MATEMATICA : $\boxed{\text{LIBRO ROSSO}}$

- funzione OLOMORFA : una f. che risulta derivabile (in senso complex) in una regione (aperto + connesso) di $\mathbb{C}$
- OLOMORFA $\Leftrightarrow$ ANALITICA (teor. del prolungamento).
- Condizioni di Cauchy-Riemann: (necessarie ma non suff per l'olomorfia).
- Trasformazioni
  - se $(|f'(z)|^2 = J_{dc})$ $f'(z_0) \neq 0$ è biunivoca in un int. di z
  - isogoniche : mantengono gli angoli (indotte da f. ol. in z o $\bar{z}$)
  - conformi : " " " e i versi (indotte da f. olomorfe)

$\rightarrow \int_\gamma f(z) = \int_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i \int_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$

- f olomorfa in Ω semplic. conn. γ è una curva di Jordan (chiusa e semplice) $\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ (t. integrale di Cauchy).
- Ω di olomorfia per f, γ di Jordan si dice OMOLOGA A ZERO se tutti i punti racchiusi da γ appartengono a Ω
- Due γ di Jordan si dicono omologhe se circondano la stessa parte di frontiera di Ω e hanno lo stesso orientamento.
- Due archi γ_1 e γ_2 si dicono omologhi se hanno <u>estremi in comune</u> e esiste un γ_3 con gli stessi estremi comuni: $\gamma_1 \cup (-\gamma_3)$ omologa $\gamma_2 \cup (-\gamma_3)$
- per z interno a Ω valgono (f olomorfa in Ω, γ OMOLOGA A ZERO).

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f(t)}{t-z}\,dt \\ f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \end{cases}$$

- f olom. in Ω, K compatto $\subset \Omega$, ∂K curva omologa a zero, $z \in K$, η di di z da ∂K, $M = \max_{z \in \partial K} |f(z)|$ $\Rightarrow$ $f^{(n)} \leq \frac{n! M}{\eta^n}$. Se $\Omega = \mathbb{C}$, M non dip. da $\partial K \Rightarrow \eta \to \infty \Rightarrow \boxed{|f^{(n)}(z)| = 0\ \forall n}$ $\Rightarrow$ f è costante. (LIOUVILLE)
- $g(x_1, \dots, x_n)$ è ARMONICA se soddisfa alle eq. di Laplace $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} =$
- OLOMORFA $\Rightarrow$ ARMONICA (u e v sono armoniche nel piano).
- La somma di una serie di f. olomorfe in Ω che converge in un compatto K di Ω è una funz. olomorfa in K e vale deriv. per serie di q. ordine
- Ogni serie di potenze def. in Ω converge ad una f. olomorfa in Ω e conv. uniformem. in ogni compatto $K \subset \Omega$ ed è la serie di Taylor della propria somma.

  <u>Viceversa</u> : una f olomorfa è sviluppabile in un intorno di ogni punto di olomorfia in S. d. T.

$$f(z) = \sum_0^\infty {}_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \text{(Cauchy - Taylor)}$$

- Due funz. olom. in Ω che coincidono in $\Omega_1 \subset \Omega$ coincidono in tutto Ω (pr. identità) $\Rightarrow$ ogni zero è isolato
- Due funz. che coincidono su un insieme che ha un punto di accumulazione in Ω, coincidono in tutto Ω (identità ristretta) $\Rightarrow$ <u>$\exists$ un solo</u> prolungamento analitico di una $f(x)$ $x \in \mathbb{R}$

- Punto singolare: se non è centro di uno sviluppo in s.d.P. che ne ulteriore prolungamento.

- Per le f OLOMORFE - MONODROME in una corona circ. Ω di centro z_0 vale lo sviluppo di Cauchy - Laurent:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_0^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{1-n}} dt$$

b_1 è detto RESIDUO di f all'interno di γ

- singolarità z_0: (ha senso parlarne per f monodrome).
  - eliminabile (se f è limitata in un int. di z_0 $\Rightarrow$ tutti i b_n sono nulli).
  - polare (se $f \to \infty$ per $z \to z_0$ $\Rightarrow$ i $b_n \neq 0$ sono in numero finito) $\max_k (b_k \neq 0)$ = ordine del polo
  - essenziali (negli altri casi $\Rightarrow$ $b_n \neq 0$ per ∞ n).

- Teor. dei RESIDUI: se f olom in Ω e γ curva di Jordan $\subset \Omega$ e racchiude un numero finito di discont. $z_1 .. z_k$ allora detto r_k il residuo in z_k:

$$\oint_\gamma f(z) = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} r_n$$

- Teorema di Jordan: una curva di Jordan divide un piano in due insiemi disgiunti (e queste due parti vengono chiamate una interna e l'altra esterna).

- Teorema di Cauchy: se f è olomorfa su una regione Ω, su ogni curva chiusa γ contenuta in Ω, l'integrale di f è nullo: $\oint f(z)\,dz = 0$

Una curva γ si dice omologa a zero per una funzione olomorfa f se 1) è di Jordan 2) tutti i punti da essa racchiusi sono di olomorfia per

Due archi γ_1 e γ_2 si dicono omologhi per una funzione f se 1) hanno gli stessi estremi 2) $\exists\ \gamma_3$: $\gamma_1 - \gamma_3$ e $\gamma_2 - \gamma_3$ sono curve omologhe a zero.

Due curve di Jordan si dicono omologhe per una f olomorfa se circondano la stessa parte di frontiera di Ω

Formula di Cauchy: (per le regioni semplicemente connesse): Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω: Allora vale la formula $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z}\,dt$ per ogni γ di Jordan contenuta in Ω e $\forall z$ racchiuso da γ

Teorema di Morera: Se f è continua in una regione semplicemente connessa Ω e per ogni curva ~~di~~ γ contenuta in Ω vale $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ allora f è olomorfa in Ω

Teorema di Weierstrass: 1) $f_1, f_2, \dots, f_n$ olomorfe in Ω; 2) K un compatto $\subset \Omega$ che ha per frontiera le curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$; 3) le f_i convergono uniformemente in K ad una f $\Rightarrow$ f è olomorfa e le $f_i' \to f'$, $f_i'' \to f''$, ..., $f_i^{(p)} \to f^{(p)}$ e la convergenza è uniforme.

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}}\,dt$$

Teorema di Cauchy/Taylor: $f(z)$ olomorfa in una regione Ω semplicem. connessa, $z_0 \in \Omega$ $\Rightarrow$ in un cerchio aperto di centro z_0 e $\subset \Omega$ vale $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

Teorema di Liouville: Se $f(z)$ è limitata su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa su $\mathbb{C}$ allora è costante.

Si dicono funzioni armoniche le funzioni che soddisfano $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (eq di Laplace nel piano).

Principio di identità per le funzioni olomorfe: Due funzioni che, olomorfe su Ω, coincidono su una sottoregione Ω^* coincidono su tutto Ω.

Teorema degli zeri: Gli zeri di una funzione olomorfa sono isolati (se una funzione olomorfa in Ω si annulla su un sottoinsieme che ha un punto di accumulazione in Ω si annulla su tutto Ω. (Pr. identità ristretto)

Ordine degli zeri: si dice che f ha uno zero di ordine k nel punto z_0 se è $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$

Se $f_1 = f_2$ su $\Omega_1 \cap \Omega_2$, f_1 si dice prolungamento di f_2 ad Ω_1 ed f_2 si dice prolungamento di f_1 ad Ω_2

Funzione analitica: uno sviluppo in serie di potenze assieme a tutti i suoi prolungamenti.

Teorema di Cauchy/Laurent: mi permette di scrivere uno sviluppo in serie di potenze anche se la f è olomorfa su una corona circolare anziché su un cerchio:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n a_n (z-z_0)^n + \sum_{1}^{\infty}{}_n b_n (z-z_0)^{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}dt$$

Se i b_n sono:
1) tutti nulli: la f è limitata in un intorno di z_0
2) tutti nulli tranne un numero finito: $f \to \infty$ per $z \to z_0$
3) infiniti $\neq 0$: la f è illimitata e non ha lim $z \to z_0$

Se z_0 è una singolarità isolata b_1 ha importanza particolare ed è detto residuo.

Teorema dei residui: $z_0, z_1, \dots, z_k$ punti di NON-olomorfia all'interno di γ allora $\oint_\gamma f(z)\,dz = \left(\sum_0^k{}_n r(z_n)\right) \cdot 2\pi i$ $\quad r(z_j) = b_{1j}$

Se i b_n sono:
1) singolarità eliminabile $b_1 = 0$
2) " polare: $b_1 = \begin{cases} \text{polo ord 1}: \lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z) \\ \text{polo ord r}: \lim_{z\to z_n}\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[(z-z_0)^r f(z)\right] \end{cases}$

Teorema fondam. algebra: Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Teorema dell'indicatore logaritmico: f olomorfa in Ω, γ curva di Jordan $\subset \Omega$; $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ siano gli zeri di f dentro a γ; $\beta_1, \dots, \beta_p$ siano i poli dentro a γ e non vi siano singolarità essenziali entro γ allora vale: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = k - p$

Teorema di Rouché: f e g olomorfe in Ω, $\gamma \subset \Omega$, se su γ è $|f| > |g|$ allora entro γ le equazioni $f(z) = 0$ ed $f(z) + g(z) = 0$ hanno lo stesso numero di zeri.

Teorema del massimo modulo: se f è olomorfa in Ω, γ di Jordan $\subset \Omega$ il modulo di f ha massimo su γ rispetto ai punti interni a γ.

Lemma dell'arco di cerchio GRANDE: se nella regione $A = \{\rho < k;\ \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$ è $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ per $z \in A$ allora è
$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\lambda_\rho} f(z)\,dz = 0$$

Lemma dell'arco di cerchio piccolo: se nella regione ang. A è $\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$ allora è $\lim_{\rho\to 0}\oint_{\lambda_\rho} f(z)\,dz = 0$.

- La norma su uno spazio vettoriale genera anche una distanza $d(x,y) = \|x-y\|$

- Uno s.v. dotato di distanza si chiama metrico, uno avente norma si dice normato.

- In uno spazio metrico $\{x_n\}$ si dice convergente secondo Cauchy se $\forall \varepsilon>0$, $\exists \bar{n}$: $\forall p,q > \bar{n}$ $d(x_p, x_q) < \varepsilon$

- In uno spazio normato : $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \bar{n}$: $\forall p > \bar{n}$ $\|x_p - x\| < \varepsilon$

- Teorema di Cauchy : $\mathbb{R}$ è completo : ogni successione che converge secondo Cauchy converge in maniera ordinaria.

- Si dice completo rispetto ad una norma uno s.v. tale che ogni successione convergente secondo Cauchy converge anche in senso ord.

- $C^0(I)$ è lo spazio delle funzioni continue in I dotato della norma $\|f\| = \sup_{t\in I} |f(t)|$: Rispetto a questa norma $C^0(I)$ è completo.

- $L^1(I)$ è lo spazio delle funzioni sommabili su I dotato della norma $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$

- Teorema : se una successione $\{f_n\}$ di $C^0(I)$ converge nella norma di C^0 ed I ha misura finita allora converge anche nella norma di $L^1(I)$.

- ℓ^2 è lo spazio di successioni $\{x_n\}$ di numeri complessi tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$ dotato della norma $\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$

- Teorema di Hausdorf: ℓ^2 con la sua norma è completo.

- Prodotto scalare : $\langle\, , \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$
  Su $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
  Su $\mathbb{C}^n$ $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

- Su uno spazio dotato di prodotto scalare def. questa nuova norma:
  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

- Spazio pre-Hilbertiano : s.v. dotato di prodotto scalare

- Spazio Hilbertiano : spazio pre-H. completo, a base numerabile e a dimensione infinita.

- Basi : insieme di vettori u_i tale che $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x$ dello spazio $\exists$ una n-upla di vettori estratti da u_i e una n-upla di coefficienti α_i tali che : $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\| < \varepsilon$

- $L^2(I)$ è lo spazio delle funzioni il cui quadrato è sommabile in I. lo doto della seguente norma:
  $\|f\|_{L^2(I)} = \left\{ \int_I |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$ L^2 è completo nella sua norma.

Teorema: (della migliore approssimazione in norma): Dato un vettore x di uno spazio di Hilbert H e dato un sistema di vettori indipendenti di H $\{u_i\}$ allora la migliore approssimazione in norma di x è data da

$$\sum_{i=1}^{d} c_i u_i \quad \text{dove } c_i = \langle x, u_i \rangle$$

Teorema (ortogonalizzazione): dato un sistema di vettori u_i, $\exists$ sempre un sistema di vettori ortonormali u_j tale che ogni u_i è comb. lin. finita degli u_j.

- Il sistema formato da $\sin nt$, $\cos nt$ è ortogonale in $[-\pi,\pi]$ di L^2 ... $\sin nt$ e $\cos nt$ riesco ad esprimere elementi di L^1 ed L^2

- Disuguaglianza di Bessel: $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \quad a_i = \langle x, u_i \rangle$

(Ci dice che la succ. $a_i = \langle x, u_i \rangle \in \ell^2$: quindi ℓ^2 è una buona approssimazione di uno spazio di Hilbert generico; a_i si dicono i coefficienti di Fourier)

- Uguaglianza di Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|^2$

(Vale quando il sistema è completo).

- Teorema di Fischer - Riesz: Dato un sistema completo, indipendente ed ortonormale in L^2 e dato un elemento $\{a_i\} \in \ell^2$ $\exists$ una funzione di L^2 tale che gli a_i siano i suoi coeff di Fourier risp. al sistema. (Mi dice che L^2 è completo risp. alla sua norma).

- Si dice supporto di una funzione f il più piccolo chiuso al di fuori del quale la f è nulla. (le funzioni analitiche non hanno supp. comp. ...)

- Uno spazio normato e completo si dice di Banach.

- Una serie trigonometrica se converge converge ad una funzione periodica con periodo $\leq 2\pi$.

- Se converge uniformemente converge ad una funzione che oltre ad essere periodica è anche continua.

- Teorema di Fourier: Se una ~~funzione~~ serie trigon. $\sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ converge unif. in $[-\pi, \pi]$ ad una funz. f, allora i suoi coefficienti sono:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \, dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \, dt$$

$$\left\{ \text{infatti } a_n = \langle f, \tfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \quad b_n = \langle f, \tfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \right.$$

$$\left. f = \sum \left(\langle f, \tfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \cdot \tfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \langle f, \tfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \rangle \cdot \tfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right) \right\}$$

- La media dei valori che una f olomorfa assume su una circonferenza di centro C è $f(C)$.

- Spazio prehilbertiano: spazio vettoriale dotato di prodotto scalare
- norma indotta dal p.s. : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- metrica indotta dalla norma: $d(x,y) = \|x - y\|$ (indotta dal p.s.).
- Spazio topologico: uno spazio metrico sul quale è stato definito un sistema di intorni: $I_\varepsilon(x) = \{ y \in V : d(x,y) < \varepsilon \}$
- Convergenza secondo Cauchy: una succ. di V $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (e conv. secondo Cauchy) se fissato $\varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n}$, ~~...~~ : $\forall n, m > \bar{n}$ sia $d(x_n, x_m) < \varepsilon$
- Spazio metrico completo: se $\forall$ succ. di Cauchy $\exists\, x \in V$: la succ. converge a x $(d(x_n, x) \to 0$ per $n \to \infty)$
- Spazio normato completo: se è completo come spazio normato con la norma indotta dal prod. scalare. (È detto spazio di Banach)
- Un insieme M' si dice denso in un ins. M se ogni elemento di M è limite (nella metrica di M) di una successione di elementi di M'.
- Spazio metrico separabile: se ha un sottoinsieme denso e numerabile.
- Spazio di Hilbert: uno spazio pre-Hilbertiano, completo, separabile e di dimensione infinita.
- su $L^2(E)$ viene istituito questo prodotto scalare: $f, g \in L^2(E)$

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(t)\, \overline{g(t)}\, dt \Rightarrow \text{norma } \|f\|_{L^2(E)} = \left(\int_E |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{metrica } d(f,g) = \left(\int_E |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

- Teorema di Fisher-Riesz: rispetto alla norma di cui sopra $L^2(E)$ è completo.
- Problema della miglior approssimazione in norma: dato un vett. x di uno s.v. preH. non è detto che $\exists$ un sist. di vf. che riesca ad esprimerlo esattamente: viene quindi ricercato il minimo della norma $\|x - \sum_{1}^{k} c_k u_k\|$. Se il sistema è ortonormale (lo trovo con Schmidt) il problema ha soluzione semplice: è $c_k = \langle x, u_k\rangle$ e quindi la miglior approx di x è $\sum_{1}^{k} \langle x, u_k\rangle u_k$ il minimo della norma $\|x - \sum c_k u_k\|$ risulta essere quindi: $\|x\|^2 - \sum_{1}^{k} |\langle x, u_k\rangle|^2$;

$\|x\|^2 \geq \sum_{1}^{k} |\langle x, u_k\rangle|^2$ diseguaglianza di Bessel.

se u_k è una base $\Rightarrow$ lo spazio è completo allora è

$\|x\|^2 = \sum_{1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2$ identità di Parsevaal. (ad ogni elem. di L^2 associa uno di ℓ^2)

- Se $\{u_k\}$ è un sys. ortonormale le comp. $a_k = \langle x, u_k \rangle$ del vettore x sono i <u>coefficienti di Fourier</u> di x rispetto al sistema $\{u_k\}$.

- <u>Teorema di Fischer - Riesz - 2^ forma</u>: preso una base ortonorm. $\mathcal{F}$ in $L^2([a,b])$. e preso un elem. di ℓ^2 (una succ. $\{a_k\}$ con $\sum_1^\infty |a_k|^2 < +\infty$) allora $\exists$ una funzione $f \in L^2([a,b])$: che gli a_k sono i suoi coeff. di Fourier rispetto alla base.
(questo teorema associa ad ogni elemento di ℓ^2 una funzione di $L^2([a,b])$.

Un sistema $\{u_k\}$ in uno spazio prehilbertiano $\mathcal{F}$ si dice CHIUSO se solo per il vettore nullo x si verifica $\forall k$ $\langle x, u_k \rangle = 0$.

In uno spazio di Hilbert sistemi chiusi $\Leftrightarrow$ complet.

- Polinomio trigonometrico di ordine k:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^k{}_n \left((\cos nx)\cdot a_n + b_n \operatorname{sen} nx\right) \text{ oppure } \sum_{-k}^{k}{}_n c_n e^{inx} \text{ oppure}$$

$$\sum_0^k{}_n A_n \operatorname{sen}(nx + \varphi_n)$$; serie trigonom. formale $(k=\infty)$.

Il termine n-esimo della serie è detto <u>armonica n-esima</u> e la sua espressione non dipende dal <u>sistema usato</u>.

- Il primo termine della serie $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ è la media
- $g(x) = f(x-2k\pi)$ $\forall x \in [-\pi + 2k\pi \;\; \pi + 2k\pi]$ g è il <u>prolungamento per periodicità</u> di f $(f \in L[-\pi,\pi])$.

- <u>Teorema</u>: se <u>$f \in C^0(\mathbb{R})$</u> periodica di periodo 2π la sua serie di Fourier <u>converge in media quadratica</u> ad f.

- <u>Teorema</u>: se <u>$f \in C^2(\mathbb{R})$</u> periodica con periodo 2π la sua sdF converge <u>uniformemente</u> in $\mathbb{R}$

- <u>Teorema</u>: Esistono s.d.F. che non convergono in alcuni punti (Kolgomorov)
- <u>Spettro a righe</u>: rappresentazione grafica dei coeff. di Fourier (in ascisse l'ordine di armonica).
- Cambiamento di var: da $[-\pi,\pi]$ a $\begin{cases}[-l,l] & x = \frac{l}{\pi}\xi \; ; \; \xi = \frac{\pi}{l}x \\ [0,T] & \xi = \frac{2\pi}{T}x \; ; \; x = \frac{T}{2\pi}\xi\end{cases}$

- <u>Teorema</u>: due funzioni $f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R})$ periodiche di periodo 2π che hanno la stessa s.d.F. <u>coincidono</u>.

- <u>Teorema</u>: una funzione $f \in C^0(\mathbb{R})$, periodica di periodo 2π <u>è individuata</u> dalla sua s.d.F.

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che l'algoritmo T definisce una <u>somma generalizzata</u> quando:

1) trasforma la $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in un'altra succ. $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
2) effettua un'operazione di limite sulla $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
3) nel caso che la $\sum a_n$ ~~......~~ sia non indeterminata, il risultato λ (finito o no) della operazione di limite sulla σ coincide con la somma usuale.

4) Nel caso la serie $\sum a_n$ sia indeterm. ed esiste invece λ (finito o no) il limite λ si dice <u>somma generalizzata secondo l'algoritmo T</u>.

<u>Teorema di Cesàro</u>: ~~data~~ la succ. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se è $\sum^{\infty} a_n = \lambda$ (finito o no) allora $\lim_{k\to\infty}\{\sigma_k\} = \lim_{k\to\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{k-1}}{k} =$

$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_0^{k-1} s_r = \lambda$ (la media delle somme parz.).

λ = somma secondo Cesàro

- Variazione : f def. in $[a,b] \subset \mathbb{R}$; suddividendo $[a,b]$ in n intervalli: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ si avrà var. di f in $[a,b]$: $V[f;a,b] = \sup \sum_{1}^{n}{}_k |f(x_k) - f(x_{k-1})|$

Se $V[f;a,b]$ è finita la f si dice a variazione limitata in $[a,b]$ e si indica con $f \in BV_{[a,b]}$ (s.v.)

Proprietà delle f. a var. lim.:

1) $V[\alpha f + \beta g; a,b] = |\alpha| \cdot V[f;a,b] + |\beta| V[g;a,b]$
(è lo spazio BV)

2) $f \in BV_{[a,b]}$ ~~e monotona~~ $\Rightarrow V[f;a,b] = |f(b) - f(a)|$

3) φ sommabile $\Rightarrow f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \in BV_{[a,b]}$ ed è
$V[\varphi; a b] = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$

4) $V[f;a,c] + V[f;c,b] = V[f;a,b]$ (con $a \leq c \leq b$)

Lo spazio delle funzioni $BV_{[a,b]}$ coincide con le comb. lin. delle funzioni monotone.

- Una funzione che soddisfa alle condiz. di Dirichlet in $[a,b]$ è $\in BV_{[a,b]}$

- Criterio di Jordan. $f \in BV_{[-\pi,\pi]}$ e periodica di periodo 2π, def. su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ la sua S.d.F converge a $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- $f \in C^0(\mathbb{R})$, periodica di p. 2π e $\in BV_{[\pi,\pi]}$ la sua S.d.F converge uniformemente ad f in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ in tutto $\mathbb{R}$.

Trasformazioni integrali :

Trasformazione integrale = trasformazione di uno spazio di funzioni A in un altro spazio B del tipo

$$F(f) = \int_E f(x)\, k(\lambda, x)\, dx \qquad K(\lambda,x) \text{ è detto nucleo della trasf.}$$

Una trasformata integrale è lineare $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$

Le più usate sono:

- Laplace
  - unilatera $\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot f(x)\,dx \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - bilatera $\mathcal{L}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\lambda x}\,dx \quad \lambda \in \mathbb{C}$

- Fourier $\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(da cui derivano sen e cosen-trasformate).

- Ogni $f \in L(\mathbb{R})$ ha trasformata di Fourier: $\hat{f}$ invece NON è detto che $\in L(\mathbb{R})$.
- Antitrasformata di Fourier:

NB. manca il '−'

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \end{array}\right\} \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Notare il notevole grado di simmetria con la formula della trasformata che aumenta di molto se definisco la trasformata con:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \; ; \; \bar{\mathcal{F}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

- Proprietà della $\mathcal{F}$-trasformata:
  1) $f \in L(\mathbb{R})$; $\hat{f}(\omega) \to 0$ per $\omega \to \infty$
  2) $f \in L(\mathbb{R})$; $\hat{f}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$
  3) $\hat{f}$ è limitata su $\mathbb{R}$ $\left(\hat{f} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty \right)$
- Formule di traslazione:
  1) Se $\hat{f}(\omega)$ è la trasf. di $f(t)$, la trasf. di $f(t-t_0)$ è $= e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$ (traslazione nel tempo).
  2) $\hat{f}(\omega-\omega_0) = \widehat{f(t) e^{i\omega_0 t}}$ (traslazione in frequenza).
- Prima formula fondamentale di Fourier (derivazione nel tempo)

$$\mathcal{F}[f^{(k)}] = (i\omega)^k \mathcal{F}(f)$$

- Derivazione in frequenza:

$$\boxed{[\mathcal{F}(f)]^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]}$$

T. del cambiamento di scala:

$$\widehat{f(at)} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$:

$f, g \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ $\exists$ finito $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$ e questo integrale definisce una funzione $h(t)$ sommabile su $\mathbb{R}$ $h = f * g$ (prodotto di convoluzione tra f e g). (assoc.-comm.)

Proprietà: $h = f * g$ $(f, g \in L(\mathbb{R})) \Rightarrow \hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Campionamento:
- larghezza di banda: si dice che f è a banda strettamente limitata se $\exists\, \omega_0$: $\mathcal{F}(f) = 0$ per $|\omega| > \omega_0$

applicazioni pratiche: mi interessa l'$\inf(\omega_0)$

$\omega_0^* =$ larghezza di banda.

larghezza convenzionale di banda:

$f \in L(\mathbb{R})$ $M = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|$ sicuramente $M \exists$ $\left(\hat{f} \to 0 \atop f \text{ cont.}\right)$ *

prendo un $\alpha << 1$ e trovo quell' ω_0 : $|\hat{f}(\omega_0)| < \alpha M$ per $|\omega| > \omega_0$; f si dice a banda praticamente limitata e l'inf. degli ω_0, ω_0^* è detto larghezza (convenzionale) di banda

Teorema di Shannon (o del campionamento)

f a banda rigorosamente limitata ; allora vale:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \, f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin[\omega_0(t - k\pi/\omega_0)]}{\omega_0(t - k\pi/\omega_0)} \quad \text{(formula di Shannon)}$$

Se invece conosco i coefficienti posso riottenere la f solo se questa era a banda rig. limitata e se il campionam. è stato fatto in maniera suff. fitta. Altrim. dal 2° membro della f. di S. ottengo una g che può essere vista come distorsione della f (errore di aliasing)

Trasformata di LAPLACE:

Le funzioni usate sono f sommabili in ogni intervallo di $\mathbb{R}_0^+$ $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ e continue quasi ovunque.

$F(s) = \to\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ se $\exists$ un s_0 : l'integrale improprio risulta convergente f si dice trasformabile secondo Laplace.

- T. Se l' $\int$ di Laplace è convergente per un certo s_0 esso è convergente $\forall s$: $Re[s] > Re[s_0]$

Se, $f \in L_{loc}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile $F(s)$ si dice trasformata di Laplace di f. L'estremo inferiore degli s_0 è detto ascissa di convergenza ρ^*

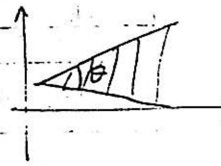
- Se invece data $f \in L_{loc}$ $\exists s_0$: $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ esiste finito (int. di Lebesgue) allora la F si dice assolutamente trasformabile secondo Laplace (se $\exists s_0 ... \Rightarrow \forall s$: $Re[s] \geq Re[s_0]$ f è an-$\mathcal{L}$-trasformabile). L'estremo inferiore degli s_0 è detto ascissa di conv. assoluta ρ. (nella retta $Re[s] = \rho$ c'è conv. in tutti i punti o non c'è in nessuno)

$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$ $\quad \rho = \max\{\rho_f, \rho_g\}$

- Teorema . f $\mathcal{L}$-trasform. con asc. di conv. ρ^*, s_0 un punto di conv. per l'integrale di ~~Laplace~~ Laplace, θ un numero arbit. : $0 < \theta < \pi/2$ e sia $A(s_0, \theta)$ l'angolo di vertice s_0 e ampiezza: $|\arg(s - s_0)| \leq \theta$ allora la convergenza dell'integrale di Laplace è uniforme al variare di s in $A(s_0, \theta)$.

Teorema : se f è $O(e^{kt})$ per $t \to +\infty$ allora f è anal. $\mathcal{L}$-trasformabile e $\rho \leq k$

Teorema : $f \in L_{loc}$ ed $\exists k \in \mathbb{R}$: $f = O(t^k)$ per $k \to \infty$ allora f è analut. $\mathcal{L}$-trasform. e $\rho \leq 0$

<u>Teorema</u>: sia f $\mathcal{L}$-trasformabile e sia A  allora:

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in A}} \mathcal{L}[f](s)=0$$

<u>Teorema</u>: $f\in L(\mathbb{R}_0^+)$ allora $\lim_{s\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot f(t)\,dt=0$

($s\in\mathbb{C}$; $Re[s]\geq 0$)

<u>Teorema</u>: $f\in L_{loc}$, $\mathcal{L}(f)$ ha ascissa di conv. ρ^* allora $\forall\sigma>\rho^*$

vale $\lim_{s\to\infty}\frac{[\mathcal{L}(f)](s)}{s}=0$ $\quad Re[s]\geq\sigma$

(Se sto nell'angolo A la $\mathcal{L}(f)$ va a zero da sola, se sto su una retta $\perp$ ad x, $\mathcal{L}(f)$ potrebbe andare a ∞, ma allora di ordine ≤ 1).

$\boxed{\text{Prima formula fondamentale}}$:

Se f è $\mathcal{L}$-trasformabile, la sua trasformata risulta OLOMORFA nel semipiano di convergenza e $\forall n\in\mathbb{N}$ anche $t^n f(t)$ è $\mathcal{L}$-trasf. ed è

$$(-1)^n\mathcal{L}(t^n f(t)) = [\mathcal{L}(f)]^{(n)}$$

(la derivazione nello spazio delle $\mathcal{L}$-trasf. corrisponde alla molt. per $-t$ in $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$)

(si usa al contrario per trovare le $\mathcal{L}(t^n f(t))$ non come è scritta qui.)

$\boxed{\text{Teorema}}$: $\frac{f(t)}{t}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con a.d.c. ρ^* allora vale:

$$\left[\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right](s) = \int_s^\infty [\mathcal{L}(f)](\sigma)\,d\sigma$$

dove il cammino è uno qualsiasi in $A(s,\theta)$

$\boxed{\text{Teorema della TRASLAZIONE IN s}}$ f $\mathcal{L}$-trasf. con adc $=\rho_0^*$, $\alpha\in\mathbb{C}$

$$[\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))](s)=[\mathcal{L}(f(t))](s-\alpha) \quad \text{con } \rho^*=\rho_0^*+Re[\alpha]$$

$\boxed{\text{Teorema della TRASLAZIONE IN t}}$ f $\mathcal{L}$-trasf. con adc $=\rho_0^*$, $\alpha\in\mathbb{R}_0^+$

$$[\mathcal{L}(f(t-\alpha)\cdot H(t-\alpha))](s)=e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f) \qquad \rho^*=\rho_0^*$$

$\boxed{\text{Teorema del CAMBIAMENTO DI SCALA}}$ f $\mathcal{L}$-trasf. con adc ρ_0^*, $\lambda\in\mathbb{R}_0^+$

$$[\mathcal{L}(f(\lambda t))](s)=\frac{1}{\lambda}\cdot[\mathcal{L}(f(t))]\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad \text{con } \rho^*=\lambda\rho_0^*$$

$\boxed{\text{Teorema}}$: $g\in L(0,T)$, f è il suo prol. per period. a $\mathbb{R}_0^+$ $\Rightarrow$

f è $\mathcal{L}$-trasformabile ed è:

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\cdot\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

(utile per calcolare $\mathcal{L}$-trasformate di funz. tipo $|\text{sen}\,\omega t|$ oppure onda quadra etc.).

Prodotto di convoluzione:

$\boxed{\begin{array}{l} f\ \mathcal{L}\text{-trasf. ddc} = \rho^* \\ g\ \underline{\text{ass}}\text{-}\mathcal{L}\text{-trasf. ddca } \rho_1 \end{array}} \Rightarrow$ $f*g$ è $\mathcal{L}$-trasf con ddc $\rho_2^* \leq \min[\rho^*, \rho_1]$ e vale $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$

$(\forall s \in \mathbb{C} : Re[s] > \max[\rho^*, \rho_1])$

$\boxed{\begin{array}{l} f\ \underline{\text{ass}}\text{-}\mathcal{L}\text{-trasf. ddca} = \rho_1 \\ g\ \underline{\text{ass}}\text{-}\mathcal{L}\text{-trasf ddca} = \rho_2 \end{array}} \Rightarrow$ $f*g$ è ass-$\mathcal{L}$-trasf con ddca $\leq \max[\rho_1, \rho_2]$ e vale

$(\forall s \in \mathbb{C} : Re[s] > \max[\rho_1, \rho_2])$ $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$

Teorema (Fucco): f $\mathcal{L}$-trasf. con ddc $= \rho_0^* \Rightarrow$ la f. int. $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ è assolut. $\mathcal{L}$-trasf. con ddca $\rho \leq \max[0, \rho_0^*]$ ed è per $Re[s] > \max[0, \rho_0^*]$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \left\{\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) H(\tau)\,d\tau\right)\right\} = \frac{1}{s}[\mathcal{L}(f)](s)$$

Seconda formula fondamentale

caso $n = 1$ — f è localmente e assolut. continua in $\mathbb{R}_0^+$: se la sua derivata è $\mathcal{L}$-trasf. con ddc $\rho_0^* \Rightarrow f$ è assolut. ~~ddca~~ $\mathcal{L}$-trasf. con ddca $\rho \leq \max[0, \rho_0^*]$ e per $Re[s] > \max[0, \rho_0^*]$ vale:

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$$

caso n qualsiasi — (f è loc e ass. continua) la $f^{(n-1)}$ è loc e ass. continua, la $f^{(n)}$ è $\mathcal{L}$-trasf. con ddc $= \rho_0^*$ allora f è ass-$\mathcal{L}$-trasf. con ddca $\leq \max[0, \rho_0^*]$ e per $Re[s] > \max[0, \rho_0^*]$ vale:

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](s) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

- **Teorema (abeliano) del VALORE FINALE** (di f): f loc e ass. continua, f' $\mathcal{L}$-trasf. con $\rho^* < 0 \Rightarrow \exists \lim_{t \to +\infty} f(t) < +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in A}} s\,[\mathcal{L}(f)](s)$$

(utile per calcolare la corrente a regime in un cir.)

- **Teorema (del VALORE INIZIALE):** (utile per calc. la corrente iniziale in un circuito)

f loc. e ass. continua, f' $\mathcal{L}$-trasf. con $\rho^* < 0 \Rightarrow \exists \lim_{t \to 0^+} f(t) < +\infty$

$$f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in A}} s\,[\mathcal{L}(f)](s)$$

Antitrasf. di LAPLACE : (formula di Riemann-Fourier)*

{Tr. di Koch : garantisce l'∃! della antitrasf. di $\mathcal{L}(f)=0$ } ,

$$\left.\begin{matrix} f(t) \text{ (punti ove continua)} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\left[\mathcal{L}(f)\right](s)\,ds$$

(trasf. analitica bilatera)

(integrale fatto su un cammino complesso - retta ⊥ asse $\mathbb{R}$)

Se è $f(t)=0$ per $t<0$, $\forall x > \rho$

$$\left.\begin{matrix} t<0 \longrightarrow = 0 \\ \text{punti di cont.} \longrightarrow f(t) \\ \text{" disc.} \rightarrow \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} \end{matrix}\right\rangle \Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\, v.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)\,ds$$

(trasf. analitica unilatera)

Teorema : se $\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ è conv. per $Re[s] > \rho^* \Rightarrow$ per q.o. $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha $\forall x > \max[0, \rho^*]$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\, v.p. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}\,\frac{F(s)}{s}\,ds$$

(trasf. unilatera, NON an.)

Corrispondenza biunivoca tra f ed $\mathcal{L}(f)$

Teorema se due funz. $\mathcal{L}$-trasf. hanno su uno stesso semipiano [striscia] la stessa trasf. unilatera [bilatera] ⇒ le 2 funz. sono uguali q.o. in $\mathbb{R}_0^+$ [in $\mathbb{R}$]

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie.

- formula dello sviluppo di Heaviside (zeri semplici)

$$f(t) = \sum_{1}^{n}{}_{h} \frac{P(\alpha_h)}{Q'(\alpha_h)}\, e^{\alpha_h t} \qquad (\alpha_1 \ldots \alpha_n \text{ zeri del denom.})$$

Equazioni dei telegrafisti :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = lc\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (rc+lg)\frac{\partial v}{\partial t} + rg\,v \qquad \text{(in tensione)}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = c\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (rc+lg)\frac{\partial i}{\partial t} + rg\,i \qquad \text{(in corrente)}$$

$(\mathcal{D}')^+$ è invece lo spazio delle distrib. con supp $\subset \mathbb{R}_0^+$

$\boxed{\mathcal{S}}$ spazio delle funzioni a decrescenza rapida.

SPAZIO DELLE DISTRIB. TEMPERATE

funz. $\in C^\infty$: $\forall m \geq 0 \ \forall k > 0 \ \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k \frac{d^m \varphi}{dx^m} = 0$

(funzioni che al di fuori di un compatto valgono quasi zero).

Prodotto : Prodotto della distrib T per la funzione α :

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Derivate delle distribuzioni

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

$$\langle T^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle T, \varphi^{(p)} \rangle$$

Teorema : T distrib, α funzione $\in C^\infty$

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$$

Teorema di completezza di $\mathcal{D}'$:

Il funzionale $F(\varphi)$ costituito come insieme dei valori $\lim_{n \to \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ è un funz. lin. e cont. su $\mathcal{D}$.

Teorema di densità :

Ogni elemento T di $\mathcal{D}'$ è limite in $\mathcal{D}'$ di una successione di elementi di $\mathcal{D}$ ($\Rightarrow$ ogni distrib. la posso approssimare con delle funzioni C^∞).

Prodotto di convoluzione :

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

Esiste sempre se : 1) T ed S hanno supporto compatto
2) T ed S hanno supp. nella stessa s.retta

Proprietà : commutativo e associativo.

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle$$

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \delta \text{ è } \boxed{\text{l'unità}} \text{ del prod. di convoluzione.}$$

Derivata del prodotto di convoluzione : $\langle (T*S)', \varphi \rangle$

$$\langle (T*S)', \varphi \rangle = -\langle T*S, \varphi' \rangle = (\text{scaricata sulla } \varphi) = \langle T*S', \varphi \rangle$$

quindi :

$$(f*g)' = (T_{f*g})' = (T_f * T_g)' = f' * g$$

Traslazioni

$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$; $\langle \delta_{(a)}, \varphi \rangle = \varphi(a)$ (traslata della

Si dice traslato (della quantità a) della distribuzione T la distrib. così definita:

$\langle T_{(a)} * \delta, \varphi \rangle = \langle \delta * T_{(a)}, \varphi \rangle = \langle \delta_x, \langle T(a)_y, \varphi(x+y)$

$= \ldots = \langle \delta_{(a)} * T, \varphi \rangle$ TRASLARE T O δ È LO STESSO.

$(T * S)_{(a)} = T_{(a)} * S + T * S_{(a)}$

Regolarizzazioni:

Teorema:

Se $\alpha \in C^\infty$, $T \in \mathcal{D}'$ $\Rightarrow$ $T * \alpha$ quando esiste è una distribuzione associata ad una funz. $\gamma(x) \in C^\infty$ e vale:

$$\gamma(x) = (T * \alpha)(x) = \langle T_y, \alpha(x-y) \rangle$$

La funzione $T * \alpha$ si dice regolarizzata di T tramite α e α si dice regolarizzante di T e l'op. di convoluzione si dice regolarizzazione di T tramite α.

$\boxed{\text{L-trasformate ed F-trasformate di distribuzioni}}$

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad f(t) \in L(\mathbb{R})$$

$$\langle T_{\mathcal{F}(f)}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

- T distrib. temperata: definisco la sua $\mathcal{F}$-trasf.

$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ che è temperata anch'essa.

Se T è a supp. compatto: $\mathcal{F}(T)$ risulta associata ad una funzione C^∞ che è la restriz. ai $\mathbb{R}$ di una f olomorfa e vale

$$\mathcal{F}(T) = V(\omega) = \langle T, e^{-i\omega t} \rangle$$