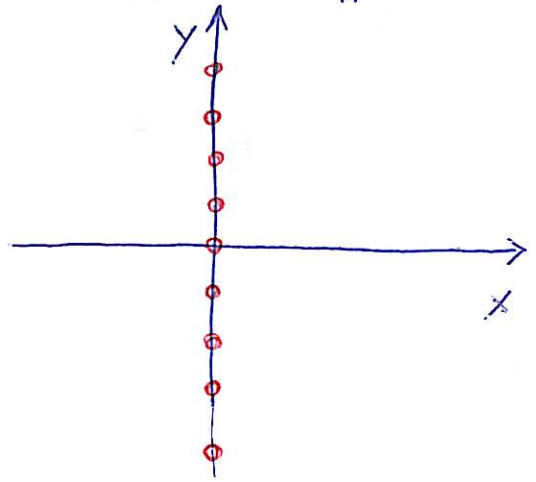


Analizziamo il pezzo a

$$\left(\frac{1}{(e^z-1)}-\frac{1}{z}\right)=\frac{z-e^z+1}{z\cdot(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{z\,(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}-\cancel{1}-\cancel{z}-\frac{z^2}{2}+\cancel{1}}{z\cdot(\cancel{1}+z-\cancel{1})}=-\frac{1}{2}$$

$z=0$ è una singolarità

$e^z-1=0 \Rightarrow e^z=1$ $\qquad z_k=0+2i\,K\pi$ $\qquad K=-2,-1,0,1,2,3,\dots$



Vediamo gli z_k con $k\neq 0$

$\lim_{z\Rightarrow z_k}(e^z-1)$ $\qquad \frac{d}{dz}(e^z-1)=e^z$ $\quad$ zero semplice $=\frac{1}{e^z}$ polo semplice

quindi tutta la f in $z=z_k$ ha un polo semplice.

vediamo se $z = 0$

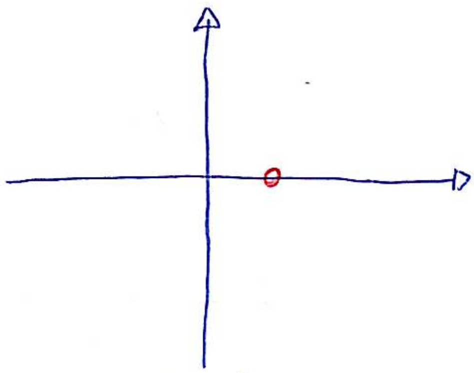
Il termine a non dà problemi, in quanto è una discontinuità eliminabile.

Il termine b

$$\lim_{z \to z_0} sh(z^2) = z^2 + \frac{z^6}{3!} \quad \text{zero doppio} \quad \Rightarrow \frac{1}{sh(z^2)} \quad \text{polo doppio}$$

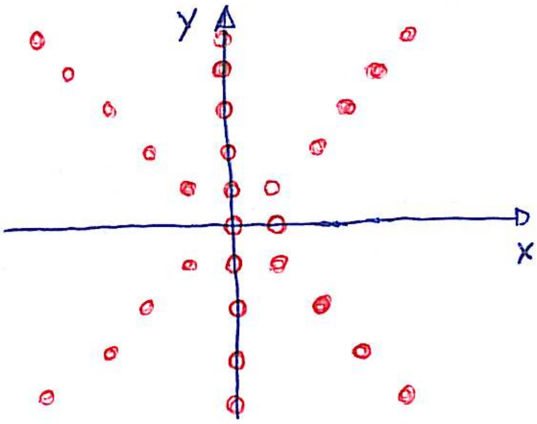
Considero la parte c

$$ch\left(\frac{1}{(z-1)}\right)$$



$z = 1$ è una singolarità

metto assieme i risultati finora ottenuti



per finire vediamo $sh(z^2) = 0$ nei punti z_h $h \neq 0$ ho che

$$\frac{d}{dz} sh(z^2) = ch(z^2) \cdot 2z \quad \text{che è sempre} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $sh(z^2)$ è 0 semplice negli z_h.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{sh(z^2)}$ è polo semplice

Vediamo $z = 1$

$$\lim_{z \to 1} ch\left(\frac{1}{z-1}\right) = \text{non esiste}$$

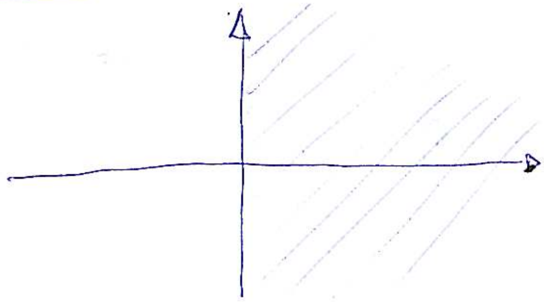
in $z=1$ c'è una discontinuità del terzo tipo "essenziale".

20/12/96

Trasformata di Laplace

Laplace trasformata

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad s \in \mathbb{C}$$



$f \in L[0, +\infty]$

$$|f(t)\, e^{-st}| = |f(t)|\, e^{-xt} \leq |f(t)|$$

$x \geq 0$

$s = x + iy$

mettiamoci nell'ipotesi che $f \in L_{loc}[0, +\infty)$

$$\int_0^T |f(t)|\, dt < +\infty \qquad [a, b] \subset [0, +\infty)$$

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^T |f(t)\, e^{-st}|\, dt \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

perché è sommabile per limitata quindi è sommabile:
n.b. l'ipotesi era loc sommabile

$$|f(t)|\, |e^{-st}| < M$$

$\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-st}|$ non si pretende che converga.

è sufficiente che esista l'integrale improprio:

$$\int_0^{\to +\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$$

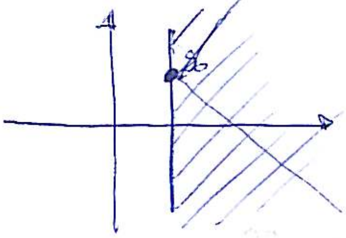
Esempio di funzione loc. sommabile che non ammette trasformata di Laplace

$$e^{t^2} \qquad \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt \quad \text{l'integrale non è finito}$$

Teorema fondamentale.

$f \in L_{loc}[0,+\infty)$ $\exists\, s_0$ per il quale converge $\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt$ finito

tesi $\rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt \qquad Re(s) > Re(s_0)$



ad s_0 in poi l'integrale converge in tutto un semipiano.

$$F(s) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t)\, e^{-st} dt = \lim_{T \to +\infty} g(T, s)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad | \quad |F(s) - g(T,s)| < \varepsilon \quad \forall s \in \Lambda$$

Dalla sola ipotesi che l'integrale di Laplace converge $T > \delta$ in un punto s_0 non si può immediatamente dedurre la convergenza $\overset{\text{uniforme}}{}$ in tutto un semipiano a dx di s_0, ma bisogna verificare le condizioni soprascritte in una regione angolare.

La convergenza può essere studiata tramite l'estremo inferiore di E^* secondo

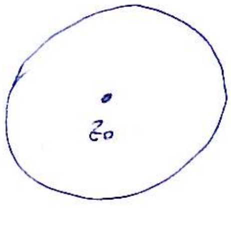
$$E^* = \{Re(s_0), Re(s_1) \;....\qquad \inf E^* = \begin{cases} -\infty \\ \rho^* \end{cases}$$

serve per trovare l'ascissa di convergenza.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$z_1 \neq z_0$$

$$|z_1 - z_0|$$



preso un raggio più piccolo del raggio di convergenza, la convergenza risulta uniforme.

La trasformata di Laplace è una funzione della variabile complessa s

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad Re(s) > \rho^* \qquad s \in C$$

vediamo se è derivabile "olomorfa"

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\,(-t)\, e^{-st}\, dt$$

quindi la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza.

La regola di derivazione può essere scritta anche in altro modo.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \qquad Re(s) > \rho^*$$

$$F'(s) = \mathcal{L}[-t f(t)] \qquad Re(s) > \rho^*$$

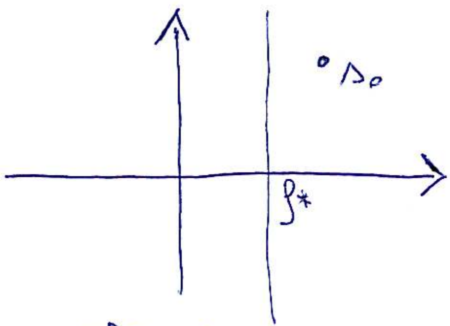
....

$$F^n(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)] \qquad Re(s) > \rho^*$$

quindi la derivazione nel campo delle trasformate corrisponde alla moltiplicazione

n = numero naturale.

Altra conseguenza della uniforme convergenza è il comportamento sulla frontiera.



$Re(s_0) > \rho^*$ ascissa di convergenza

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = F(s_0)$$

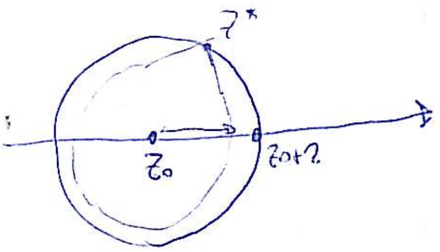
$$\exists \int_0^{+\infty} e^{-s^* t} f(t)\,dt = \lim_{s \to s^*} F(s)$$

finito

$s \in A(s^*, \theta)$ dentro ad una regione angolare

è il teorema di <u>Abel</u> (conseguenza della convergenza uniforme).

caso particolare del teorema di Abel è

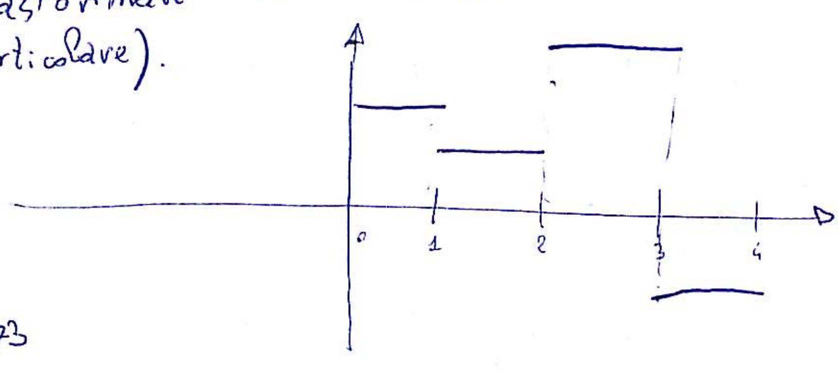


$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n = \lim_{\substack{z \to z^* \\ z \in A}} f(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \log 2$$

- $\log(1+z)$ in $z=1$

Le serie di potenze possono essere visti come Laplace trasformate di funzioni costanti a tratti (è un caso particolare).



$f(t) = a_n \quad n \le t < n+1$

$n = 0, 1, 2 \dots$

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \overset{a_n}{f(t)}\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_n^{n+1} e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_n^{n+1} =$$

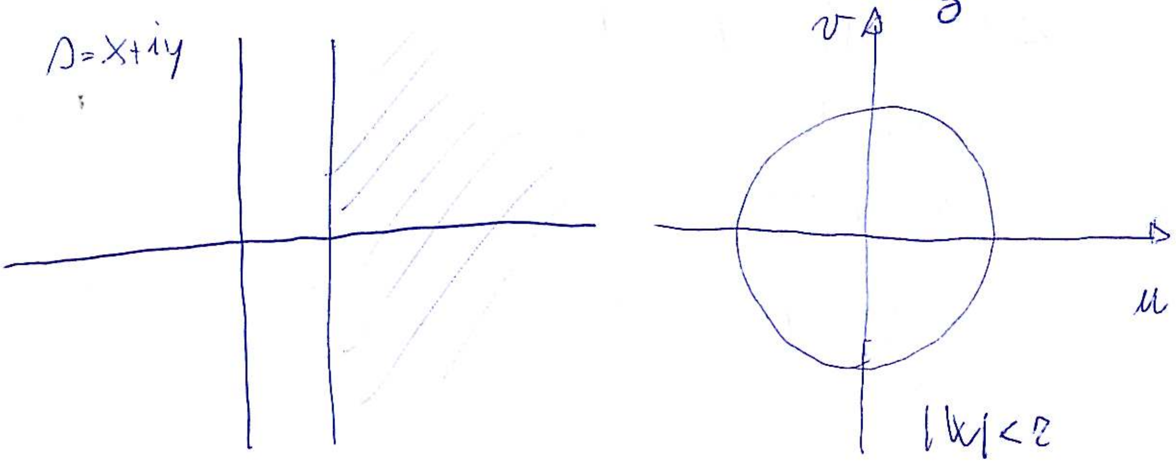
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{-ns} - e^{-(n+1)s}}{s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns} \frac{1-e^{-s}}{s}$$

si può togliere l'eccezione $s=0$ infatti sarebbe solo la serie di a_n

$$\lim_{s \to 0} \frac{1-e^{-s}}{s} = 1$$ quindi $s=0$ non dà problemi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-s})^n = \frac{1-w}{-\log w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

$s = x+iy$



$|w| < r$

$$|e^{-x-iy}| < r$$

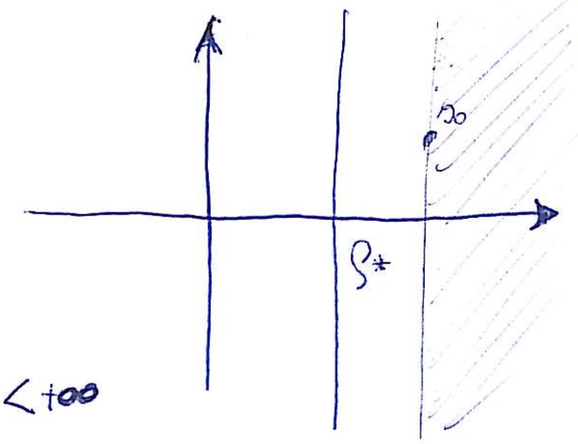
se cambio di variabile muta il cerchio di convergenza nel semipiano di convergenza delle trasformate.

$e^{-x} < r \qquad -x < \log r$

$x > \log \frac{1}{r}$

convergenza assoluta dell'integrale di Laplace.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$



$$\exists s_0 \quad \int_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-s_0 t} \right| dt < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt \qquad Re(s) \geq Re(s_0)$$ n.b. frontiera inclusa.

l'esponente è negativo < 0

$$\left| f(t)\, e^{-st} \right| = \left| f(t)\, e^{-s_0 t}\, e^{-(s-s_0)} \right| = \left| f(t)\, e^{-s_0 t} \right| e^{-Re(s-s_0)t}$$

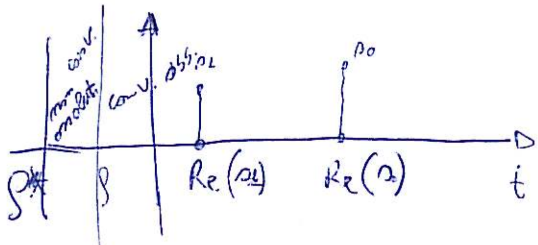
$$e^{-Re(s-s_0)t} \leq 1 \qquad Re(s) \geq Re(s_0)$$

Quindi si è dimostrato che se converge in s_0 converge in tutto un semipiano a dx di s_0.

Cerchiamo il semipiano più ampio di convergenza assoluta.

Cioè l'ascissa maggiore di convergenza assoluta.

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt < +\infty$$



$$E = \{ Re(s_0),\ Re(s_1), \ldots \}\ \rho$$

$$\inf E = \begin{cases} -\infty \\ \rho \geq \rho^* \end{cases}$$

$$|f(t)\, e^{-st}| = |f(t)|\, e^{-\rho t}$$

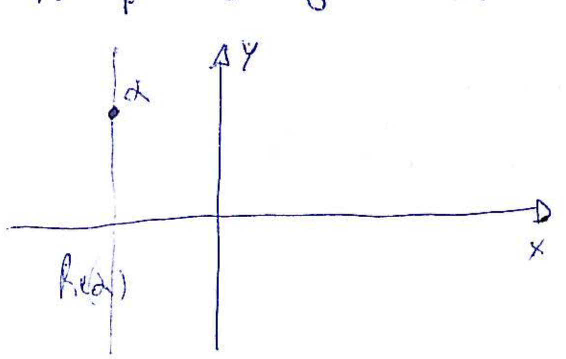
Esempio di calcolo di $\mathcal{L}(f(t))$ per una funzione elementare

$$e^{\alpha t} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

non converge per $s=\alpha$

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, e^{-a t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

non può convergere a sx di α



$$\left| e^{-(s-\alpha)t} \right| = e^{-\mathrm{Re}\,(s-\alpha)t}$$

$$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$$

$$\rho = \rho^* = \mathrm{Re}(\alpha)$$

se prendo $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)}\, dt = \left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\alpha}$$ quindi si ha:

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \text{con } \rho = \rho^* = \mathrm{Re}(\alpha)$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

da cui si deduce $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

$$\rho = \rho^* = 0$$

vediamo un caso in cui l'ascissa di convergenza non coincide con ...

$$f(t) = e^t \sin(e^t)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} (e^t) \sin(e^t)\, e^{-st}\, dt$$

cambio la variabile

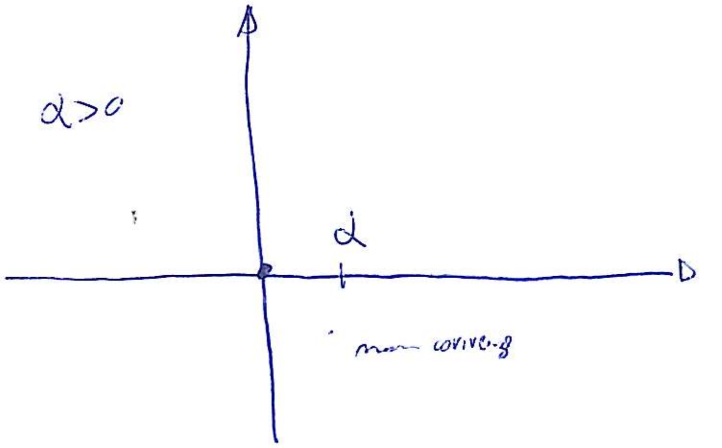
$$e^t = u$$
$$e^t dt = du$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^s}\, ds$$

si vede che per $s=0$ non converge

$s=1$ non converge assolutamente

$\alpha > 0$



$$-\alpha u^{-\alpha-1}$$

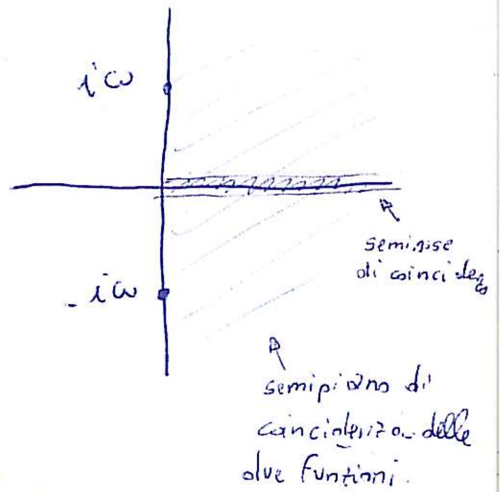
$$\to \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\, du = \left[-\frac{\cos u}{u^\alpha}\right]_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{\alpha+1}}\, du$$

$$= \cos 1 - \alpha \int_{-1}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{\alpha+1}}\, du \qquad \left|\frac{\cos u}{u^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{u^{\alpha+1}}$$

21/12/96 Ascissa di convergenza:

$\omega \in R$

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad R(s) > Re(\alpha)$$



$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right] = \frac{s+i\omega-s+i\omega}{2i\,(s^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$Re(s) > Re(i\omega) = 0$

s reale > 0

$$\int_0^{+\infty} \sin \omega t \, e^{-st}\, dt = Im \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} e^{-st}\, dt = Im\left(\frac{1}{s-i\omega}\right)$$

$$= Im\left[\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

analogamente per il coseno $\omega \in R$

$$\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{s^2+\omega^2} \qquad \rho = \rho_* = 0$$

vediamo la potenza: sappiamo già che:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \rho = \rho_* = 0$$

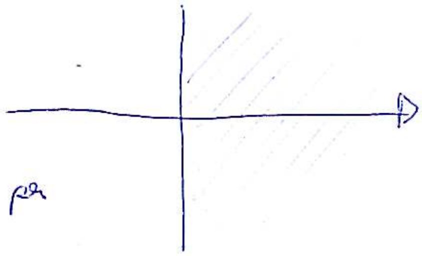
$\mathcal{L}\left[t^\alpha\right] \qquad \alpha > -1$

$t^{\alpha} \in L_{loc}[0,+\infty]$

Bisogna reintrodurre la funzione γ

Attenzione a non fare le laplace trasf. di funzioni non sommabili.

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad z \in \mathbb{C} \qquad Re(z) > 0$$



$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$$

non è polidroma per scelta già fatta

$z = x + iy$

$$|t^{z-1}| = |e^{(z-1)}\log t| = e^{(x-1)\log t}$$

$$|e^{-t}\, t^{z-1}| = t^{x-1}\, e^{-t}$$

$$\frac{1}{t^{1-x}}$$

La funzione è sommabile in un intorno di zero.

In conclusione per $Re\, z > 0$ l'integrale è convergente e la funz. è sommabile.

$$F(z) = \int_{\gamma} f(t,z)\, dt$$

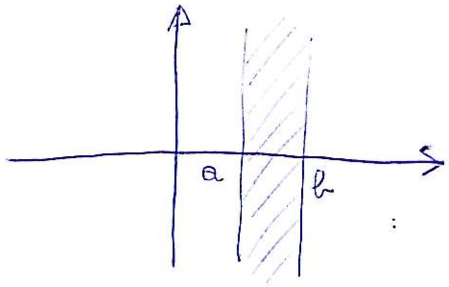
se f cont $\gamma \times \Omega$ e analitica rispetto a z (derivabile)

γ di lungh. finita.

allora vale la derivazione sotto il segno di integrale.

$$F'(z) = \int_{\gamma} f'_z(t,z)\, dt$$

La convergenza risulta uniforme in ogni striscia del tipo:



Subentra una questione di prolungamento:
Prendiamo $\operatorname{Re} z > 0$. e faccio un'integrazione per parti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \underbrace{\left[\frac{e^{-t} t^{z}}{z} \right]_0^{+\infty}}_{\text{dà contributo nullo}} + \frac{1}{z} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dz}$$

si può scrivere $e^{-t} t^{(z+1)-1}$

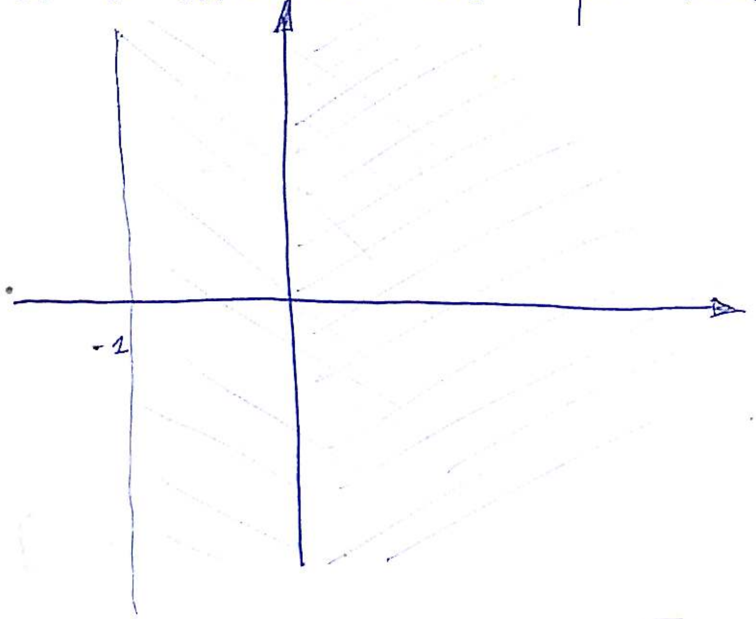
è una funz. olomorfa in $\operatorname{Re} z > -1$ escluso $z=0$

$$\left| e^{-t} t^{z} \right| = t^{x} e^{-t}$$

$$= \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$$

è un prolungamento di Γ in tutto il semipiano

Si è dimostrato che per reale $z > 0$



$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Da quella relazione possiamo scrivere che $\gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\operatorname{Re}(z) > 0$$

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1) z \Gamma(z)$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \qquad z = -1,\ z = \text{poli}$$

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\ \dots\ z\,\Gamma(z)$$

è una funzione olomorfa in tutto il piano escluso i poli lo zero.

preso $z=1$ si ha che $\Gamma(n+1) = (n+1)\,n \dots 1\,\Gamma(1) = (n+1)!$

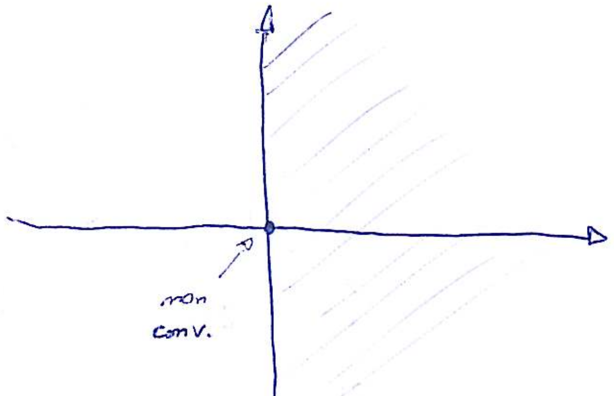
La funzione Γ è la funzione olomorfa che generalizza il fattoriale.

Ora siamo in grado di calcolare la Laplace trasformata di t^α

$$\mathcal{L}[t^\alpha] \qquad \alpha > -1$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}\,dt \quad \to s=0 \text{ non converge.}$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha dt \quad \text{non è convergente per } \alpha > -1$$



$\mathrm{Re}(s) = x > 0$

$$|t^\alpha e^{-st}| = t^\alpha e^{-xt} \in L[0,+\infty]$$

$\rho = \rho^* = 0$

La trasformata quindi esiste per $\alpha > 0$

$$\mathcal{L}[t^\alpha]$$

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt$$ se s è reale positivo

cambio variabile $st = u$

$$u^{(\alpha+1)-1} \quad 0 \leq u < +\infty$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} e^{u} u^\alpha du$$

la s è usata dall'integrale.

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$ è un prolungamento del ramo reale.

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt =$$

$t = u^2 \quad u = \sqrt{t}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} 2du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

da cui $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \implies \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Attenzione alle $\mathcal{L}$. trasformate viste (perché sono richieste) inoltre è importante

$$\mathcal{L}[\operatorname{ch} t] = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right]\frac{1}{2} = \frac{s}{s^2-1} \qquad \rho = \rho^* = 1$$

condizioni verificate

$F(s)$ $\qquad Re(s) > \rho^*$

significa che una trasformata di Laplace è una funzione olomorfa in un semipiano.

Una funzione non olomorfa in alcun semipiano non può essere una trasformata di Laplace.

La trasformata di Fourier si trovava sull'asse reale, la trasformata di Laplace in qualsiasi modo può andare verso infinito.

Quindi non è in generale vero che..

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

Risulta vero se siamo sicuri che quando s va ad infinito, tende ad ∞ anche la parte Reale di s, e s si mantiene dentro ad una regione angolare di convergenza uniforme.

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

$$s \in A(s_0, \theta)$$

NO

$$tg\, s = \frac{\sin s}{\cos s}$$

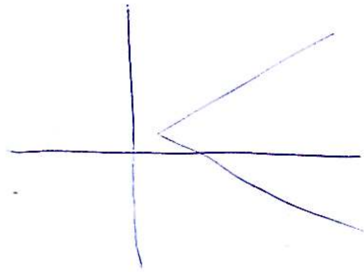
Bisogna ad esempio fare attenzione a quozienti di polinomi

$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ grado di $P \geq Q$ non è una trasformata

Può essere una trasformata di una funzione solo se il grado di $P < Q$.

Esempio

Se prendiamo e^{-ks} $\quad K > 0$



$$|e^{-Ks}| = e^{-K Re(s)}$$

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A(s_0, \infty)}} e^{-Ks} = 0 \qquad \cancel{\exists} \lim_{s \to \infty} e^{-Ks}$$

Soddisfa alle condizioni neccesarie, ma non é Laplace trasformata di alcuna funzione.

Supponiamo per assurdo che lo sia. (dimostrazione)

$$e^{-Ks} = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$-K e^{-Ks} = \mathcal{L}[-t f(t)]$$

$$\searrow \mathcal{L}[-k f(t)]$$

$$\mathcal{L}[-k f(t)] = \mathcal{L}[-t f(t)] \qquad \mathcal{L}[(t-k) f(t)] = 0$$

$\mathcal{L}[g] = 0 \Rightarrow g = \phi$ q.o. $t \geq 0$

$(t-k) f(t) = 0$ q.o. $t \geq 0$

$\Rightarrow f(t) = 0$ q.o. $t \geq 0$

ne consegue che:

che non esiste alcuna funzione che abbia trasformata uguale a e^{-Ks}.

Quindi le condizioni date sono neccesarie ma non sufficenti.

$Re(s) > \rho^*$

$$\mathcal{L}[f] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[-t f(t)] = F'(s)$$

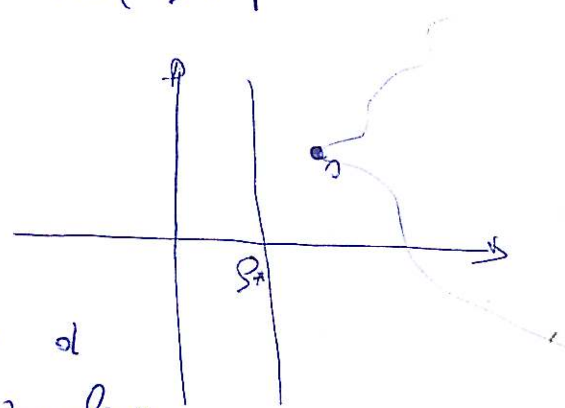
$$\exists \mathcal{L}[f] \not\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t^*)}{t}\right]$$

difatti la divisione per t può far uscire dallo spazio delle funzioni sommabili

$$\exists \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad Re(s) > \rho^*$$

Tesi $\exists \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad Re(s) > \rho^*$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}[F](\sigma)\, d\sigma$$



dove il cammino lo vincoliamo a rimanere dentro ad una regione angolare

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = G(s) \qquad Re(s) > \rho^*$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \cdot t\right] = -G'(s)$$

$F(s) = -G'(s) \qquad G'(s) = -F(s)$

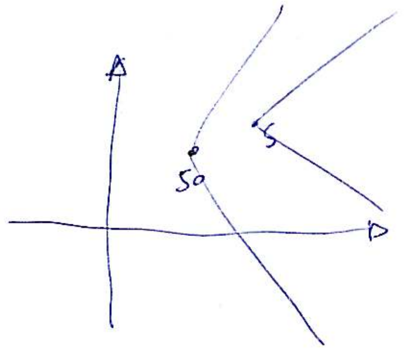
$G(s)$ è una primitiva di $-F(s)$.

Quindi siamo in un semipiano e $F(s)$ e $G(s)$ sono olomorfe

$$G(s) = \int_{s_0}^{s} -F(\sigma)\,d\sigma + K$$

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = 0 = -\int_{s_0}^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma + K$$

$s \in A(s_0, \alpha)$



dunque abbiamo:

$$K = \int_{s_0}^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma$$

$$G(s) = \int_{s_0}^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma - \int_{s_0}^{s} F(\sigma)\,d\sigma = \int_{s}^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma$$

Alla divisione per t corrisponde l'integrazione nello spazio delle trasformate.

Calcoliamo la trasformata di $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$

chiediamoci se esiste

$$\overset{?}{\exists} \mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] \qquad \frac{\sin t}{t} \in L_{loc}[0, +\infty)$$ che non assicura l'esistenza dell'integrale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\,dt = \int_0^{1} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\,dt$$

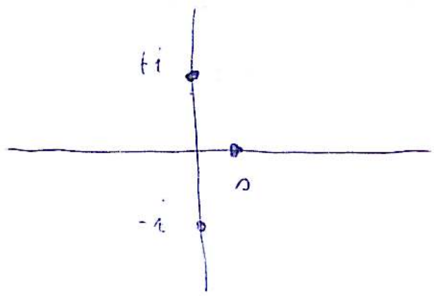
$$\left|\frac{\sin t}{t} e^{-st}\right| \le \left|\sin t\, e^{-st}\right| \qquad t \ge 1$$

$$\to \in L[0, +\infty] \qquad Re(s) > 0$$

$$\rho = \rho^* = 0$$

Applichiamo la regola vista prima.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[\sin t](\sigma)\,d\sigma = \int_s^{\infty} \frac{d\sigma}{1+\sigma^2}$$



scelgo s reale > 0

$$\int_s^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - \arctan s \qquad \rho = \rho^* = 0$$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ si calcola dalla trasformata con l'ausilio del teorema di Abel.

$$\exists \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{s \to 0} \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$$

$s \in A(0,\theta)$ a regione angolare

$$= \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\theta)}} \frac{\pi}{2} - \arctan s = \frac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE $\cos z = 1$

Dalle formule di Eulero: $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

SERVE PER GLI ESERCIZI DELL CLASSIFICAZIONE DELLE SINGOLARITÀ

riscrivo l'uguaglianza:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 1$$

poi si prosegue con i calcoli

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 1 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 2$$

si prosegue con il trucchetto

$$e^{iz}+\frac{1}{e^{iz}} = 2 \Rightarrow \frac{\left(e^{iz}\right)^2+1}{e^{iz}} = 2 \Rightarrow \left(e^{iz}\right)^2+1 = 2e^{iz}$$

Da cui si ottiene

$$\left(e^{iz}\right)^2 - 2e^{iz} + 1 = 0$$

che si risolve con il metodo classico delle equazioni di secondo grado.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

dove si è fatto la posizione $e^{iz} = A$

si ottiene $e^{iz} = 1$ passo di logaritmi

$$\log e^{iz} = \log 1$$

$$iz = \log|1| + i\arg 1 + 2k\pi i$$

$$iz = 0 + \underbrace{i\arg 1}_{0} + 2k\pi i \Rightarrow iz = 2k\pi i$$

$$z = 2k\pi$$

7/12/96

Estendiamo alle derivate successive $\qquad f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\mathcal{F}(f) \qquad f, f', \dots f^{(m)} \in L(\mathbb{R})$$

$$f^{(m-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \mathcal{F}(f^{(m)}) = \lim_{\omega \to \pm\infty} (i\omega)^m \underbrace{\mathcal{F}\hat{f}(\omega)}_{} = 0$$

da Fourier trasformata

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \frac{\mathcal{F}(f)}{\frac{1}{(i\omega)^m}} = 0$$

vale la regola:

$$\mathcal{F}(f^{(m)}) = (i\omega)^m \mathcal{F}(f) = (i\omega)^m \hat{f}(\omega)$$

* Creiamo ora lo spazio S "$\mathcal{L}[S]$" è lo spazio delle funz. a decresc. rapida

Sia f sommabile in $\mathbb{R}$ e $f \in C^\infty$ in $\mathbb{R}$ $\qquad t^n f(t) \in L(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \to \pm\infty} |t|^p f^{(n)}(t) = 0 \qquad n = 0, 1, 2 \qquad p \in \mathbb{R} \quad p > 0$$

se $f \in \mathcal{S}$ è $\in L(\mathbb{R})$ cioè $f \in \mathcal{S} \Rightarrow f^{(n)} \in L(\mathbb{R})$

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow t^q f(t) \in L(\mathbb{R}) \qquad q = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{F}[(-it)^n f(t)] = \frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n} \qquad t^n f \in L(\mathbb{R})$$

$\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ sfrutto ora la regola che dice che le $\hat{f}^{(n)}$ sono infinitesime.

$f^{(n)} \in L(\mathbb{R}) \quad f^{(n)} \in AC_{loc}$

$$\mathcal{F}[f^n] = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \to 0$$

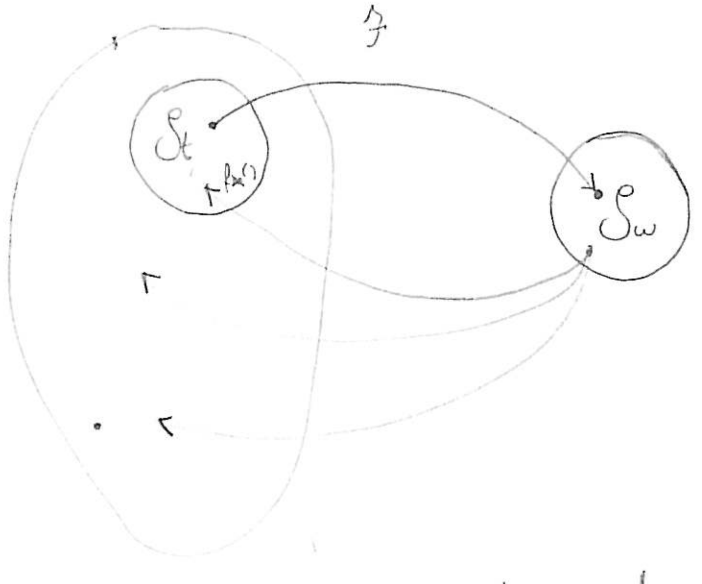
$$(i\omega)^n \frac{d\hat{f}}{d\omega} = (i\omega)^n \mathcal{F}(-it\, f(t)) \qquad t\, f(t) \in \mathcal{S}_t$$

in conclusione.

Se $f \in \mathcal{S}t \Rightarrow \hat{f}(\omega) \in \mathcal{S}_\omega$

Si può inoltre far vedere che:

se $g(\omega) \in \mathcal{S}_\omega \Rightarrow \exists!\ f \in \mathcal{S}t / g(\omega) = \mathcal{F}(f)$



quando faccio $\mathcal{F}^{-1}$ creo infinite funzioni, di cui una sola però sta in $\mathcal{S}t$.
Genero tutte quelle f uguali q.o. a $f_x \in \mathcal{S}t$

in mancanza di questo l'unica altra condizione è:

1) $g(\omega)$ se verifica le cond. necess.

2) $f(t) = \frac{1}{\pi}\, V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, du \qquad$ ed $f \in L(\mathbb{R})$

se $g(\omega) \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow$ che ho trovato la $f(t)$ è $g(\omega) = \mathcal{F}(f)$

si è fatta l'antitrasformata.

Prodotto di convoluzione

La trasformata di Fourier si comporta rispetto a prodotto di convoluzione secondo la formula

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

10/01/97 Prodotto di convoluzione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) f_2(t)] \neq \mathcal{L}[f_1] \cdot \mathcal{L}[f_2]$$

caso particolare

Vediamo due funzioni sommabili in $[0, +\infty)$

$f_1 \in L[0, +\infty)$ $\qquad g_1(t) = L[0, +\infty)$

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} g_1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$f \in L(R)$ $\qquad g \in L(R)$

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t - \tau)\, dt \qquad f * g \in L(R)$$

$$\doteq \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau$$ analizziamo dove g è nulla

$$\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t f_1(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau + \int_t^{+\infty} f_1(\tau) \underbrace{g(t-\tau)}_{0} \end{cases}$$

$0 \leq \tau \leq t$

$t - \tau \geq 0$ $\qquad g_1(t - \tau)$

quindi il prodotto di convoluzione vale

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \int_0^t f_1(\tau)\, g_1(t-\tau)\, d\tau & t > 0 \end{cases}$$

quindi se ho due funzioni sommabili in $[0,+\infty)$

chiamo il prodotto di convoluzione l'integrale.

$$f_1 * g_1 \overset{\text{def}}{=} \int_0^t f_1(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad f_1 * g_1 \in L[0,+\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} f_1 * g_1\, dt = \int_0^{+\infty} f_1(t)\, dt \cdot \int_0^{+\infty} g_1(t)\, dt$$

n.b. è conseguenza diretta della sommabilità delle trasformate di Fourier.

Nelle trasformate di Laplace si ha solo la locale sommabilità, quindi viene a cadere tutta la teoria.

$$\cancel{\int_0^t} \quad f_1 \in L_{loc}[0,+\infty) \quad g_1 \in L_{loc}[0+\infty]$$

$$f_1 * g_1(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, g_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$f_1 * g_1 \in L_{loc}[0,+\infty) \qquad \int_0^t |f_1(\tau) g_1(t-\tau)|\, d\tau \quad q.o.\ t \geq 0$$

~o— o— o—o

$$f, g \in L_{loc}[0,+\infty] \qquad \exists\, \mathcal{L}[f] \quad \rho_1{}^*$$

$$\exists\, \mathcal{L}[g] \quad \rho_2{}^*$$

$$\mathcal{L}[f*g] \overset{?}{=} \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$$

$$f*g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

vediamo nel caso che f e g siano assolutamente Laplace Trasformabili con ρ_1 e ρ_2 loro ascisse di convergenza.

$$\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-st}|\, dt < +\infty \quad Re(s) > \rho_1$$

$$\int_0^{+\infty} |g(t)\, e^{-st}|\, dt < +\infty \quad Re(s) > \rho_2$$

thesi. $f*g$ è assolutamente Laplace trasf. almeno in $Re(s) > \max(\rho_1, \rho_2)$ $\qquad \mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$

Dimostriamo che

$$\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]$$

$$f(t)e^{-st} \in L[0,+\infty] \quad Re(s) > \rho_1$$

$$g(t)e^{-st} \in L[0,+\infty) \quad Re(s) > \rho_2 \qquad Re(s) > \max(\rho_1,\rho_2)$$

$$\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \cdot \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} [f(t)e^{-st}] * [g(t)e^{-st}]\,dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \mathcal{L}[f*g]$$

Perciò è vero se sono entrambi Laplace trasformabili assolutamente.

Vediamo se è verificato anche sotto altre ipotesi.

$\exists\ \mathcal{L}[f]$ ass $Re(s) > \rho_1$ assolutamente Laplace trasf.

$\exists\ \mathcal{L}[g]$ $Re(s) > \rho_2^*$ solo Laplace trasf.

$$\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g] \quad \text{almeno in } Re(s) > \max(\rho_1,\rho_2^*)$$

Conseguenze

Ip. $\exists\ \mathcal{L}[f]$ $\quad Re(s) > \rho^*$ $\quad$ assolutamente $\mathcal{L}$ trasformabile.

Th. $\exists\ \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \dfrac{\mathcal{L}[f]}{s}$ $\quad$ almeno in $Re(s) > \max(\rho, \rho^*)$

~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○ ~ ○

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = f * H(t) \qquad Re(s) > \max(0, \rho^*)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}[f] \cdot \frac{1}{s}$$

si può dimostrare che:

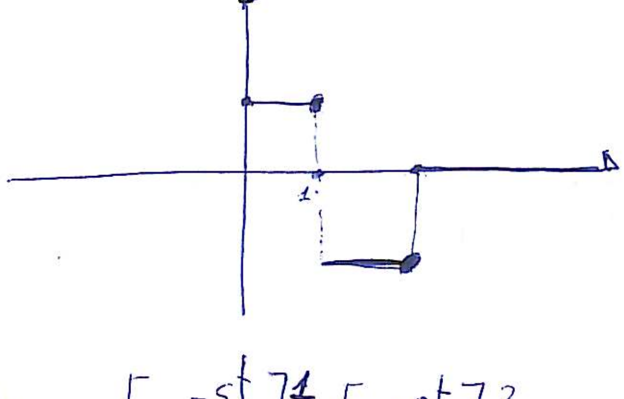
$$\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| < A e^{kt} \qquad \text{dove } k \text{ è un reale} > \max(0, \rho^*)$$

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-st} \int_0^t f(\tau)\,d\tau \right| dt$$

~ ○ ~ ○ ~ ○ — ○ — ○ — ○ — ○ —

Es:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ -1 & 1 < t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$



$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\,dt = \int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{e^{-st}}{+s}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-s}}{s} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s}$$

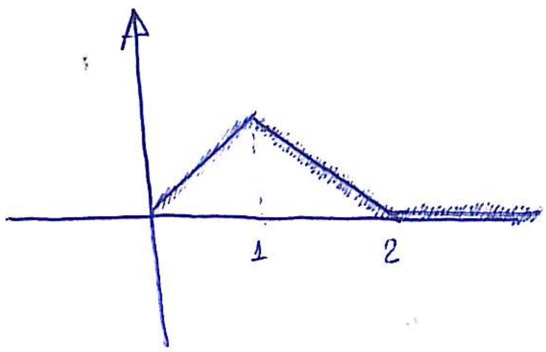
il teorema assicura la assoluta $\mathcal{L}$ trasformabilità almeno per $Re(s) >$ ~~max~~

pag 158

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}$$

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \begin{cases} \int_0^t d\tau & 0 \le t \le 1 \\ \int_0^1 d\tau - \int_1^t d\tau & 1 \le t < 2 \\ \int_0^t 1\,d\tau - \int_1^2 d\tau + \int_0^t 0\,d\tau & t \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^t f(t)\,dt = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$



$\rho = -\infty$

$\exists \mathcal{L}[f] \not\Rightarrow \exists \mathcal{L}[f']$

$t^{-\frac{1}{2}} \qquad -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \notin L_{loc}$

$\exists \mathcal{L}[f'] \quad \rho^*, \quad f \in AC_{loc}[0, +\infty)$

Th f om $\mathcal{L}$ trasf. almen $Re(s) > \max(0, \rho^*)$

$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$

$f(t) + c$ hanno tutte la stessa derivata

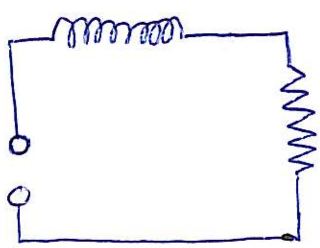
$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,d\tau$ condizione di locale assoluta continuità

$\exists\ \mathcal{L}[f(0)] = \dfrac{f(0)}{s}$ con $\mathcal{L}$ $\rho = 0$

$\exists\ \mathcal{L}\left[\int_0^t f'(\tau)\,d\tau\right] = \dfrac{\mathcal{L}[f']}{s}$ con $\mathcal{L}$ almeno $Re(s) > \max(0, \rho^*)$

$\mathcal{L}[f] = \dfrac{f(0)}{s} + \dfrac{\mathcal{L}[f']}{s}$

Esempio



$v(t) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$

$i(t) \Rightarrow i(0) = 0$

$v(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di}{dt}$

$\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$ $\mathcal{L}\left[\dfrac{di}{dt}\right] = s\,I(s) - i(0)$

$\mathcal{L}[v(t)] = V(s)$

$$V(s) = R\,I(s) + L\,s\,I(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{(R + Ls)}$$

Anti trasf.

$$\frac{1}{Ls+R} = \frac{1}{L}\,\frac{1}{s+\frac{R}{L}} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

$$i(t) = v(t) * \frac{1}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

scriviamo il prodotto di convoluzione.

$$i(t) = v(t) * \frac{1}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t} = \int_0^t v(\tau)\frac{1}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{v_0}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\,d\tau & 0 \le t < T \\ t > T \Rightarrow \displaystyle\int_0^T \frac{v_0}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\,d\tau + \int_T^t 0 \end{cases}$$

In conclusione la funzione è:

$$\begin{cases} \dfrac{v_0}{L}\left[e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right]_0^t & 0 \le t \le T \\ \dfrac{v_0}{R}\left[e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\right]_0^T & t > T \end{cases}$$

Promemoria

$$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0)$$

$$\mathcal{L}[y''] = s\mathcal{L}[y'] - y'(0)$$

$$= s^2\mathcal{L}[y] - y(0)s - y'(0)$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t) \qquad y(0) = A$$
$$y'(0) = B$$

$$\mathcal{L}[y] = y(s) \qquad \mathcal{L}[y'] = s\,y(s) - A$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 y(s) - A(s) - B$$

$$s^2 y(s) - As - B + a_1(s\,y(s) - A) + a_2 y(s) = F(s)$$

$$(s^2 + a_1 s + a_2)\, y(s) = As + B + a_1 A + F(s)$$

$$y(s) = \frac{As + B + a_1 A}{s^2 + a_1 s + a_2} + \frac{F(s)}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{grado } P < \text{grado } Q$$

$$Q(s) = a_m (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_m) \qquad \alpha_i \neq \alpha_j$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{1-\alpha_1} + \frac{A_2}{1-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{1-\alpha_n}$$

non è necessario applicare il principio di identità dei polinomi, infatti A_J è il residuo del polo semplice

$$A_J = \lim_{s \to \alpha_J} \frac{(s-\alpha_J)\,P(s)}{Q(s)} = (H) =$$

$$\lim_{s \to \alpha_J} \frac{P(s) + (s-\alpha_J)\,P'(s)}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_J)}{Q'(\alpha_J)}$$

$$Q'(\alpha_J) \neq 0$$

$$\frac{A_J}{s-\alpha_J} = \mathcal{L}\left[A_J\, e^{\alpha_J t}\right]$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathcal{L}\left[\sum_{J=1}^{m} \frac{P(\alpha_J)}{Q'(\alpha_J)}\, e^{\alpha_J t}\right]$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_{11}}{s-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(s-\alpha_1)^2} + \dots \frac{A_{1r}}{(s-\alpha_1)^{r_1}}$$

$$+ \dots$$

$\frac{A}{(s-\alpha)^k}$ è una trasformata

n.b. se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $\quad Re(s) > \rho^*$

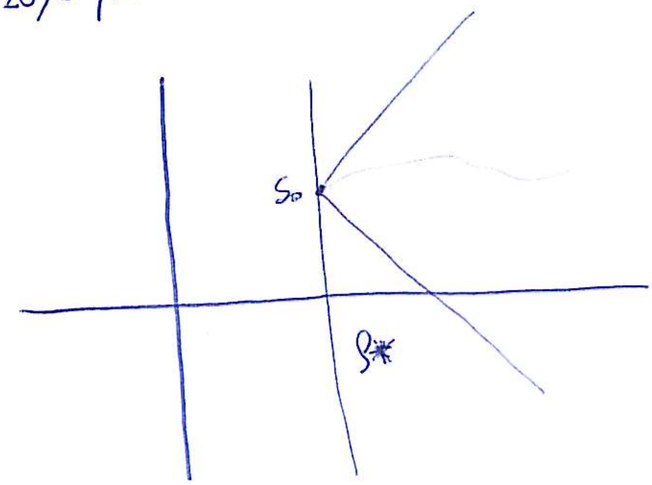
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha) \qquad Re(s) > \rho^*$$

$Re(s) > Re\,\alpha + \rho^*$

$$\mathcal{L}[t^{k-1}] = \frac{(k-1)!}{s^k} \qquad \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \frac{1}{s^k}$$

$$\mathcal{L}\ \frac{e^{\alpha t} t^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{(s-\alpha)^k}$$

16/04/97



$f(t)$

teoremi dei valori iniziali e finali

$$\exists\, s_0 \quad \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,dt = \lim_{\substack{s \to s_0 \\ s \in (s_0, \infty)}} F(s)$$

$$s_0 = 0 \quad \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,0)}}$$

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A(s_0, \infty)}} F(s) = 0$$

$$f \in L_{loc}[0, +\infty)$$

$$f(t) \sim A t^{\alpha} \quad \alpha > -1 \quad \text{per } t \to +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{A t^{\alpha}} = 1$$

$$\mathcal{L}[f] \sim A \mathcal{L}[t^{\alpha}] \quad s \to 0 \quad s \in A(0, \infty)$$

pag 165

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\vartheta)}} \frac{\mathcal{L}[f]}{\frac{A\,\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}} = 1$$

$\alpha = 0$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = A = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\vartheta)}} s\mathcal{L}[f])$

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\vartheta)}} \frac{\mathcal{L}[F]}{\frac{1}{s}} = A$$

$f \in L_{loc}$

$f(t) \sim A t^{\alpha}$ $\alpha > -1$ per $t \to 0$

$\exists \mathcal{L}[f]$ $\quad Re(s) > \rho^*$

$\mathcal{L}[f] \sim A\mathcal{L}[t^{\alpha}]$ per $s \to \infty$ $s \in A(s_0, \vartheta)$

$\alpha = 0$ $\quad \lim_{t \to 0+} f(t) = A = \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A(s_0,\vartheta)}} s\mathcal{L}[f]$

$\exists \mathcal{L}[f']$ $\quad f \in AC_{Loc}[0, +\infty)$

$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A(s_0, \infty)}} s\mathcal{L}[f] - f(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A(s_0, \infty)}} s\mathcal{L}[f] = f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

il teorema di Abel era

se converge $\to \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0, \infty)}} F(s)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\infty)}} F(s) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = l$$

$f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$

per $t \to +\infty$

questi sono i teoremi Abeliani e Tauberiani

Esercizio

$$g(t) = 2 + \frac{t\cos t - \sin t}{e^{2t}}$$

$\mathcal{L}[g]$ valore finale $\mathcal{L}\left[\int_0^{2t} g(\tau)\,d\tau\right]$

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2\pi} \qquad \rho = \emptyset$$

$$\mathcal{L}[t\cos t] = -\frac{d}{ds}\,\frac{s}{s^2+1} \qquad \rho = 0$$

$$= \frac{-s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = 1 \qquad \rho = 0$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}(t\cos t - st)\right]$$ si tratta di scrivere la trasformata e poi fare la traslazione

$$\mathcal{L}[t\cos t - \sin t] = \frac{s^2-1-(1+s^2)}{(s^2+1)^2} = -\frac{2}{(s^2+1)^2} \qquad \rho = 0$$

$$\to = \frac{-2}{\left[(s+2)^2+1\right]^2} \qquad \rho = -2$$

$\mathcal{L}[g] = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s^2+4s+5)^2}$ $\sigma = 0$

$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 2 = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A(0,\sigma)}} s\mathcal{L}[g] = s\mathcal{L}[g] = 2 - \frac{2s}{(s^2+4s+5)^2}$

dentro alla regione angolare

Esercizio 25/9/96

$F_1(s) = \frac{7s^2 - 2s + 9}{s^4 + 2s^2 + 9}$ $F_2(s) = \int_s^{\infty} F_1(z)\,dz$

$F_3(s) = e^{3s} F_1(s)$ $F_4(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-is}}$

$f_i(t)$. $i = 1, 2, 3, 4$ $f_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_i(s)]$

vediamo la prima: (non conviene scomporre risolvendo le equazioni perchè vengono fuori coefficienti complessi)

$s^4 + 2s^2 + 9 = s^4 + 6s^2 + 9 - 4s^2 = (s^2+3)^2 - 4s^2 =$

$= (s^2 + 3 - 2s)(s^2 + 3 + 2s)$

$$\frac{7s^2-2s+9}{s^4+2s^2+9} = \frac{As+B}{s^2-2s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+3}$$

decomponendo si ottiene:

$$\frac{7s^2-2s+9}{s^4+2s^2+9} = \frac{s+1}{s^2-2s+3} - \frac{s-2}{s^2+2s+3}$$

$$\frac{s+1}{s^2-2s+3} = \frac{s+1}{(s-1)^2+2} = \frac{s-1+2}{(s-1)+2}$$

$$\frac{1}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}\, t\right]$$

$$\frac{s}{s^2+2} = \mathcal{L}\left[\cos(\sqrt{2}\, t)\right]$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)^2+2} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}$$ in conclusione é

$$= \mathcal{L}\left[e^t \cos(\sqrt{2}\, t) + \sqrt{2}\, e^t \sin(\sqrt{2}\, t)\right]$$

$$\frac{s+1}{s^2-2s+2} = \mathcal{L}\left[e^t\left[\cos(\sqrt{2} t) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\, t)\right]\right]$$

$$\frac{s-2}{(s+1)^2+2} = \frac{s+1-3}{(s+1)^2+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2} =$$ pag 170

$$= \mathcal{L}\left[e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right]$$

$$f_1(t) = \cos(\sqrt{2}t)(e^{t} - e^{-t}) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\left(\sqrt{2}e^{t} + \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-t}\right)$$

$$\frac{f_1(t)}{t} \in L_{loc}[0,+\infty)$$ f_1 è $\mathcal{L}$ trasformabile $\rho = 1$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{f_1(t)}{t}e^{-st}\right|dt = \int_0^{1}\left|\frac{f_1(t)}{t}e^{-st}\right|dt +$$

$$+ \int_1^{+\infty}\left|\frac{f_1(t)}{t}e^{-st}\right|dt$$

$$\mathrm{Re}(s) > 1 \quad |f_1(t)e^{-st}|$$

$$f_2(t) = \frac{f_1(t)}{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3x}\frac{7x^2-2x+9}{x^4+2x^2+9} = +\infty$$ quindi non è una trasformata perché non è limitata in una regione angolare.

$-is = \log 1 = 2k\pi i \qquad s = -2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 6/7/95

Siano

$$f(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u^{4/3}} \qquad g(t) = ch(t^2) \int_0^t e^{-u^2} du$$

dire se esistono $\mathcal{L}[f]$, e $\mathcal{L}[g]$ precisare le ascisse di convergenza.

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u^{4/3}} du - \int_0^t \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u^{4/3}} du$$

$$u \to 0^+ \qquad \frac{1 - u + o(u^2) - (1 - 2u + o(u^2))}{u^{4/3}} \sim \frac{u}{u^{4/3}} = \frac{1}{u^{1/3}}$$

risulta localmente sommabile.

$$\left| \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u^{4/3}} \right| \le \frac{2}{u^{4/3}} \in L[1, +\infty)$$

$$\frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u^{4/3}} \in L[0, +\infty) \Rightarrow$$ assolutamente $\mathcal{L}$ trasformabile almeno $Re(s) > 0$

calcolare con le trasformate di Laplace le soluzioni Laplace trasformabili dell'equazione:

posto

$$t y'' + (2-3t) y' + (2t-2) y = 0 \qquad y(0)=A$$
$$y'(0)=B$$

$$\mathcal{L}[y] = y(s) \qquad \mathcal{L}[y'] = s y(s) - A$$

$$\mathcal{L}[t y'] = \frac{d}{ds}[s y(s) - A] = y(s) + s\frac{dy}{ds}$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 y(s) - As - B$$

$$\mathcal{L}[t y''] = -\frac{d}{ds}[s^2 y(s) - As - B] - \left[2s y(s) + s^2\frac{dy}{ds} - A\right] =$$

$$= \mathcal{L}[t y'']$$

$$-2s y(s) - s^2\frac{dy}{ds} + A + 2s y(s) - 2A + 3y(s) + 3s\frac{dy}{ds}$$

$$-2\frac{dy}{ds} - 2y(s) = 0$$

$$-(s^2 - 3s + 2)\frac{dy}{ds} + y(s) = A$$

pag 173

L'equazione trasformata

$$\frac{dy}{ds} - \frac{1}{(s-2)(s-1)} y(s) = \frac{-A}{(s-2)(s-1)}$$

ricordarsi la formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del 1° ordine.

$$y(s) = e^{+\int \frac{ds}{(s-2)(s-1)}} \left[\int -A \int \frac{e^{-\int \frac{ds}{(s-2)(s-1)}}}{(s-2)(s-1)} ds + c \right]$$

RICORDARSELA

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

$$A = \lim_{s \to 2} \frac{(s-2)}{(s-2)(s-1)} = 1$$

$$B = \lim_{s \to 1} \frac{(s-1)}{(s-2)(s-1)} = -1$$

$$\int \frac{ds}{(s-2)(s-1)} = \int \frac{ds}{s-2} - \int \frac{ds}{s-1} = \log(s-2) - \log(s-1)$$

In conclusione

$$= \log \frac{s-2}{s-1}$$

$$y(s) = \frac{s-2}{s-1} \left[-A \int \frac{1}{(s-2)(s-1)} \frac{(s-1)}{(s-2)} \right.$$

$$= \frac{s-2}{s-1} \left[\frac{A}{s-2} + c \right] = \frac{A}{s-1} + c \frac{s-2}{s-1}$$

importante

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in A(s_0,s)}} y(s) = 0 = \lim_{s\to\infty} \frac{A}{s-1} + c\,\frac{s-2}{s-1} = c$$

è una trasformata solo per $c=0$

$$y(s) = \frac{A}{s-1} \qquad y(t) = A e^{t}$$

18/01/97

Risolvere con le $\mathcal{L}$-trasf l'equazione integro diff.

$$y'(t) + 2e^{t}\int_0^t e^{-t}\, y'(\tau)\,d\tau + \int_0^t y(t-\tau)\,\mathrm{ch}\,\tau\,d\tau = \mathrm{sh}\,t \qquad y(0)=0$$

$$y'(t) + 2\left(e^{t} * y(t)\right) + y(t) * \mathrm{ch}\,t = \mathrm{sh}\,t \qquad \mathcal{L}\left[y(t)\right] = y(s)$$

$$s\,y(s) - y(0) + 2\,\frac{1}{s-1}\,y(s) + \frac{y(s)}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}$$

$$y(s)\left[s + \frac{2}{s-1} + \frac{s}{s^2-1}\right] = \frac{1}{s^2-1}$$

$$s\,y(s)\cdot\left[1 + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s^2-1}\right] = \frac{1}{s^2-1}$$

$$s\,y(s)\cdot\frac{s^2-1+2s+2+1}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+2s+2)s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\sin t \qquad \int_0^t e^{-\tau}\sin\tau \, d\tau = y(t)$$

Teorema di derivazione per serie

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}\left[f_k(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] \overset{??}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}\left[f_n(t)\right]$$

condizioni necessarie e sufficienti

1) $f_n(t)$ $\underline{\text{ass.}}$ $\mathcal{L}$ trasf. $Re(s) > \rho$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left| e^{-st} f_n(t) \right| dt \qquad Re(s) > \sigma \geq \rho$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ conv. ass. q. ovunque $t \geq 0$

inoltre la funzione somma della serie risulta ass. trasf. ~~almeno~~ per $Re(s) > \sigma$

$f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ ass $\mathcal{L}$. trasf. almeno $Re(s)$ σ

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}[f_n(t)]$$

vediamo una trasf. per serie

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!\, t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \qquad Re(s) > 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left| e^{-st} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right| dt$$

questa serie deve essere convergente nel semipiano

$Re(s) > \cancel{\sigma} \geq 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-Re(s)t} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} dt \qquad Re(s) = x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\left[\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!\, x^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) x^{2n+1}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1 \cdot (2n+1) x^{2n+1}}{(2n+3) x^{2n+3}} \right| = \frac{1}{x^2} < 1 \qquad x > 0$$

$$x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$$

pag 179

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)!\, s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, s^{2n+1}}$$

e la serie di:

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} = \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$

Esercizio

$$\int_0^{+\infty} \underset{\uparrow}{J_0}\left(2\sqrt{tu}\right) \sin u \, du = \cos t \qquad t > 0$$

funzioni
di Bessel
in coordinate
cilindriche

$$\mathcal{L}\left[J_0\left(2\sqrt{tu}\right)\right] \qquad J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$J_0\left(2\sqrt{tu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{2^{2k} t^k u^k}{2^{2k}}$$

condizioni

1) $f_k(u) \dfrac{(-1)^k t^k u^k}{(k!)^2}$ an. $\mathcal{L}$. trasf. $Re(s) > 0$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} |e^{-su} f_k| \, du$ sia conv. per $Re(s) > \sigma \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xw} \frac{t^k}{(k!)^2} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{(k!)^2} u^k\right](x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k!)^2} \frac{\cancel{k!}}{x^{k+1}}$$

si vede subito che portando fuori $\frac{1}{x}$ rimane il termine generale

$$\frac{\left(\frac{t}{x}\right)^k}{k!}$$

Da cui

$$= \frac{1}{x} e^{\frac{t}{x}}$$ che è assolutamente convergente

$x \neq 0$ quindi in tutto il semipiano è applicabile il teorema di trasformazione per serie.

$$\mathcal{L}\left[J_0(2\sqrt{tu})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{\cancel{2}}} t^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} e^{-\frac{t}{s}}$$

$Re(s) > 0$

quindi abbiamo

$$\mathcal{L}\left[J_0(2\sqrt{tu})\right] = \frac{1}{s} e^{-\frac{t}{s}}$$

$$\mathcal{L}\left[J_0(2\sqrt{tu})\,\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-\frac{t}{s-i}}}{s-i} - \frac{e^{-\frac{t}{s+i}}}{s+i}\right]$$

$\mathrm{Re}\,(s-i) > 0$

$\mathrm{Re}\,(s+i) > 0$

Bisogna applicare ABel perché l'ascissa di convergenza è $s=0$

$$\int_0^{+\infty} J_0(2\sqrt{tu})\sin u\,du = \lim_{\substack{s\to 0\\ s\in A(0,\infty)}} \mathcal{L}\left[J_0(2\sqrt{tu})\sin u\right]$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ s\in A(0,\infty)}} \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-\frac{t}{s-i}}}{s-i} - \frac{e^{-\frac{t}{s+i}}}{s+i}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{\frac{t}{i}}}{-i} - \frac{e^{-\frac{t}{i}}}{i}\right)$$

$$= \frac{1}{-2i^2}\left(e^{-it} + e^{it}\right) = \cos t$$

Esempio di Antitrasformazione per serie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{s+a} - \sqrt{s+b}\right] \qquad a,b\in\mathbb{R} \quad a\neq 0 \quad b\neq 0 \quad a\neq b$$

calcolo

$$\sqrt{s}\,\Big[\underbrace{\sqrt{1+\tfrac{a}{s}}}_{\text{serie binomiale}} - \sqrt{1+\tfrac{b}{s}}\Big] = \sqrt{s}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{a^n}{s^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{b^n}{s^n}\right]$$

$$\sqrt{s}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{a^n-b^n}{s^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{a^n-b^n}{s^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\mathcal{L}\left[t^{n-\frac{3}{2}}\right] = \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{s^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{s^{n-\frac{1}{2}}} = \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right] \quad t^{n-\frac{3}{2}}$$

$$f_n(t) = \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{a^n - b^n}{\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)} t^{n-\frac{3}{2}}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

assolutamente $\mathcal{L}$ tras

$Re(s) > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left| e^{-st} f_n(t) \right| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| \frac{|a^n - b^n|}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} t^{n-\frac{3}{2}} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}\left[\frac{|a^n - b^n|}{\cancel{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}}\right] \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| \frac{\cancel{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{x^{n-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a^n - b^n| \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|}{x^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{a^n - b^n}{s^{n-\frac{1}{2}}}$$

vediamo se la serie converge con il criterio del rapporto

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{|a^{n+1} - b^{n+1}| \binom{1/2}{n+1}}{x^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{|a^n - b^n| \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|} \right| = \begin{cases} \left|\frac{a}{x}\right| & |b| < |a| \\ \left|\frac{b}{x}\right| & |b| > |a| \end{cases}$$

$$f_n(t) = \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{a^n - b^n}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} t^{n-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\binom{\frac{1}{2}}{n+1}}{\binom{\frac{1}{2}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n-1+1\right)}{(n+1)!}\frac{n!}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}$$

semplificando

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}-n}{n+1}\right| = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a^{n+1}-b^{n+1}|}{|a^n-b^n|} \overset{\text{racc. }a\text{ si ha}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right)}{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = |a| \text{ se } |b|<|a|$$

se $|b|<|a|$

se invece $|b|>|a|$ si raccoglie b e risulta $|b|$ per $|b|>|a|$

in conclusione

$$= \mathcal{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{a^n-b^n}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}t^{n-\frac{1}{2}}\right]$$

Esercizio

Usando la tras. di Laplace dimostrare

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \sin t \, dt = \frac{n}{2^{\frac{(n+1)}{2}}} \sin (n+1) \frac{\pi}{4} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\to \mathcal{L}[t^n \sin t](1)$

$$\mathcal{L}[t^n \sin t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} t^n\right] \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(s-i)^{n+1}} - \frac{1}{(s+i)^{n+1}}\right]$$

La trasformata calcolata in 1 è:

$$\mathcal{L}[t^n \sin t](1) = \frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] = \to$$

si applica la formula di de Moivre

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (1-i)^{n+1}$$

$$= (\sqrt{2})^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}$$

Analogo per $1+i$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (1+i)^{n+1} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left[t^n \sin t\right](1) = \begin{cases} \dfrac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \dfrac{n!}{2i\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \left[e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}\right] \end{cases}$$

fine corso