06 10 99 SCHEDA 1

DIMOSTRAZIONE DELLE RELAZIONI DIFFERENZIALI

Con le relazioni differenziali si mettono in evidenza i legami esistenti tra le sollecitazioni di Taglio, momento, sforzo normale.

É un concetto basilare che a richiesta deve venire esposto senza alcuna esitazione.

La dimostrazione avviene considerando un concio (pezzo) di trave sollecitata da un carico generico P.

Sará possibile sviluppare tutti i ragionamenti che seguono sulla supposizione di base che il concio abbia lunghezza infinitesima che indicheremo con ds.

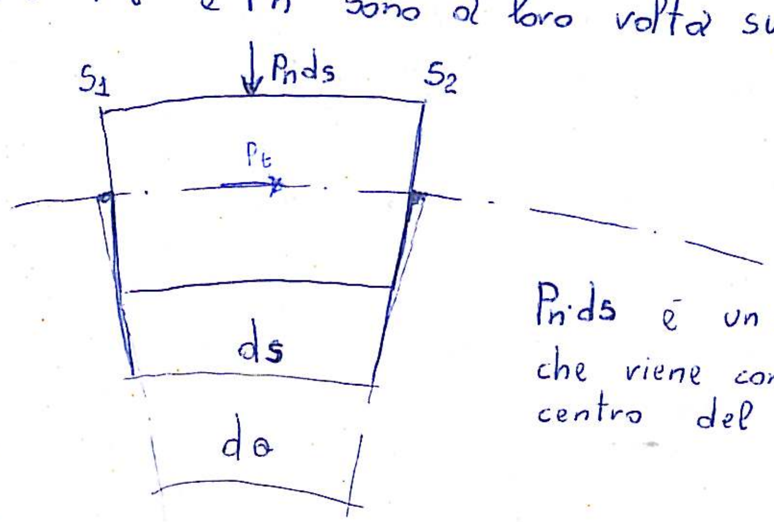
Un generico carico agente su un tratto ds puó comunque essere considerato un carico generico. concentrato

Disegnato il concio inflesso indichiamo su di esso le componenti Normali e tangenziali del carico generico supposto concentrato.

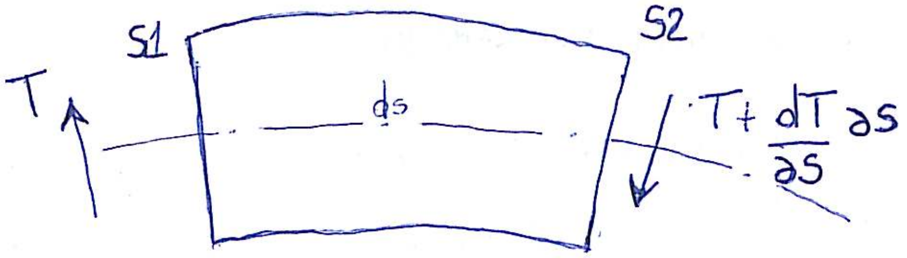
P_t = componente lungo ds delle forze esterne

P_n = componente lungo la normale all'asse del concio delle f. esterne.

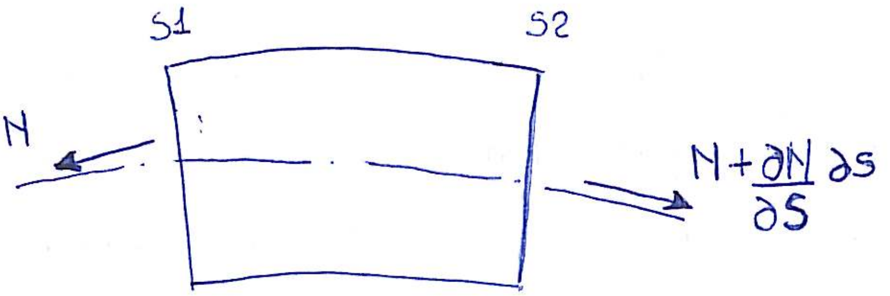
Le componenti P_t e P_n sono a loro volta supposte concentrate.



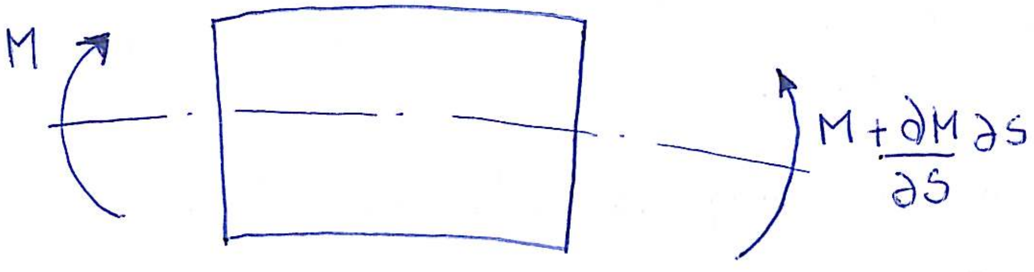
$P_n ds$ é un carico distribuito che viene concentrato nel centro del concio



1) sul lato sinistro del concio indico il taglio T e lo riporto maggiorato dell'addendo differenziale sulla superficie S2 di destra.



2) Riporto lo sforzo normale a sinistra e successivamente sulla superficie S2 di destra maggiorandolo dell'addendo differenziale.



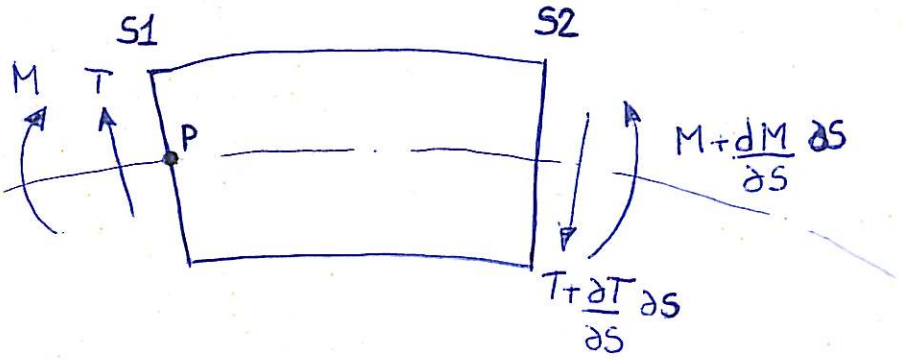
3) Riporto il momento a sinistra del concio e maggiorato dell'addendo differenziale sulla superficie S2 di destra.

Durante questi procedimenti ricordiamo le convenzioni $N>0$ quando il concio è soggetto a trazione, $M>0$ in senso orario, $T>0$ se associato ad un momento generante orario.

Per ricavare le relazioni differenziali che legano M, N, T a partire dalle supposizioni fatte dobbiamo imporre l'equilibrio al concio.
Il concio sarà in equilibrio se 1) NON RUOTA e se 2) NON TRASLA.

1) Il concio non ruota se la sommatoria dei momenti applicati è nulla $\sum_i M_i = 0$

Per scrivere la sommatoria dei momenti bisogna che essi vengano espressi con i loro segni ed in funzione della superficie a cui si riferiscono, inoltre dovranno comparire anche le componenti dovute al prodotto dei tagli presenti per i bracci costituiti dalla lunghezza ds del concio.
Ridisegnamo il concio con evidenziati i momenti e i tagli.



$$\sum M_i = 0$$

$$\underbrace{M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial S}\partial S\right)}_{\text{MOMENTI VERI E PROPRI}} + \underbrace{\partial S\left(T + \frac{\partial T}{\partial S}\partial S\right)}_{\text{MOMENTI DOVUTI AI TAGLI}} = 0$$

MOMENTI VERI E PROPRI

MOMENTI DOVUTI AI TAGLI CON BRACCI COSTITUITI DALLA LUNGHEZZA ∂S DEL CONCIO (EQUIVERSI ORARI QUINDI ENTRAMBI POSITIVI)

NOTA: il punto P è il polo su cui calcolare i momenti dovuti ai tagli. Il taglio applicato al polo da momento nullo pertanto sparisce dall'equazione.

Da questa relazione cerchiamo di mettere in evidenza il Taglio

$$\Sigma M_i = 0 \qquad M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial s}\partial s\right) + \partial s \left(T + \frac{\partial T}{\partial s}\partial s\right) = 0$$

I tagli sono equiversi orari e quindi entrambi positivi. ma la componente sul polo P si annulla perché è nullo il braccio.

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial s}\partial s\right) + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s}\partial s\right)\partial s = 0$$

$$\cancel{M} - \cancel{M} - \frac{\partial M}{\partial s}\partial s + T\partial s + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial s}\partial s\,\partial s}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}} = 0$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e semplificando si ottiene

$$-\frac{\partial M}{\partial s}\partial s + T\partial s = 0$$

porto a destra il membro che esprime il momento dovuto al taglio

$$-\frac{\partial M}{\partial s}\partial s = -T\partial s$$

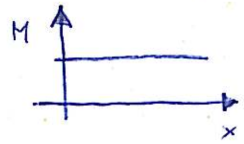
Integrando ambo i membri sulla lunghezza ∂s del concio e sistemando i segni si ottiene

$$\boxed{T = \frac{\partial M}{\partial s}}$$

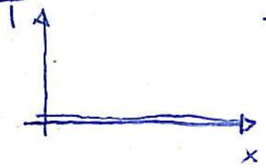
La relazione differenziale trovata esprime che il taglio è la derivata del momento rispetto alla funzione di distribuzione del carico sulla lunghezza dell'eventuale trave.

IL TAGLIO È LA DERIVATA DEL MOMENTO

NE CONSEGUE CHE: 1) Se il momento è costante il taglio è nullo.

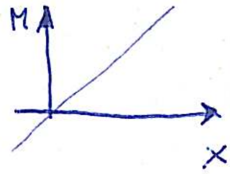
1) 

$M = f(x) = cost \Rightarrow$

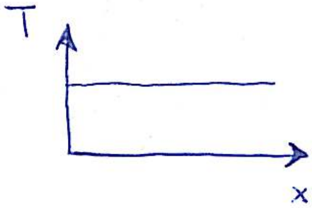


$T = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$

2) Se il momento è lineare il taglio è costante

2) 

$M = f(x) \Rightarrow$



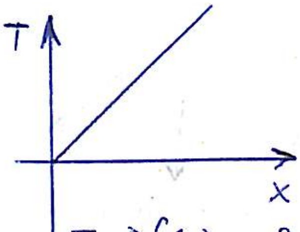
$T = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = cost$

3) Se il momento è parabolico il taglio è lineare

3) 

$M = f(x^2)$

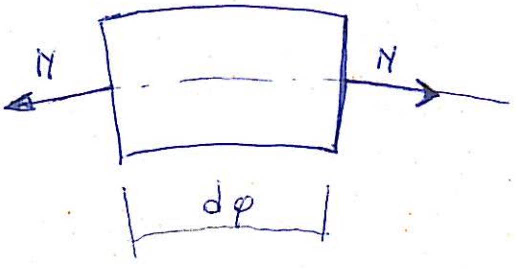
$\Rightarrow$



$T = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = lineare$

Proseguiamo lo studio delle relazioni differenziali imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale:

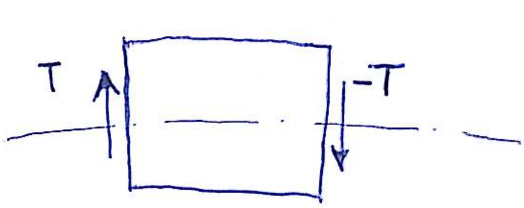
Ridisegnando il concio si nota che a causa dell'inflessione le direzioni degli sforzi normali non sono coincidenti



NOTA: vista la piccolezza del concio l'angolo $d\varphi$ può essere approssimato all'arco.

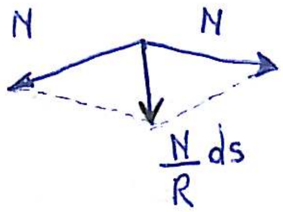
Se applichiamo i due vettori N ad un medesimo punto la diversità delle direzioni viene ulteriormente evidenziata.

É evidente che i due vettori N hanno risultante, se sommati, non nulla.
hanno invece risultante nulla i due vettori T e -T a causa delle piccole dimensioni di ds



$$T \uparrow + \downarrow^{-T} = 0$$

Quindi l'unica componente normale a ds in grado di far comparire una traslazione verticale ha origine dagli N.
Evidenziamo con una somma vettoriale la componente verticale.



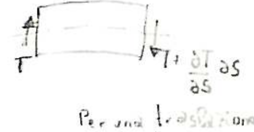
Essa vale $\frac{N ds}{R}$

dove R é il raggio di curvatura.

Imponiamo matematicamente l'equilibrio alle traslazioni verticali con l'equazione

$$\underbrace{P_n ds}_{\text{CARICO CONCENTRATO}} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial s} \partial s}_{\text{CARICO AGGIUNTO DOVUTO COMPONENTE RESIDUA DEL TAGLIO}} + \underbrace{\frac{N ds}{R}}_{\text{CARICO AGGIUNTO DOVUTO ALLE COMPONENTI NORMALI}} = 0$$

in effetti rispetto alla lunghezza del concio vale:



Per una traslazione verso il basso

$\cancel{T} + \frac{\partial T}{\partial s}\partial s - \cancel{T}$

Rimane $\frac{\partial T}{\partial s}\partial s$

CONSIDERAZIONE OVVIA É che COMPARENDO R A DENOMINATORE SULL'ULTIMO TERMINE, IL SUO CONTRIBUTO SI ANNULLA SE LA TRAVE É RETTILINEA, DIFATTI R SU UNA TRAVE NON INFLESSA VALE ∞.

Se allora consideriamo rettilinea la trave l'equazione si riduce a:

$$P_n\, ds + \frac{\partial T}{\partial s}\, \partial s = 0$$

da cui integrando ambo i membri dopo aver evidenziato $P_n ds$

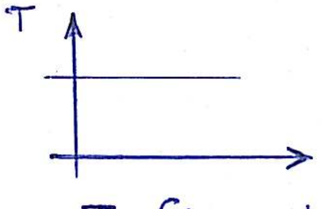
$$P_n\, \cancel{ds} = -\frac{\partial T}{\partial s}\, \cancel{\partial s}$$

si ha che: <u>LA DERIVATA DEL TAGLIO FORNISCE IL CARICO CAMBIATO DI SEGNO</u>

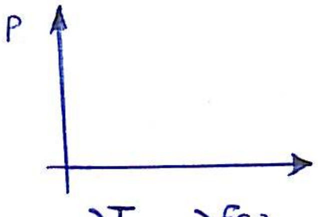
cioé

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial s} = -P}$$

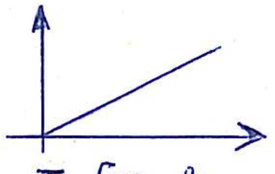
Mettiamo in evidenza questa relazione con l'ausilio di alcuni grafici.



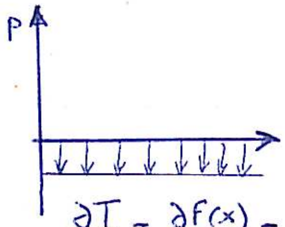
$\Rightarrow$



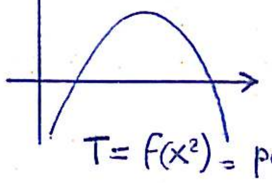
$T = f(x) = cost$ $\qquad$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$



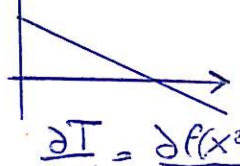
$\Rightarrow$



$T = f(x) = lineare$ $\qquad$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = cost$ negativo

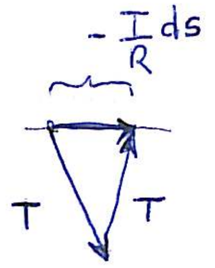


$\Rightarrow$



$T = f(x^2) = parabolico$ $\qquad$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = -\, lineare$

Facendo un analogo ragionamento sull'azione dei tagli nel concio si ottiene:



$$P_t ds + \frac{\partial N}{\partial S} ds - \frac{T}{R} ds = 0$$

da cui

$$\frac{\partial N}{\partial S} = -\left(P_t - \frac{T}{R}\right)$$

che per travi rettilinee da:

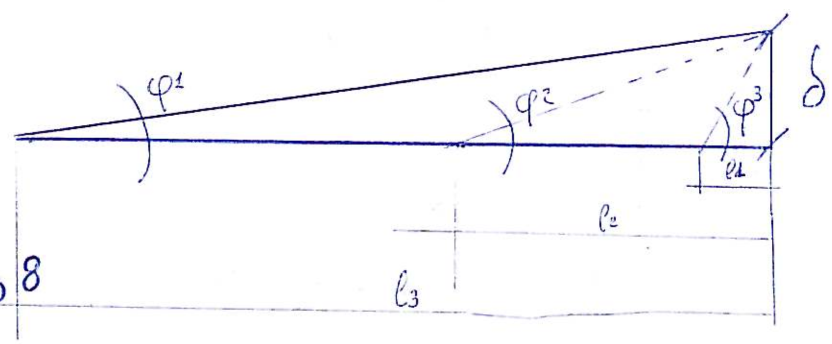
$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial S} = -P_t}$$

Quest'ultima relazione differenziale è meno usata.
Riassumendo: CARICHI TANGENTI DANNO SFORZI NORMALI, CARICHI NORMALI DANNO TAGLI

$$P_n \xrightarrow{\int} T \xrightarrow{\int} M$$

NOTA IMPORTANTE

Per le rotazioni vale:



A PARITÀ DI SPOSTAMENTO δ si vede che maggiore è la lunghezza della trave, minore è la rotazione della stessa.

si ha cioè che:

$$\boxed{\varphi = \frac{\delta}{l}}$$

LA ROTAZIONE EQUIVALE allo spostamento diviso la lunghezza

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

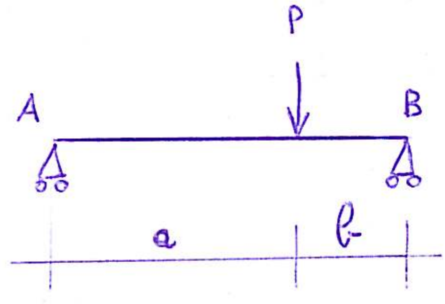
* Per ogni spostamento virtuale di un sistema in equilibrio il lavoro delle forze esterne é nullo"! * $\boxed{Le=0}$

nota: Per spostamento virtuale si intende infinitesimo e possibile compatibilmente con i vincoli.

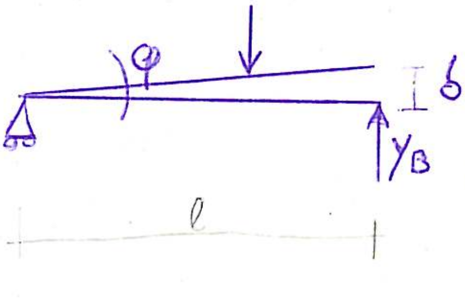
<u>Vale per strutture isostatiche.</u>

Data una struttura isostatica con il principio dei lavori virtuali è possibile ottenere il valore di uno dei parametri delle sollecitazioni relativamente ad uno specifico punto delle coordinate senza dover tracciare il grafico completo.

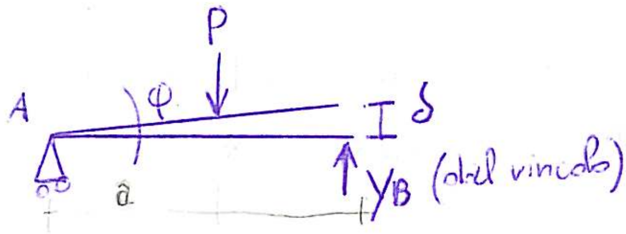
ad esempio: la struttura isostatica sottoriportata può essere risolta con le equazioni cardinali della statica. Risolviamola ora con il principio dei lavori virtuali



Ragionamento: Se virtualmente elimino un vincolo sostituendolo con una forza quantitativamente e di direzione coincidente a quella da essa esercitata si ha che la struttura virtualmente si deforma sotto l'azione di questa forza fittizia.



$$\delta = \frac{\varphi}{\ell}$$



* É possibile calcolare il lavoro che viene virtualmente compiuto da Y_B ed anche da P.
Indichiamo i lavori Le con

$$\boxed{Le = 0}$$

Da cui si ricava

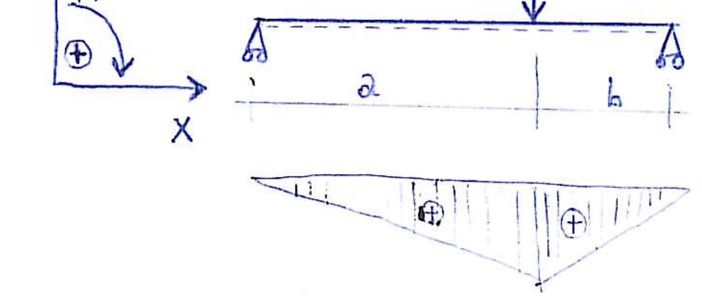
$$Le=0 \Rightarrow P \cdot a \cdot \varphi - Y_B \cdot \varphi \cdot l = 0$$

Volendo esprimerla in funzione dello spostamento δ si ha

$$\boxed{P \cdot a \cdot \left(\frac{\delta}{l}\right) - Y_B \cdot \left(\frac{\delta}{l}\right) \cdot l = 0}$$

da cui si ricava $Y_B = \dfrac{P \cdot a}{l}$

Il medesimo risultato poteva essere ricavato a partire dalle equazioni cardinali della statica, (fissando il sistema di riferimento riportato in figura).



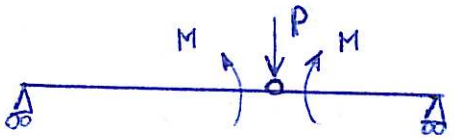
$$\begin{cases} \Sigma_a = 0 & R_{By} \cdot l - P \cdot a = 0 \\ \Sigma_b = 0 & R_{Ay} \cdot l - P \cdot b = 0 \end{cases}$$

da cui

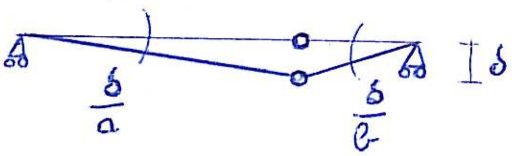
$R_{By} = \dfrac{P \cdot a}{l}$

$R_{Ay} = \dfrac{P \cdot b}{l}$

Una importante osservazione è che il sistema <u>deve</u> essere isostatico per applicare il principio dei lavori virtuali, altrimenti non ci sarebbe il moto rigido che fa comparire il parametro δ.
Vediamo come il Principio dei lavori virtuali può restituire il valore dei parametri in una sezione generica della trave (ad esempio quella in cui sta agendo P).
Si procede generando un moto rigido sfruttando la sollecitazione che ci interessa di volta in volta.



- Cominciamo cercando M in corrispondenza della coordinata su cui agisce P
- Aggiungiamo una cerniera che sganci i due momenti.



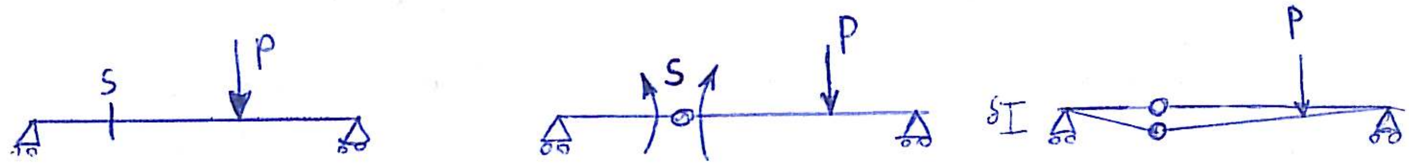
Si può quindi scrivere l'equazione di congruenza sfruttando il parametro di spostamento δ e le rotazioni $\frac{\delta}{a}$ e $\frac{\delta}{b}$

Da $L_e = 0$ si ha $P \cdot \delta - m \cdot \left(\frac{\delta}{a}\right) - m \cdot \left(\frac{\delta}{b}\right) = 0$

che porta al risultato $m = \dfrac{P \cdot a \cdot b}{l}$

cioè il moto si oppone al momento soprassegnato.
In conclusione: bisogna "aprire" il moto rigido nel punto in cui interessa trovare il parametro di sollecitazione.
Nell'esempio sovrastante cercavamo M proprio sotto a P, non è comunque molto diverso se volessimo cercarlo in un punto diverso dalla coordinata di P.

vediamo come procedere in una generica sezione S della struttura senza spostare il carico P.



Per la ricerca dei parametri del taglio si deve utilizzare sempre un moto rigido che sia però sensato per T.
Invece di inserire una cerniera inseriamo due carrelli contrapposti

si crea una discontinuità uguale ed opposta (obbligatoriamente così posso non considerare i momenti).

Quindi:

$$L_e = 0 \qquad P\cdot\left(\frac{\delta}{b}\right) + T\cdot\left(\frac{\delta}{a}\right) - T\cdot\left(\frac{\delta}{b}\right) = 0$$

Da cui $$\boxed{T = P\cdot\left(\frac{a}{b-a}\right)}$$

TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI

Si tratta di uno strumento di indagine matematica molto potente.
È diverso dal principio dei L.V. perchè in questo caso entrano in gioco le deformate delle strutture.
Si supponga di avere una struttura staticamente determinata, della quale si conoscono gli sforzi delle aste e le loro deformazioni avute origine da un qualsiasi fenomeno. (es. deformazione per allungamento termico).
Si vuole sapere, dato un regime di deformazioni congruenti (cosa che avviene sempre per strutture isostatiche), lo spostamento di un punto in una certa direzione.
Se delle aste si sono allungate la struttura e i vincoli si adatteranno permettendo lo spostamento di alcuni punti

SI VUOLE SAPERE, CON QUESTE PREMESSE, DI QUANTO SI SPOSTA UN PUNTO DELLA STRUTTURA.

Il teorema dei lavori virtuali risolve questo problema.

Procedimento

1) Diamo alla struttura una deformazione congruente con lo spostamento (ad esempio quello da calcolare)
2) Ci disinteressiamo delle forze esterne che hanno causato la deformazione
3) Prendiamo un sistema di forze equilibrato all'interno in modo che compia lavoro sullo spostamento desiderato

Quindi riassumendo, si prende la struttura, si eliminano le forze esterne, si mette una forza fittizia che agisca nella direzione dello spostamento desiderato, si calcolano gli sforzi S_i delle aste con uno dei metodi già noti. Le forze esterne devono fare un lavoro con la deformazione equilibrato dal lavoro delle forze interne.

$L_e = L_i$ cioè $F \cdot \delta = \Sigma_i S_i \cdot s_i$

Dalla $\sum_i S_i \cdot s_i$

SFORZI interni — SPOSTAMENTI

si ottiene:

$$\boxed{\delta = \frac{\sum_i S_i \cdot s_i}{F}}$$

Con il teorema dei ~~lavori~~ lavori virtuali metto in relazione i seguenti 3 parametri.

1) Da un sistema di forze applicato si devono individuare le sollecitazioni interne, il sistema deve essere equilibrato;

$$\text{forze} \xleftrightarrow{eq} \text{sollecitazioni}$$

2) A delle deformazioni assegnate, per esempio gli allungamenti delle aste, devono essere corrisposti degli spostamenti mediante una relazione di congruenza (relazione più complicata in iperstatiche, poiché nelle isostatiche i vincoli possono "aggiustarsi");

$$\text{Spostamenti} \xleftrightarrow{\text{congruenza}} \text{deformazioni}$$

3) Il lavoro delle forze esterne è pari al lavoro delle forze interne;

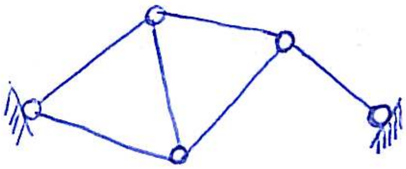
$$L_e = L_i$$

I punti 1 e 2 sono le ipotesi del teorema.
Il punto 3 è la tesi del problema che si risolve con il teorema dei lavori virtuali. È la tesi del teorema.

si possono definire i due inversi del teorema aventi per ipotesi 1) e 3) con tesi 2) oppure 2) e 3) con ipotesi 1).

FORMULAZIONE GENERALE DEL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI

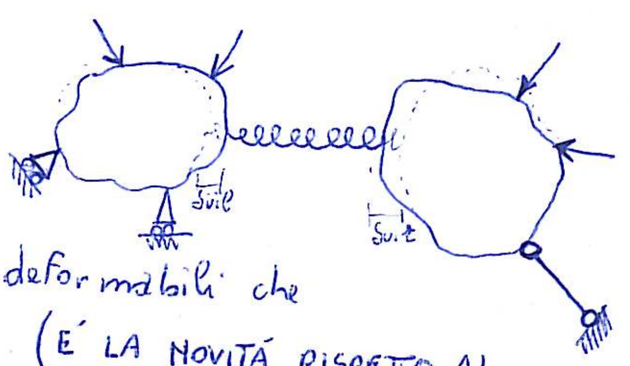
Consideriamo un sistema "triangolato"



Per questo sistema staticamente determinato si parta dal presupposto di conoscere l'alungamento delle aste $\Delta l_1, \Delta l_2 \dots$ (o partendo dagli sforzi, conoscendone la costante di molla di ogni asta oppure studiando la codizione termica): cioè si possieda la deformazione.

Si desidera lo spostamento di un punto in una direzione assegnata, quindi si potrà applicare il teorema (se poi si desidera lo spostamento effettivo basta lavorare in un'altra direzione e combinare con le perpendicolari i risultati, come già precedentemente visto).

Soffermiamoci sul singolo elemento (asta più due cerniere) considerandolo come una molla dilatata che unisce due corpi:



si mettono in evidenza gli elementi deformabili che uniscono i corpi indeformabili "rigidi" (É LA NOVITÁ RISPETTO AL PRINCIPIO DEI L.V.).

Si supponga ora di vincolare i corpi con un numero di vincoli ad arbitrio, anche sovrabbondante e di assegnare un sistema di forze che genererà un proprio regime di spostamenti, ma questo non interessa. Ciò che interessa è la sollecitazione S sulla molla (positiva se di trazione). Concependo un "nuovo" spostamento virtuale infinitesimo e possibile del sistema, rispettando i vincoli nei punti vincolari, si svilupperà una roto traslazione a sinistra e a destra della molla che, in estensione, cioè a deformazioni avvenute, si allungherà di quantità δ_{uil}, δ_{uir} in genere considerate complessivamente con δ_s

Lo spostamento virtuale sarà sentito da tutte le forze (equilibrate) in gioco: F_j esterne attive, R_k reazioni vincolari, S_i azione delle molle sui corpi. Indicatele genericamente con F, applicando il principio dei lavori virtuali si ottiene

$$\Sigma_i F_i \cdot \delta_i = 0$$

con δ spostamento dei relativi punti di applicazione.

<u>Ora esplicitando i vari termini, il principio diventa teorema</u>

infatti se è:

$$\Sigma_j F_j \cdot \delta_j + \Sigma_k R_k \cdot \ell_k + \Sigma_i S_i \cdot s_i = 0$$

si potrà scrivere

$$\Sigma_j F_j \cdot \delta_j + \Sigma_k R_k \cdot \ell_k = -\Sigma_i S_i \cdot s_i$$

cioè: $$L_e = L_i$$

visto che $-S$ rappresenta la sollecitazione interna delle molle (in aiuto si può richiamare la convenzione del metodo degli equilibri nodali delle reticolari).

Deve essere chiaro che le deformazioni non sono legate alle forze applicate: le forze sono legate all'equilibrio, gli spostamenti alla congruenza; sono due gruppi indipendenti.

In presenza di forze la struttura si deforma, si creano delle deformazioni e i suoi punti si spostano.

Si considera una direzione generica e si applica il teorema dei lavori virtuali.

con spostamenti virtuali in questo caso si hanno deformazioni congruenti. Il sistema di forze dovrà essere tale da fare del lavoro nella direzione voluta, cioè nello spostamento voluto; poiché si avranno delle sollecitazioni si potrà scrivere

$$L_e = L_i \quad \Rightarrow \quad F' \cdot \delta = \Sigma_i S_i' \cdot \delta l_i$$

da cui si ricava $\delta = \dfrac{\Sigma_i S_i' \cdot \delta l_i}{F'}$

Per una struttura reticolare iperstatica la deformazione dovrà soddisfare i requisiti di congruenza non più scontati come per il caso precedente o in genere per un'isostatica

Vedi esempio pag 27 Giallo

Possiamo anche enunciare il Teorema dei lavori Virtuali dicendo che: PER UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE DEI PUNTI DI UN SISTEMA IN EQUILIBRIO, IL LAVORO VIRTUALE INTERNO È UGUALE AL LAVORO VIRTUALE ESTERNO

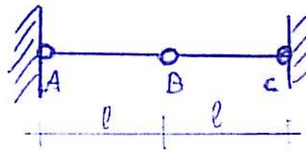
STRUTTURE LABILI E IPERSTATICHE

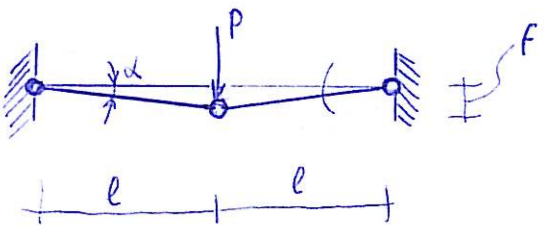
La LABILITÁ dal punto di vista statico è l'insufficienza dei vincoli a garantire l'equilibrio (statico) del sistema sotto l'azione di forze generiche.

GRADO DI LABILITÁ è il numero minimo di C.E.V. (condizioni elementari di vincolo) che è neccessario aggiungere al sistema per eliminare ~~tale~~ l'insufficienza per raggiungere la fissità.

Dal punto di vista geometrico la labilità corrisponde alla possibilità di moti rigidi delle parti del sistema, e il grado di labilità al numero dei corrispondenti gradi di libertà.

La LABILITA in relazione ai problemi normali deve collegarsi all'esame della possibilità di spostamenti infinitesimi.





Dal punto di vista grafico sembrerebbe che le due aste si siano allungate di una quantità pari $l\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$, ma tale quantità è infinitesima di ordine superiore, rispetto "$l\,tg\alpha$", quindi si può definire il "moto rigido".

Essendoci un moto rigido sotto l'azione della forza, allora la struttura è labile.

Per eliminare la labilità potrebbe essere sufficiente posizionare un carrello sotto la cerniera:

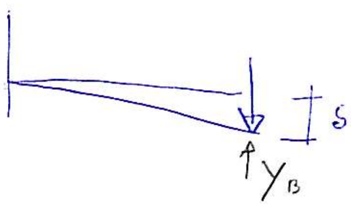
siccome il carrello introduce una condizione elementare di vincolo, la struttura originale avrà un grado di labilità.

PROBLEMI SPECIALI E NORMALI

Un problema è normale se la condizione di equilibrio può essere scritta confondendo la condizione deformata con quella iniziale. I parametri delle sollecitazioni hanno sistemi di riferimento riferiti alla configurazione iniziale percui in questi casi si possono SOVRAPPORRE GLI EFFETTI.
Per definire la fissità o la labilità di un problema normale dobbiamo avvidre dei movimenti rigidi infinitesimi rispetto alle dimensioni caratteristiche della trave.

Un problema NORMALE è STATICAMENTE DETERMINATO se le condizioni di equilibrio sono neccessarie e sufficienti a determinare le reazioni vincolari, e le reazioni vincolari e le forze interne sono indipendenti dallo stato di deformazione.
Se invece le condizioni di equilibrio non sono sufficienti alla determinazione delle reazioni vincolari il problema si dice STATICAMENTE INDETERMINATO.

Un problema normale e statisticamente determinato è ISOSTATICO, ovvero il cedimento di uno quavalsiasi dei vincoli comporta l'avvio di un moto rigido.
In strutture di questo tipo abbiamo visto essere applicabile il Principio dei lavori virtuali in quanto è possibile l'avvio di un moto rigido in corrispondenza del vincolo eliminato, il quale consente la comparsa di una deformazione o meglio scostamento δ_i (spesso avente significato di freccia) che consente il calcolo di un lavoro virtuale eseguito da una forza esterna.



$P \cdot \delta = L_e$

P.D.L.V. $\Rightarrow$ $L_e = 0$

$P \cdot \delta - Y_B \cdot \delta = 0$

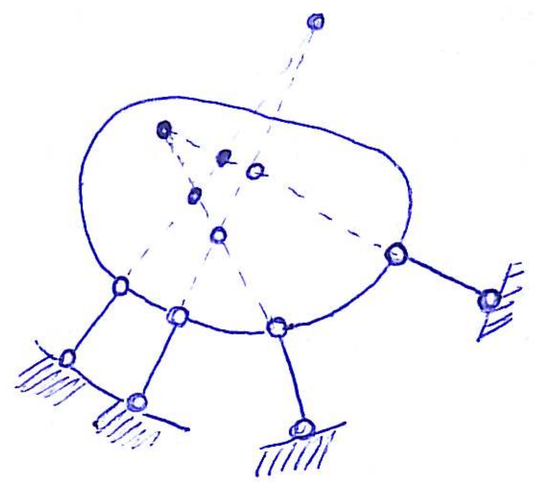
si ricava la reazione Y_B

IPERSTATICITA

Si definiscono **IPERSTATICHE** le condizioni di indeterminazione del problema, ovvero il numero di condizioni elementari di vincolo che è necessario sopprimere per togliere ogni indeterminazione al problema. (il n° è il grado di iperstaticità)

Dal punto di vista geometrico una struttura iperstatica presenta condizioni di vincolo che non contribuiscono ad impedire alcun moto rigido e il numero di tali condizioni elementari corrisponde al suddetto grado di iperstaticità; Inoltre sistemi di deformazioni dei loro elementi e di cedimenti di vincoli non permettono il rispetto delle condizioni di vincolo se non soddisfano particolari condizioni di congruenza, in numero pari a quello dei vincoli sovrabbondanti.

Esempio 1

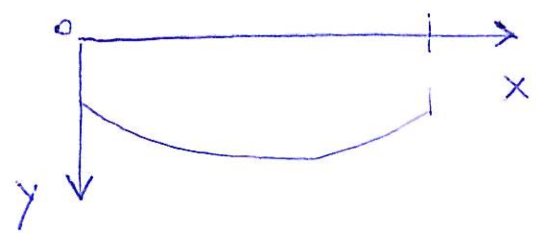


- La struttura ha grado di iperstaticità 1.
- Può essere considerato sovrabbondante uno qualsiasi dei quattro appoggi pendolari

TEOREMA DI MOHR E ANALOGIE DI MOHR

Tramite un procedimento analitico di doppia integrazione è possibile collegare la curvatura di una trave (detta anche elemento deformabile semplice) con l'abbassamento massimo di un suo punto interno (detto freccia).

Di norma le inflessioni subite da un trave carica sono molto piccole così che l'accorciamento della trave stessa diviene trascurabile. L'inclinazione piccola fa sì che la lunghezza della trave scarica sia confondibile con quella della trave carica.



Questo consentirà di trascurare il denominatore della derivata seconda, rendendo la funzione parabolica e non più circolare.

Orientato un asse x nella direzione della lunghezza della trave e uno y nella direzione perpendicolare possiamo esprimere l'espressione della linea di inflessione con

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$ con φ avente significato di "inclinazione"

Derivando ulteriormente si ottiene:

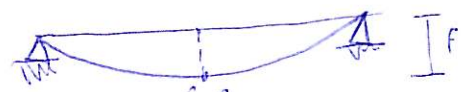
$$\theta = -\frac{d^2y}{dx^2}$$ con segno negativo e con significato di

CURVATURA

Se procediamo a ritroso, partendo cioè dalla curvatura per ottenere l'abbassamento si dovrà integrare

$$\theta \xrightarrow{\int} \varphi \xrightarrow{\int} y$$

Il punto in cui la curvatura si annulla è sede del massimo abbassamento della trave "freccia"



$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Questo è analogo a quanto si era visto per i normali parametri delle sollecitazioni

Come

$$-p \xrightarrow{\int} T \xrightarrow{\int} M$$

su una trave ausiliaria avente in comune con l'assegnata solo l'intervallo di integrazione.

si ha

$$-\Theta \xrightarrow{\int} \varphi \longrightarrow f$$

y cioè abbassamento

<u>Il teorema di MOHR</u> dice che: alla doppia integrazione può essere sostituita la costruzione di una curva funicolare su una trave ausiliaria con i vincoli riadattati.

Condizioni di vincolo iperstatiche possono essere soppresse con libertà di scelta, se conservate esse introducono nella trave ausiliaria condizioni di labilità, in corrispondenza alle quali si trasformano in condizioni di equilibrio per le forze applicate le presupposte condizioni di congruenza della deformata della trave assegnata.

<u>ATTENZIONE</u> supponiamo di avere una trave assegnata su cui gli abbassamenti in due punti siano pari a zero, cioè y_A e y_B valgono 0. Per le analogie le frecce corrispondono ai momenti nella trave ausiliaria, quindi a freccia nulla corrisponde momento nullo.

la suddetta trave ausiliaria avrà due punti, in cui i momenti si annullano, ovvero due CERNIERE.
Al rispetto delle condizioni di vincolo della trave assegnata da parte delle componenti degli spostamenti φ, y, si devono far corrispondere per la trave ausiliaria condizioni per i parametri T^*, M^* che nei casi più comuni si possono attribuire a condizioni di vincolo facilmente determinabili.

TRAVE AUSILIARIA

È una trave ad asse rettilineo coincidente con quello della trave effettiva (dominio di integrazione), con condizioni di vincolo tali che il problema dell'equilibrio risulti staticamente determinato e sono rispecchiate le analogie con le condizioni della trave reale. Ecco alcuni esempi di come variano i vincoli per la trave ausiliaria:

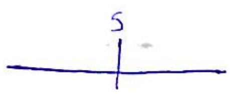
ASSEGNATA — AUSILIARIA

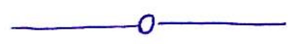
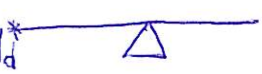
1)  $\varphi \neq 0$, $f = 0$ $\Rightarrow$ $T^* \neq 0$, $M^* = 0$ 

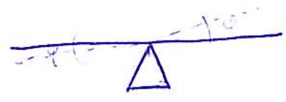
l'appoggio diventa una cerniera, infatti per le analogie ad una inclinazione nell'assegnata corrisponde un Taglio nell'ausiliare, quindi $\varphi \neq 0 \Rightarrow T^* \neq 0$ come si verifica nell'esempio disegnato sopra.
Attenzione che le C.E.V. devono essere esaminate assieme, infatti: la sola condizione $T^* \neq 0$ non si verifica solo nella cerniera.
Altri esempi:

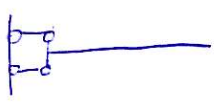
2)  $\varphi = 0$, $f = 0$ $\Rightarrow$ $T^* = 0$, $M^* = 0$ le due condizioni si verificano solo su una trave libera (senza C.E.V.)

3)  $\varphi \neq 0$, $f \neq 0$ $\Rightarrow$ $T^* \neq 0$, $M^* \neq 0$ 

4)  in una sezione generica — $\varphi_L = \varphi_R$, $f_L = f_R$ $\Rightarrow$ $T^*_L = T^*_R$, $M^*_L = M^*_R$ 

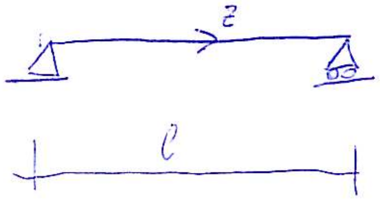
5)  $\varphi_s \neq \varphi_d$, $f_s = f_d$ $\longrightarrow$ $T_s^* \neq T_d^*$, $M_s^* = M_d^*$ 

6)  $\varphi_S = \varphi_D$, $f = 0$ $\longrightarrow$ $T_S^* = T_D^*$, $M^* = 0$ 

7)  $\varphi = 0$, $f \neq 0$ $\longrightarrow$ $T^* = 0$, $M^* \neq 0$  la trave ausiliaria è uguale a quella assegnata.

Altro enunciato del teorema di MOHR

La linea deformata di una trave rettilinea coincide a meno di una funzione lineare con la funicolare della funzione curvatura $\Theta(z)$ assunta come carico fittizio normale all'asse della trave $p_n^*(z)$. Vale l'uguaglianza $p_n^*(z) = \Theta(z)$



IMPORTANTI ESEMPI di applicazione del Teorema e corollari di MOHR

1) INCASTRO CON CARICO CONCENTRATO

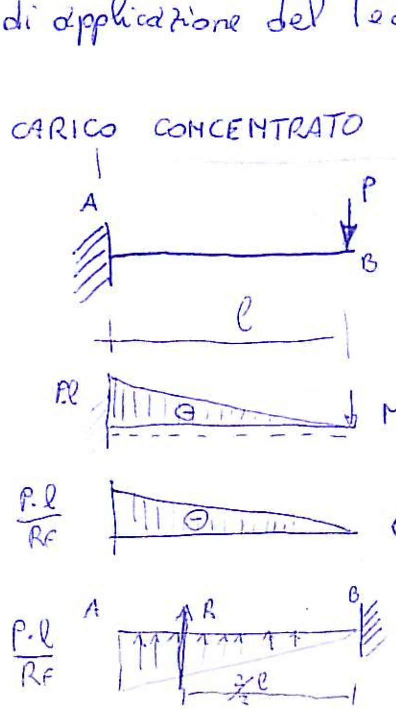
Sia assegnato R_F

Per i corollari del teorema di Mohr

$T^*(z) = \varphi(z)$ rotazione

$M^*(z) = f(z)$ abbassamento

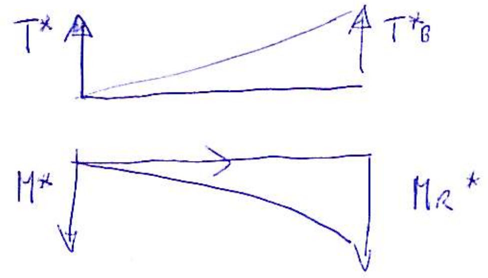
$T_B^* = \varphi_B = \frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{R_F}\right)l = \frac{Pl^2}{2R_F}$



M(z) momento

Θ(z) curvatura

sulla trave ausiliaria il vincolo è sull'altro estremo



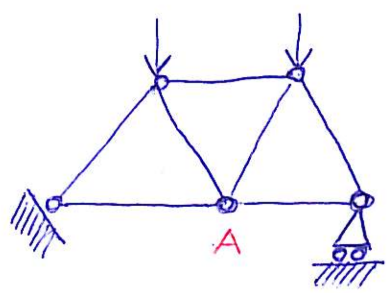
$$M_B^* = f_B = \left(\frac{P\ell}{Rf}\cdot\frac{\ell}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{P\ell^3}{3Rf}$$

TRAVATURE RETICOLARI IPERSTATICHE T.D.L.V.

La caratteristica principale delle strutture reticolari è che le aste sono soggette solo a sforzo assiale.
Ci sono queste due possibilità:

IPERSTATICITÀ
- INTERNA: collegamenti sovrabbondanti tra le aste
- ESTERNA: vincoli esterni in eccesso

Scegliamo di risolvere problemi aventi al più 1 G.D.I o riconducibili a tale situazione:
si può procedere con metodi grafici oppure applicando il teorema dei lavori virtuali.
Ci proporremo ora di determinare lo spostamento assoluto del nodo A.



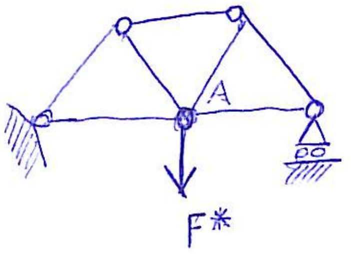
Quando le forze non presentano particolari simmetrie non si può conoscere a priori la direzione dello spostamento cercato.
Si cercherà tale spostamento con composizione di due componenti aventi direzioni assegnate (quella delle aste).

Sulla struttura vale il T.D.L.V. che esprime l'uguaglianza

$$L_e = L_i$$

per spostamenti virtuali e deformazioni avvenute per congruenza con il tipo di vincoli.

si noti che il TDLV è uno strumento matematico e non fisico, infatti mette in relazione forze, spostamenti, sollecitazioni e deformazioni.



APPLICO AD "A" una forza fittizia F^*.
Essendo la struttura <u>isostatica</u> a tale forza associa una sollecitazione S^*

Scelgo come δ lo spostamento effettivo dovuto alle forze esterne

si può relazionare quindi:

$$\mathcal{L}_A \longleftrightarrow \Delta s_i = \frac{N_i\, s_i}{R_i}$$

SPOSTAMENTO IN VERTICALE DI A
(Delle volte è δ)

dove: N_i = sforzi normali
R_i = rigidezze assiali delle aste

Posso scrivere il T.D.L.V.

$$\boxed{F^* \mathcal{L}_A = \sum S_i^* \Delta s_i}$$

* Per eliminare l'incognita F^* tengo presente il fatto che tutte le S_i^* sono proporzionali alla forza fittizia

$$S_i^* = \alpha_i F^*$$

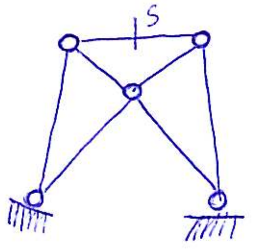
Possiamo quindi scrivere:

$$F^* \mathcal{L}_{A\,\text{verticale}} = \sum_{\text{aste}} S_i^* \Delta s_i = F^* \sum \alpha_i \Delta s_i$$

Da cui facciamo scomparire la forza fittizia:

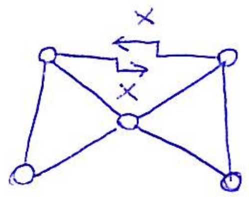
$$\boxed{\mathcal{L}_{A_{vert}} = \sum_{aste} \alpha_i \Delta_{s_i}}$$

RISOLUZIONE DI UN TELAIO CON IL METODO DELLE FORZE



La struttura ha un'iperstaticità interna causata da un numero sovrabbondante di aste. Una volta individuata la causa di iperstaticità faccio un taglio in modo da poter metterne in evidenza gli sforzi interni X.

Per determinare tali sforzi devo imporre la congruenza, come così come è mostrato in figura.



Devo trovare quelle x per cui le due faccie del taglio non siano soggette né a rotazioni né a traslazioni.

In virtù del fatto che per strutture reticolari entra in gioco solo lo sforzo assiale elimino eventuali analisi concernenti rotazioni o sforzi taglianti.

Si applica il T.D.L.V.

PER OGNI SISTEMA DI SPOSTAMENTI CONGRUENTI CON LA RISPETTIVA DEFORMAZIONE E PER OGNI SISTEMA DI FORZE APPLICATE IN EQUILIBRIO CON LE RISPETTIVE SOLLECCITAZIONI DEVE VALERE

$$\boxed{L_e = L_i}$$ Per spostamenti virtuali.

* CONSIDERIAMO LA STRUTTURA SENZA FORZE ESTERNE, e applichiamo nella sezione S un sistema fittizio di forze equilibrate F^*.

Avendo eseguito un taglio nella trave superiore la struttura è diventata isostatica e quindi sono facilmente ricavabili le sollecitazioni S_i^*.

Vale la relazione

$$S_i^* = \alpha F^*$$

Andiamo ora ad impostare il T.L.V.

$$F^* \delta_{relativo} = \sum S_i^* \Delta s_i$$

in cui $\text{Allungamenti} = \Delta s_i = \dfrac{N_i s_i}{R_i}$ a)

$\text{Rigidezze assiali} = R_i = E A_i$ sezione, modulo di elasticità lineare

in a) le lunghezze iniziali derivano dalla geometria (nota) della struttura, le rigidezze sono assegnate, rimane quindi da ragionare sugli sforzi assiali.

Pongo: $\boxed{\dfrac{s_i}{R_i} = \delta}$

così che la scrittura si compatta.

Gli sforzi normali sono dati dalla somma di due contributi: quello derivante dalle forze esterne e quello derivante dalle forze x.

$$S_{x_i} = \alpha_i X$$

Da cui $\Delta s_i = \delta \left(S_0 + S_x \right)$

$$\Delta s_i = \delta_i \left(S_{0i} + \alpha_i X \right)$$

T.L.V. $F^* \delta_{rel} = \sum_i \alpha_i F^* \delta_i \left(S_0 + \alpha_i X \right) =$

$$= F^* \sum \alpha_i \delta_i \left(S_0 + \alpha_i X \right)$$

Quindi $\delta_{rel} = 0$ si traduce in $\alpha \delta_i \left(S_0 + \alpha_i X \right) = 0$

$$\Sigma \left(\alpha S_0 \rho + \alpha^2 \rho x \right) = 0$$

che dà il risultato:

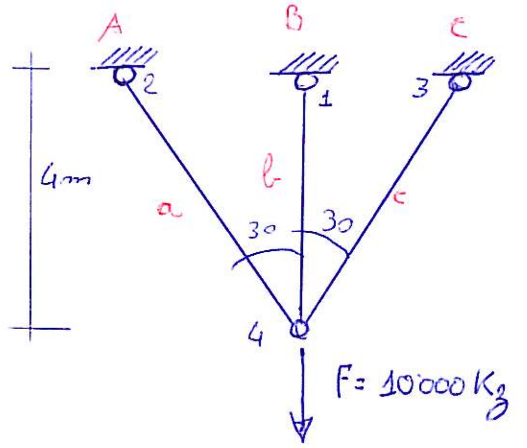
$$x = - \frac{\Sigma \, x S_0 \rho}{\Sigma \alpha^2 \rho}$$

FONDAMENTALE ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL T.D.L.V.

DOMANDA ORALE CLASSICA

Consideriamo una struttura reticolare composta da tre aste (in questo caso 3 tondini).

Le aste hanno la seguente rigidezza assiale assegnata.



$R_{N1} = 7{,}98 \times 10^6$ Kg

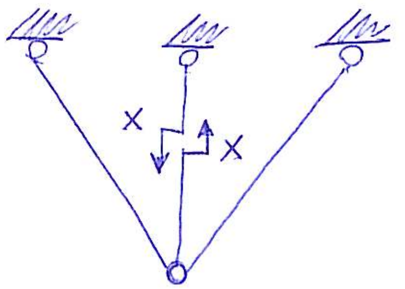
Il tondino A ha una sezione $\varnothing 22$ $A_{tondino} = 3{,}8 \text{ cm}^2$

tondino in acciaio di modulo elastico pari a 2100000 Kg/cm^2

$$\left.\begin{matrix} R_{N2} = \\ R_{N3} = \end{matrix}\right\} 4{,}2 \times 10^6 \quad \varnothing 16 \quad A = 2 \text{ cm}^2$$

Scegliamo di muoverci nell'ambito del metodo delle forze:
Per la scelta del sistema principale isostatico si sceglie di effettuare un taglio nell'asta 1

E' conveniente scegliere l'asta centrale per motivi di simmetria.



Si Ricorda il T.D.L.V.

Per ogni spostamento virtuale dei punti interni di un sistema in equilibrio il lavoro delle forze interne è uguale al lavoro delle forze esterne.

A questo punto è opportuno costruirsi una tabella

ASTA	Δ (mm)	R_H (Kg)	$\rho = \frac{\Delta}{R_H}$	$\alpha = \frac{S^*}{F^*}$	S_0	$\alpha S_0 \rho$	$\alpha^2 \rho$
1	4,00	7,98	0,501	1.00	0.00	0,00	0,501
2	4,62	420	1,10	-0,577	5770	-3662,22	0,366
3	4,62	420	1,10	-0,577	5770	-3662,22	0,366
						-7324,44	1,233

$$X = \frac{-(-7324,44)}{1,233} = 5940$$

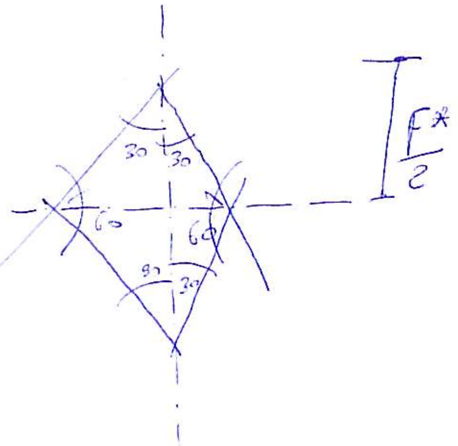
si è applicato $x = \frac{\sum \alpha S_0 \rho}{\sum \alpha^2 \rho}$

* Il rapporto delle rigidezze prescinde da 10^6 in quanto si semplifica

I coefficienti α riguardano le sollecitazioni che ci sono nella struttura isostatica priva di forze esterne, sollecitata però dalla forza fittizia.

Bisogna determinare gli sforzi interni e dividerli per F^* che è l'unica incognita: F^* si elide e rimangono i rapporti tra gli angoli.

Per quanto riguarda le aste 3 e 4 si fa traslare F^* fino al nodo 4.



$$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \cancel{2}\frac{F^*}{\cancel{2}}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{S^*}{F^*}$$

Si procede in seguito con la scomposizione della F^* lungo le direzioni delle aste 2 e 3.
In virtú della simmetria ci si trova con il triangolo equilatero di altezza $\frac{F^*}{2}$ vedi il disegno sopra

$$-0.577 = \frac{-0,5}{\cos 30°}$$

Si procede poi determinando gli S_0 che sono gli sforzi della struttura isostatica avendo eliminato l'asta 1.
Si otterrá quindi zero per l'asta 1 e 5770 per le aste 2 e 3.
Si ricava $X > 0$ quindi significa che era corretta la scelta di X di trazione.
Per trovare gli sforzi si procede come segue

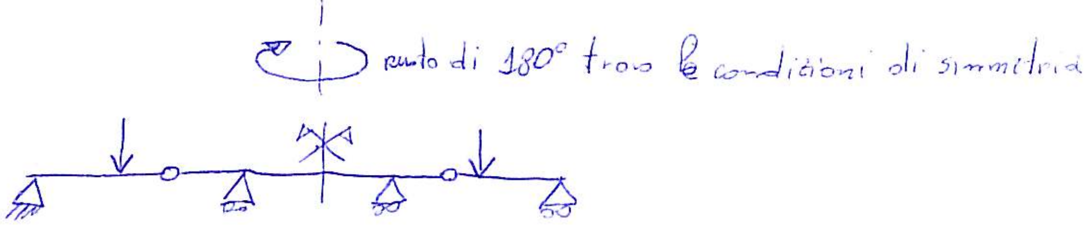
$$S_2 = S_3 = \frac{10'000 - 5940}{2 \cos 30°} = 2344$$

SIMMETRIE

Il primo passaggio della risoluzione di un telaio tramite il metodo di cross è lo studio delle eventuali simmetrie.
Le simmetrie introducono delle semplificazioni dei calcoli.

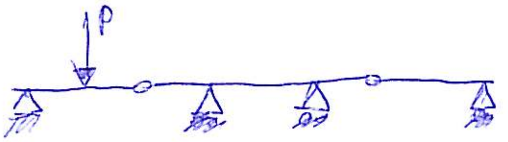
SI PARLA DI SIMMETRIA se effettuata una rotazione di un angolo piatto attorno ad un asse rimangono invariate le condizioni di carico e la forma della struttura.

Esempio



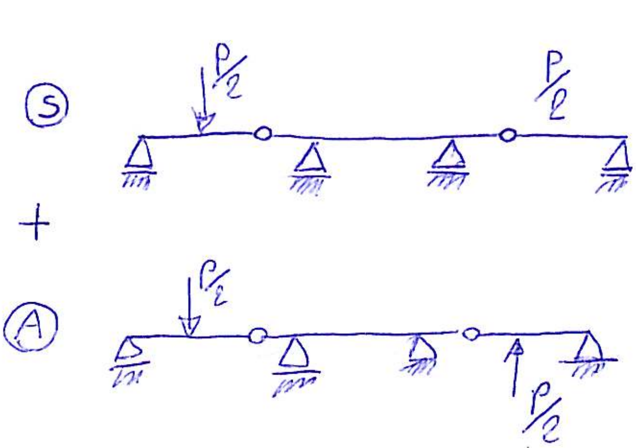
Una condizione di questo tipo da un diagramma dei momenti simmetrico e un diagramma dei tagli antimetrico.

La trave sottoriportata invece:...

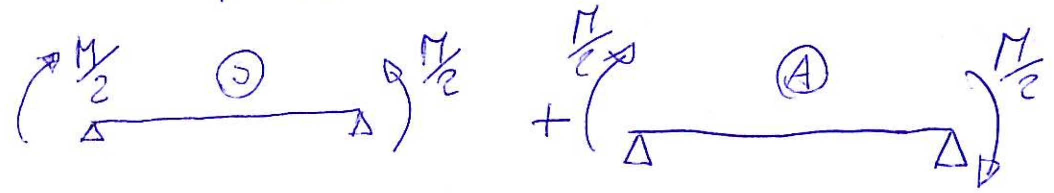


...é sottoposta ad un carico generico (non é antimetrico, altrimenti ci sarebbe un P verso l'alto nella parte destra della struttura).

In questi casi si applica il principio di sovrapposizione che dice:
il problema generico é la somma del problema simmetrico con quello antimetrico.

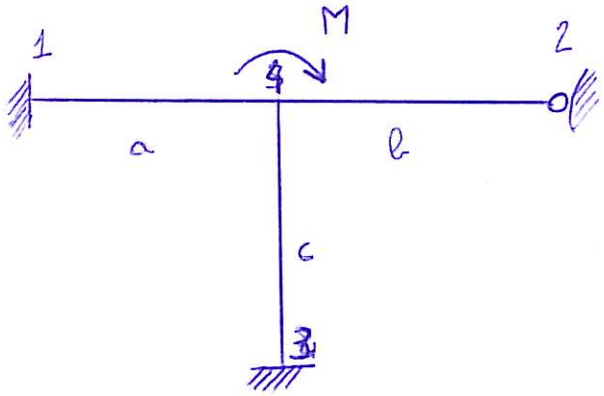


un altro esempio è:



Dove le condizioni di partenza erano:

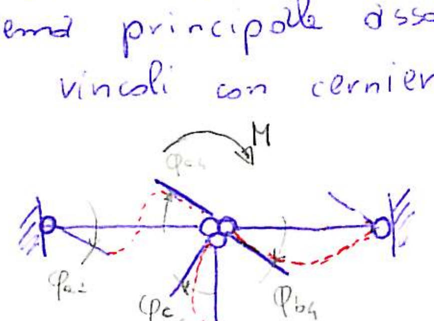
STUDIO DI UN TELAIO A NODI FISSI



Rigidezza Flessionale aste costante

$R_{fi} = cost$

sul nodo 3 vi è una saldatura quindi un momento M che gli viene applicato imprime una rotazione rigida con la conservazione degli angoli di partenza.
Il sistema principale associato è una reticolare ottenuta sostituendo tutti i vincoli con cerniere



Con un primo ragionamento fatto sul tipo di vincoli e sul loro numero possiamo definire che vi è un grado di iperstaticità pari a 5
Infatti: se consideriamo il nodo 1 della figura iniziale notiamo che le sue condizioni elementari di vincolo sono sufficienti per dare isostaticità alla struttura. La somma delle rimanenti C.E.V. restituisce il grado di iperstaticità: 3 c.e.v. per l'incastro e 2 cEV per la cerniera.

QUESTO tipo di problema "dove la struttura è labile e iperstatica" si risolve con il METODO DELLE DEFORMAZIONI

La labilità è insita nel nodo 4 che risulta libero di ruotare.

Le incognite sono la rotazione del nodo φ_4 e le rotazioni di estremità delle travi per un totale di 5.

Il vincolo n° 2 è una cerniera, quindi nota la rotazione all'estremo opposto si può ricavare quella sua tramite il coefficiente $\frac{1}{2}$.

INCOGNITE $\begin{cases} 5 \text{ rotazioni di estremità} \\ 1 \text{ rotazione del nodo interno n° 4.} \end{cases}$

Procedere con il metodo delle deformazioni significa assumere come incognite le grandezze geometriche le quali comunque soddisfano alle condizioni di congruenza.

Tali condizioni si divideranno in condizioni interne ed esterne.

Ricordando che:

$$\varphi_{b_2} = \frac{\varphi_{b_4}}{2}$$

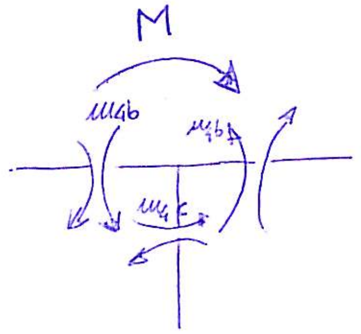
si ottiene:

$$\text{equazioni di congruenza} \begin{cases} \text{congruenza esterna} & \begin{cases} \varphi_{a1} = 0 \\ \varphi_{c_3} = 0 \end{cases} \\ \\ \text{congruenza interna} & \begin{cases} \varphi_{a_4} = \varphi_4 \\ \varphi_{c_4} = \varphi_4 \\ \varphi_{b_4} = \varphi_4 \end{cases} \end{cases}$$

Abbiamo 5 condizioni di congruenza indipendenti che governano 6 incognite. All'incognita in esubero si attribuisce un valore arbitrario, esempio φ_4.

ORA SI IMPONGONO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Bisogna contrastare la labilità interna, ovvero la rotazione del nodo 4



$$\boxed{-m_{4a} - m_{4c} - m_{4b} + M = 0}$$

EQUAZIONE DEI MOMENTI INTERNI ED ESTERNI

INTRODUCIAMO LE RELAZIONI DI ELASTICITÁ RICAVABILE DAI PARAMETRI DI RIGIDEZZA.

$$m_{4a} = W_{a_{RIGHT}} \varphi_{ar} = W_a \varphi_4 = \frac{4 R_{fa}}{\varphi_a} \varphi_4$$

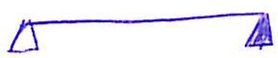
CASO incastro/MORSETTO

$$m_{4c} = m_{c4} = W_{cR} \varphi_{cR_{IGHT}} = W_c \varphi_4 = \frac{4 R_{fc}}{\varphi_c} \varphi_4$$

CASO INCASTRO/MORSETTO

$$m_{4b} = m_{b4} = W^{(0)}_{bc_{LEFT}} \varphi = W^{(0)}_b \varphi_4 = \frac{3 Rf}{\varphi_b} \varphi_4$$

CASO CERNIERA/MORSETTO



SI PUÓ OTTENERE LA SEGUENTE EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE attorno al nodo:

$$-\left(W_a + W_c + W_b^{(0)}\right) \varphi_4 + M = 0$$

IMPONIAMO CHE LA RIGIDEZZA NEL NODO SIA LA SOMMA DELLE RIGIDEZZE DELLE ASTE CHE VI CONFLUISCONO:

$$W_4 = W_{ac} + W_{c4} + W^{(0)}_{b4}$$

CHE PORTA ALLA SOLUZIONE

$$\varphi_4 = \frac{M}{W_4}$$

Abbiamo così determinato le grandezze geometriche, ora bisogna calcolare quelle meccaniche

$$\mathcal{M}_{a4} = \boxed{\frac{W_a}{W_4}} M$$

$$\mathcal{M}_{c4} = \boxed{\frac{W_c}{W_4}} M$$

$$\mathcal{M}_{b4} = \boxed{\frac{W_b^{(0)}}{W_4}} M$$

I TERMINI NEL RIQUADRO SONO I COEFFICIENTI DI RIPARTIZIONE

Come verifica si può notare che la loro somma dà l'entità

$$\frac{W_a}{W_4} + \frac{W_c}{W_4} + \frac{W_b^{(0)}}{W_4} = \frac{W_a + W_c + W_b^{(0)}}{W_4}$$

$$= \frac{W_4}{W_4} = 1$$

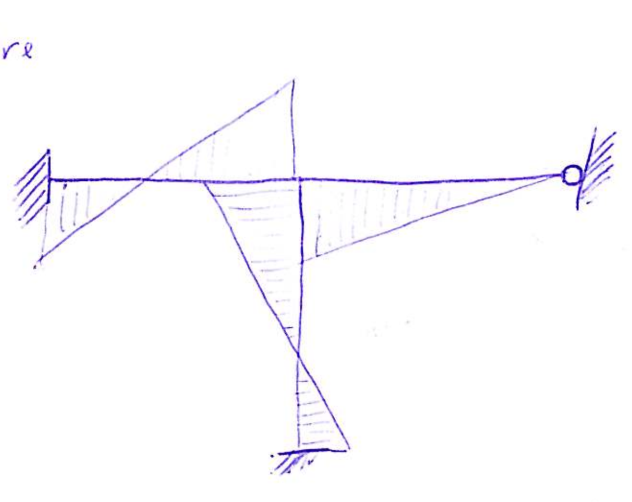
Per quanto riguarda i momenti dell'estremità opposta ci avvaliamo dei coefficienti di trasmissione:

$$\mathcal{M}_{a1} = K_{41}\, \mathcal{M}_{a4} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{a4}$$

$$\mathcal{M}_{c3} = K_{43}\, \mathcal{M}_{c4} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{c4}$$

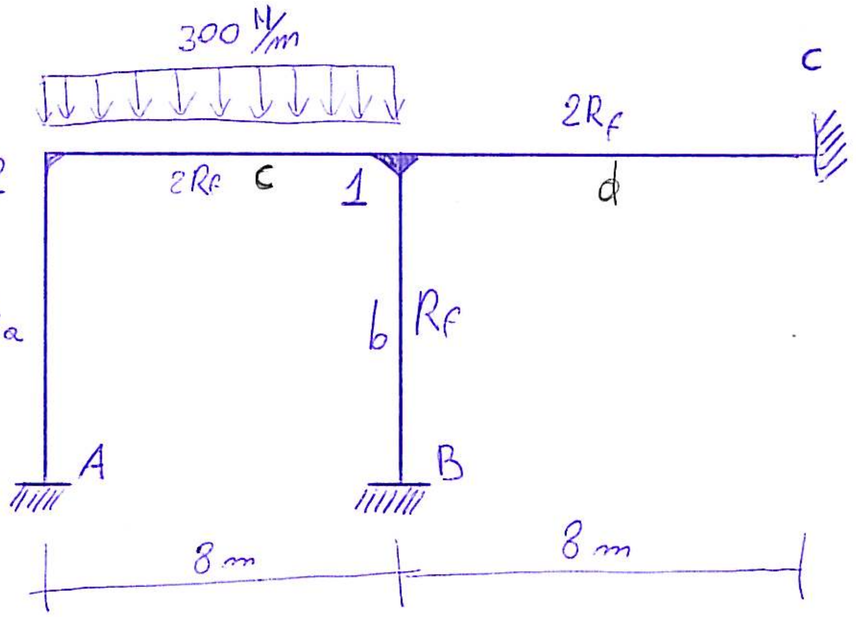
$$\mathcal{M}_{b2} = 0$$

Essendo le travi scariche l'andamento dei momenti sarà lineare



IL METODO DI CROSS

STUDIO COMPLETO DI UN TELAIO A NODI FISSI CON IL METODO DI CROSS E CON TUTTE LE CONSIDERAZIONI UTILI.



Il telaio in questione si può risolvere usando la tabella:

TRAVE	LUNGHEZZA	$\frac{R_{Fi}}{R_F}$	$\frac{W}{R_F}$	$\frac{W_i/R_F}{\sum W_i/R_F}$ SOTTO TEL. 1	SOTTO TEL. 2	μ_{iL}	μ_{iR}
a	4	1	1	/	0,5		
b	4	1	1	0,333	/		
c	8	2	1	0,333	0,5		
d	8	2	1	0,333	/		
		RIGIDEZZA FLESSIONALE	RIGIDEZZA ROTAZIONALE D'ESTREMITÀ	COEFFICIENTI DI RIPARTIZIONE DEI MOMENTI I		MOMENTO D'INCASTRO PERFETTO SINISTRO	MOMENTO DI INCASTRO PERFETTO DESTRO

Dividiamo la struttura asta per asta pensando i morsetti di bloccaggio in 1 e 2.

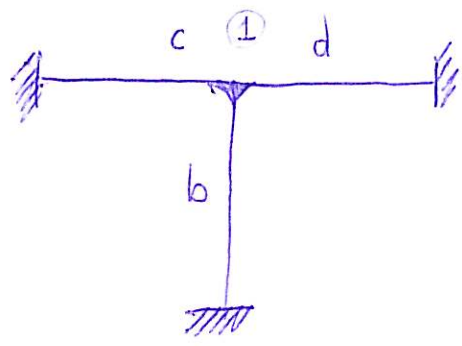
a — morsello/incastro $W = 4\frac{R_F}{\ell} \Rightarrow W = \frac{4R}{4} = 1R$

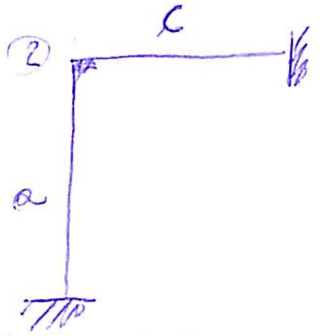
c — morsello/morsetto $W = 4\frac{R_F}{\ell} \Rightarrow W = \frac{4\,2R}{8} =$

b — morsello/incastro $W = 4\frac{R_F}{\ell} \Rightarrow W = \frac{4R_F}{4} = 1R$

d — morsello/incastro $W = 4\frac{R_F}{\ell} \Rightarrow W = \frac{4\,2R_F}{8} = 1R_F$

I morsetti sono inseriti uno alla volta, perciò il telaio si scompone in due sottotelai, essi sono:





Ecco perché la trave c ha la rigidità tipica di un morsetto/incastro $W = \frac{4 R_F}{l}$ (se si parla primo sottostato).

I coefficienti di ripartizione vengono calcolati separatamente per i due sottostati.

travi a e c (confluenti in 2) $\frac{1}{1+1} = 0,5$

travi c, b, d (confluenti in 1) $\frac{1}{1+1+1} = 0,333$

Si può subito verificare che la somma dei coefficienti di ripartizione mi dà 1

$0.5 + 0.5 = 1$

$0,333 + 0,333 + 0,333 = 1$

Per il calcolo delle μ (momenti di incastro perfetto) bisogna considerare ogni singola trave.

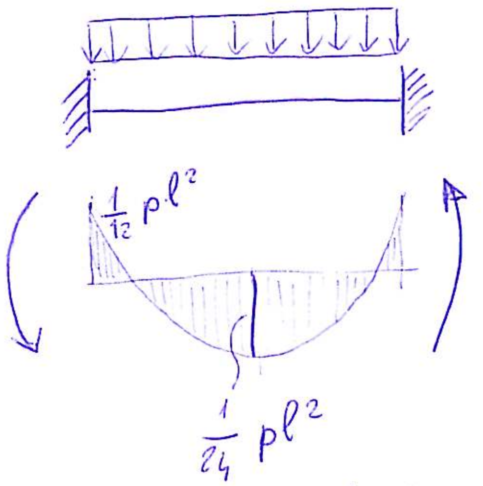
Travi a, b, d = scariche, quindi i momenti di estremità sono nulli.

La trave C invece è caricata con un Q costante pari a 3000 N/m
Affinché siano tese le fibre superiori di sinistra il momento di incastro deve essere antiorario e quindi negativo.

$$M_{il} = -\frac{3000 \times 8^2}{12} = -16000 \, daN/m$$

All'estremità destra verso orario $\Rightarrow$ positivo

$$M_{iR} = +\frac{3000 \times 8^2}{12} = +16000 \, daN/m$$

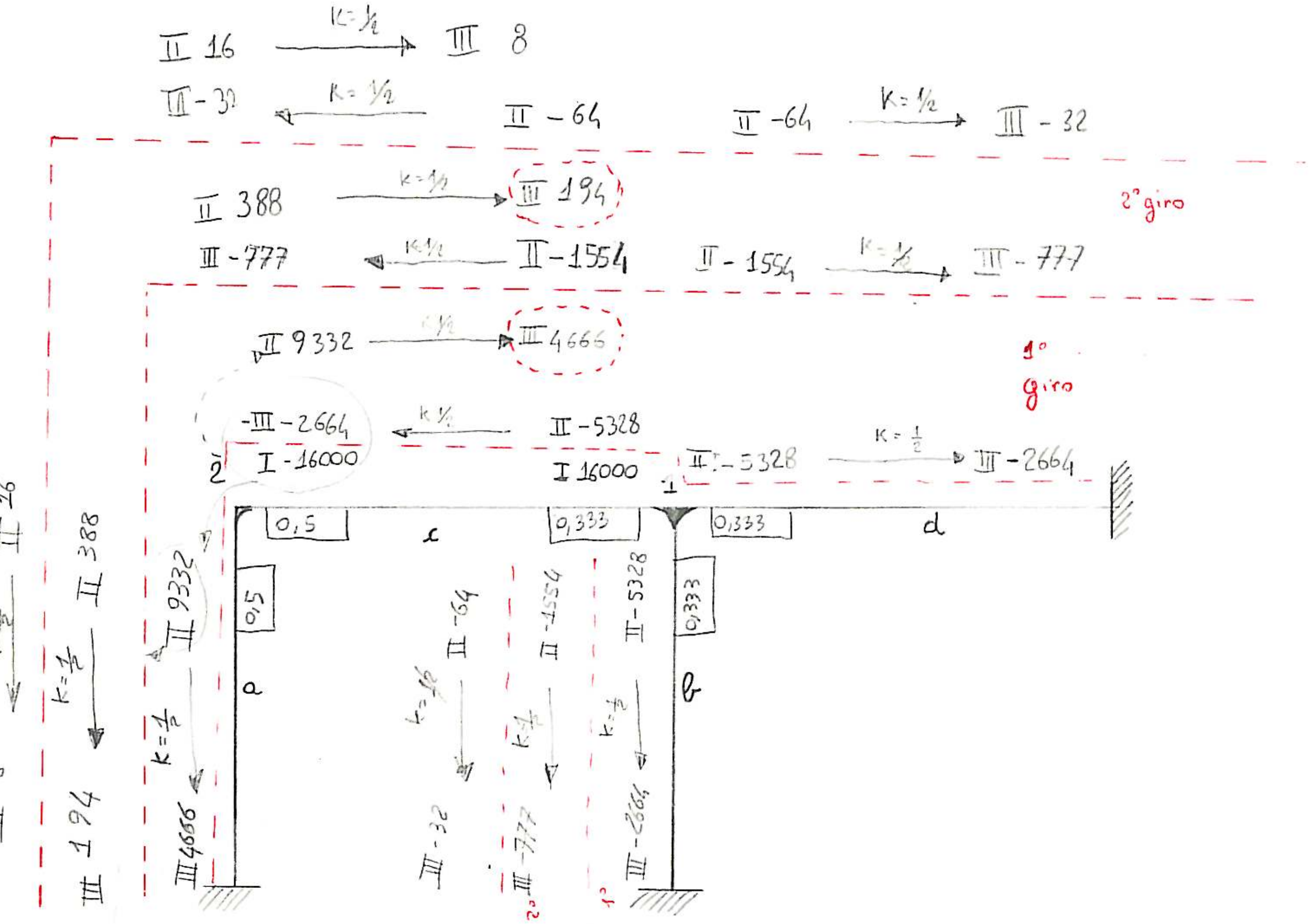


Cominciamo ad applicare il metodo di CROSS.
* Si tratta di ripartire il momento applicato al nodo 1 tra le travi ivi confluenti.

Il metodo comporta un susseguirsi di bloccaggi e sbloccaggi dei nodi in modo che la rotazione trasmessa nel passaggio precedente sia stabilizzata.
Ad ogni passaggio la rotazione tende a diminuire fino a diventare residua, quando questo avviene il procedimento si può fermare.

Per procedere conviene ridisegnare il telaio, mettere negli estremi delle aste i propri coefficienti di ripartizione e cominciare a trasmettere i momenti agli estremi adiacenti. Nota: si parte dall'asta C perché come si può notare dalla tabella è l'unica con dei momenti primi applicati.

NOTA: I momenti secondi vanno cambiati di segno rispetto al valore calcolato



ATTENZIONE: QUESTO MOMENTO SECONDO RISENTE ANCHE DELL'EFFETTO DEL MOMENTO III trasmesso nel passo precedente dall'asta adiacente.
È una SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI $\underbrace{8000}_{16000\cdot 0.5} + \underbrace{1332}_{2664\cdot 0.5} = 9332$

NOTA: IL VALORE III 4666 Trovato a conclusione del primo sottostato è il valore di partenza che useremo per il giro successivo. Ad ogni giro migliora la precisone percentuale.
Per continuare con i giri del Cross il momento terzo che è segnato cerchiato va moltiplicato per i coefficienti di ripartizione (lo si considera dunque come se fosse il momento primo di partenza).

NOTA: IL VALORE III 194 È IL VALORE DI PARTENZA PER IL TERZO GIRO.

SPIEGAZIONE PIÙ APPROFONDITA

Il primo sottostato è caratterizzato dalla presenza dei morsetti e quindi da momenti d'estremità d'incastro perfetto.

Per convenzione abbiamo indicato con il simbolo I tali momenti.

momento primo (I) = momenti di incastro perfetto della singola trave soggetta a forza esterna.

Sul problema dato c'è carico solo sulla trave C, quindi solo in essa compaiono i momenti primi di incastro perfetto.

Il primo sottostato ha soluzione semplicemente riportando i momenti primi sulle estremità delle aste "dove sono presenti".

Si comincia la soluzione iterativa applicabile solo a sottotelai aventi un unico nodo interno. Si portano nello schema i coefficienti di ripartizione $\frac{W}{\sum_i W_i}$ e quelli di trasmissione (0,5 o ∅).

Comincio con sbloccare il nodo 1. Nel nodo 1 c'è un momento primo di M= +1600 daNm che devo contrastare in quanto non c'è un vincolo per esercitare la reazione richiesta.

* Nel nodo 1 dovrò applicare un M opposto -16000 daNm
* Applico un momento antiorario al nodo 1 che si ripartirà alle estremità delle travi con momenti aventi lo stesso verso e come modulo il prodotto del coefficiente di ripartizione per la coppia esterna.

I momenti di ripartizione così trovati li distinguerò dagli altri indicandoli come "secondi" II.

Poiché tutte e tre le travi che confluiscono nel nodo 1 hanno l'estremità opposta impedita di ruotare (vedi schemino)

verranno trasmessi dei momenti con lo stesso segno e con modulo pari al prodotto del momento secondo per il coefficiente di trasmissione 0,5. Questi nuovi momenti sono i III "terzi"

Si noti che i momenti III in C e B vengono assorbiti dal vincolo esterno mentre in 2 dal vincolo provvisorio di - 16000 daNm dovuto alla fase di bloccaggio (momento I), influenza l'equilibrio nel nodo stesso.

=> Il momento III in due 2 deve essere eliminato assieme al momento primo già presente.

=> Nel secondo passo del primo giro dovrò eliminare la somma dei momenti I e III nel nodo 2.
Si è già visto che in questo punto della soluzione si è in presenza di una configurazione congruente ma non equilibrata.

* Devo quindi fare la somma algebrica dei momenti nel nodo 2, cambiarla di segno, applicarla al nodo quando gli altri saranno congelati.

Si procede poi ripartendo il contributo della somma algebrica dei momenti (k = 0,5) e poi trasmettendo alle estremità opposte i momenti secondi così trovati.
A questo punto si può considerare concluso il primo giro.
Fatto ciò si può perfezionare la soluzione compiendo un altro giro.
=> Equilibrare il nodo 1 (c'è un momento III che rende il nodo non equilibrato) sommando i momenti presenti, cambiando il segno, ripartendo e trasmettendo i momenti trovati

alle altre estremità.

A questo punto naturalmente è lecito chiedersi dopo quanti giri ci si debba fermare

Si determina con la formula che segue l'errore percentuale lo scarto tra un giro e l'altro:

$$\varepsilon = \frac{2^a \text{ soluzione} - 1^a \text{ soluzione}}{1^a \text{ soluzione}}$$

ci si ferma quando si ha un errore dell'ordine di grandezza del $4 \div 5\%$

A questo punto è del tutto definita la funzione momento flettente in quanto sono definiti i valori di estremità per tracciare tale diagramma devo passare dalla convenzione di segno dei momenti di estremità alla convenzione di segno dei momenti flettenti.

momento d'estremità positivo $\Longrightarrow$ senso orario

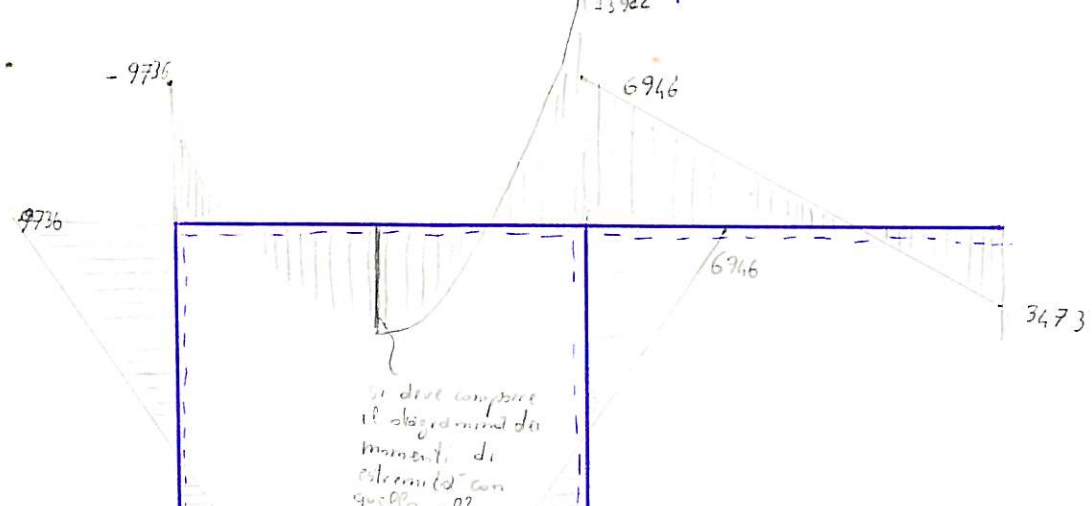


DIAGRAMMA (M)

VEDIAMO ORA IL DIAGRAMMA DEI TAGLI (T)

Per quanto riguarda il diagramma T si fa riferimento esclusivamente al precedente diagramma M ricavato con particolare attenzione alle rotazioni d'estremità.

Per ricavarsi i valori dello sforzo tagliante in genere si procede avvalendosi di uno schema statico di riferimento di una trave soggetta a momenti d'estremità e ad un carico uniformemente distribuito. In virtù dell'equilibrio alla rotazione imposto prima rispetto ad una estremità e poi rispetto all'altra si ricava la seguente relazione.

$$\boxed{T_{i_{LR}} = \underbrace{-\frac{M_L + M_R}{l}}_{\text{contributo dovuto alle coppie di estremità}} \underbrace{\pm T^{\circ}_{L.R}}_{\text{contributo dovuto al carico esterno attivo distribuito } q\frac{l}{2}}}$$

* Si procede ora facendo la medesima operazione per tutte le travi rimanendo molto attenti nella scelta dei contributi da considerare

⇒ Solo per la trave C si ha contributo $\pm q\frac{l}{2}$

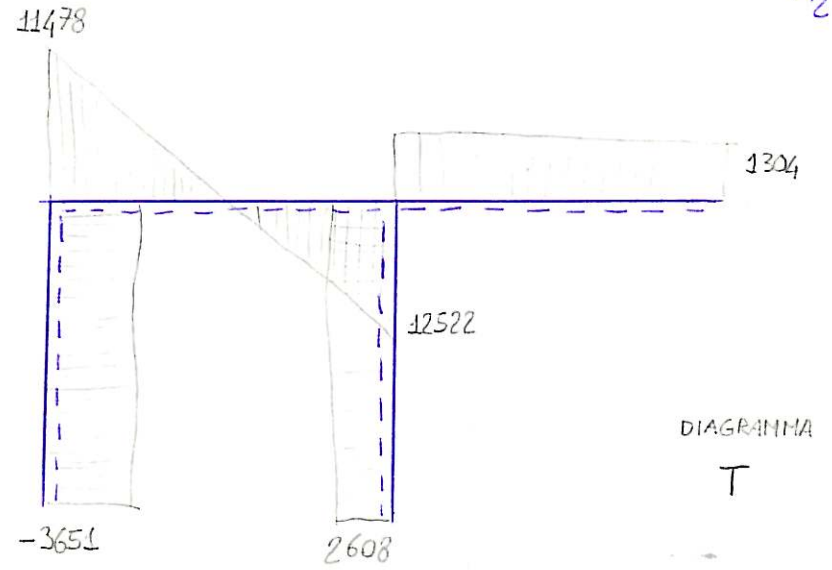


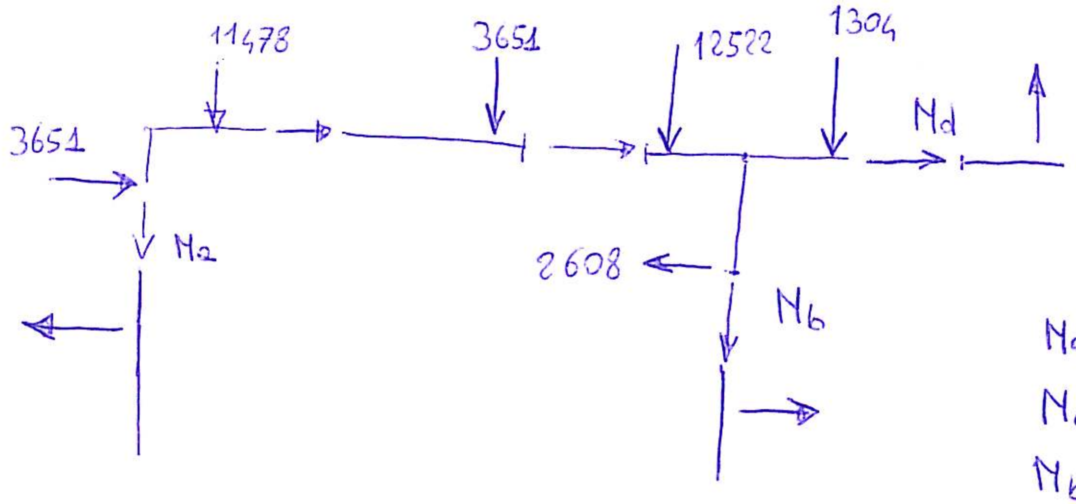
DIAGRAMMA DEGLI SFORZI NORMALI N

Per quanto riguarda il diagramma N si procede tramite l'equilibrio ad ogni nodo. Consideriamo ad esempio il nodo 2 saranno incogniti N_c ed N_a. Si mettono in evidenza gli sforzi taglianti.

taglio negativo => indicano momento antiorario rispetto alla estremità opposta

taglio positivo => indica momento orario rispetto alla estremità opposta.

Nel nodo 2 abbiamo un caso elementare in cui gli sforzi di taglio in una trave si trasformano in sforzi normali nell'altra.



$N_a = -11478$ daN

$N_c = -3651$

$N_b = -13826$

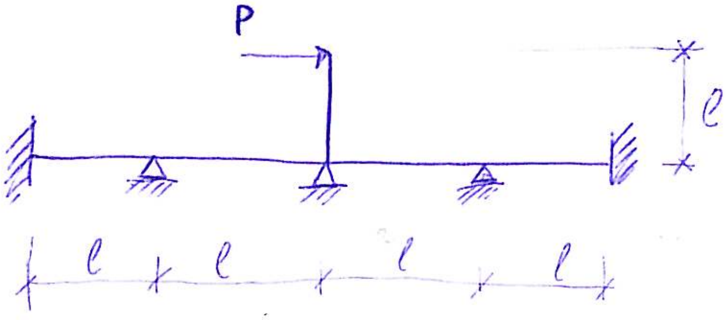
$N_d = -1043$

DIAGRAMMA

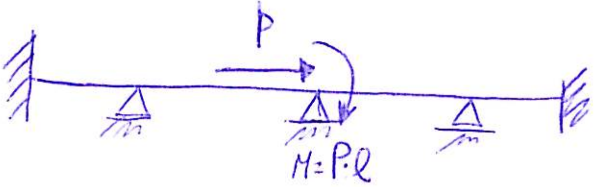
N

UNA DOMANDA D'ESAME

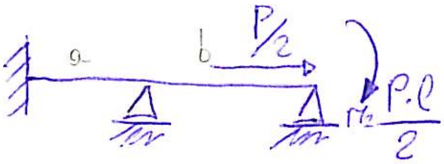
Tracciare il diagramma dei momenti flettenti e degli sforzi assiali per la seguente struttura



Possiamo riportarci al seguente schema, eliminando l'appendice isostatica



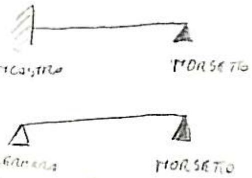
grazie alla simmetria possiamo considerare solo meta-struttura



Si può applicare il metodo di CROSS a nodi fissi.

a = incastro/morsello $\quad W = \frac{M}{\varphi} = \frac{4RI}{l}$

b = morsello/cerniera $\quad W = \frac{M}{\varphi} = \frac{3RI}{l}$

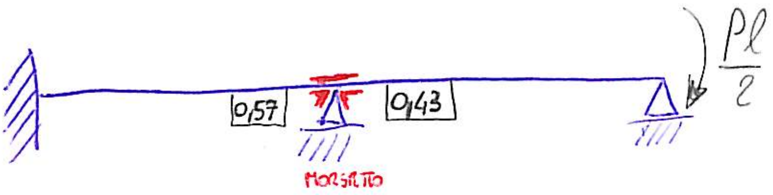


Cerco i coefficienti di ripartizione rispetto al vincolo centrale che considero bloccato con il morsetto

$$K_{\text{RIPARTIZIONE } a} = \frac{W_a}{W_a + W_b} \Rightarrow \frac{\frac{4R}{l}}{\frac{4R}{l} + \frac{3R}{l}} = \frac{4R}{\cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{l}}{4R + 3R} = \frac{4}{7} \quad \text{ok } 0{,}57$$

$$K_{\text{RIPARTIZIONE } b} = \frac{W_b}{W_a + W_b} \Rightarrow \frac{\frac{3R}{l}}{\frac{4R}{l} + \frac{3R}{l}} = \frac{3R}{l} \cdot \frac{l}{4R + 3R} = \frac{3}{7} \quad \text{ok } 0{,}43$$

ORA CHE HO A DISPOSIZIONE I COEFFICIENTI DI RIPARTIZIONE COMINCIO AD APPLICARE IL CROSS CERCANDO I MOMENTI SECONDI, E PER TRASMISSIONE I MOMENTI TERZI.

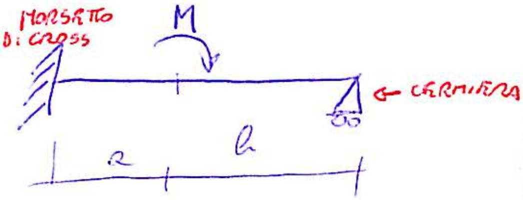


nella parte destra del morsetto arriva una parte del momento primo applicato all'estremità dell'asse b dato dalla formula:

ATTENZIONE $\Rightarrow$ l = lunghezza complessiva trave in questo ragionamento

caso generale

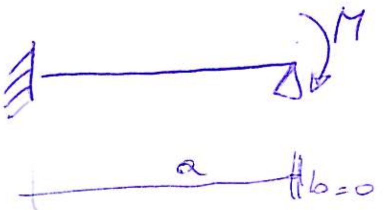
$$\mu_L = \frac{M_b(2l-3b)}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{M_a(2l-3a)}{l^2}$$



se sposto il momento alla destra della trave ottengo il caso particolare che sto studiando, cioè:

$$\mu_L = \cancel{\frac{M_b(2l)}{l^2}} - \frac{1}{2} M_a \frac{(2l-3a)}{l^2}$$

si annulla



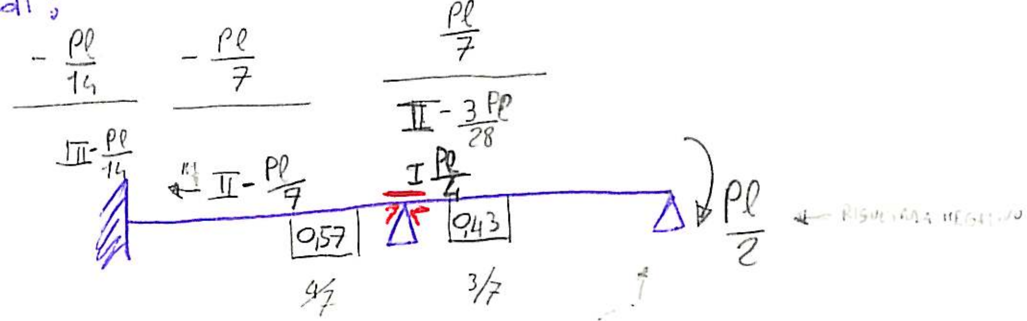
$$= -\frac{1}{2}\frac{M \cdot a\,(2l-3a)}{l^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{M \cdot \cancel{l}\,(2l-3l)}{l^{\cancel{2}}}$$

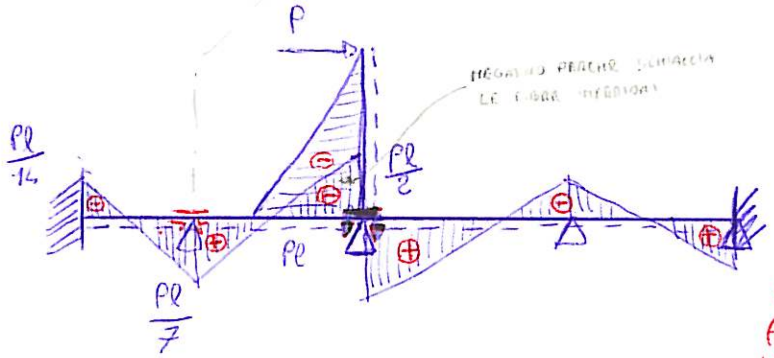
$$= -\frac{1}{2} M \frac{-l}{l} = \frac{1}{2} M$$

$\boxed{\text{ovvero al morsetto arriva Metà del momento applicato alla cerniera nell'estremità della trave}}$

quindi:



ORA POSSO TRACCIARE IL GRAFICO DEI MOMENTI



* M SI DISEGNA SEMPRE DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE

* ⊖ se comprime fibre inferiori

* ⊕ se comprime fibre superiori

si disegnano sempre dalla parte delle fibre tese e sono positivi se dalla parte delle fibre segnate altrimenti sono negativi.

Per calcolare gli sforzi assiali bisogna scrivere una condizione di congruenza, imponendo che gli spostamenti orrizzontali in mezzeria siano uguali, cioè:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

$$\frac{X \cdot 2l}{EA} = \frac{(P-X) \cdot 2l}{EA}$$

MODULO DI RIGIDEZZA ASSIALE — MODULO DI YOUNG — SEZIONE TRAVE

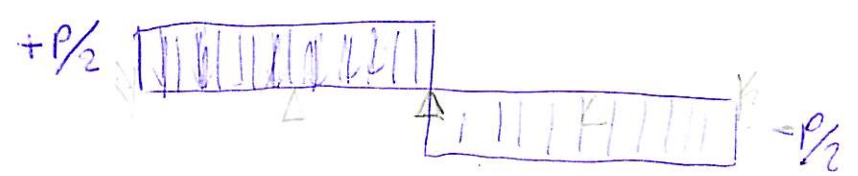
$x \cdot 2l = (P-x) \cdot 2l$

$x = P - x$

indicando con X lo sforzo assiale a destra della mezzeria

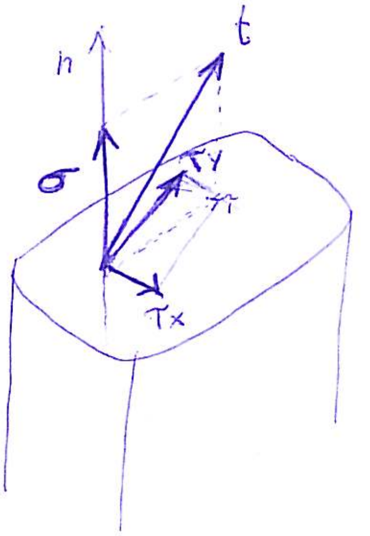
$$X = \frac{P}{2}$$

Diagramma degli sforzi assiali:



Analisi della tensione

Considerato un continuo tridimensionale e una sua sezione, si indica come tensione in un punto della sezione, la forza di superficie "t" caratterizzata da una sua direzione.
La tensione "t" è caratterizzata da 3 componenti σ, τ_x, τ_y aventi significato di sforzo normale, taglio e flessione



quando σ ha verso concorde con n, allora assume significato di trazione, altrimenti diventa compressione.
Il complesso delle tre componenti σ, τ_x, τ_y costituisce lo stato di tensione del continuo tridimens. nel punto in esame.

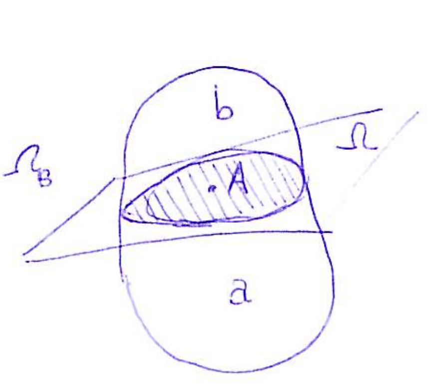
Considerando un sistema di assi coordinati x, y, z su cui giaciono le componenti di t.
È possibile con delle considerazioni sul tetraedro di Cauchy rappresentare lo stato di tensione interna con il sistema

$$\begin{cases} \vec{t}_{nx} = \sigma_x \cos\alpha_x + \tau_{yx} \cos\alpha + \tau_z \cos\alpha_z \\ \vec{t}_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha_x + \cancel{\sigma_x}\, \cos\alpha_y + \tau_{zy} \cos\alpha_z \\ \vec{t}_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha_x + \tau_{yx} \cos\alpha_y + \sigma_z \cos\alpha_z \end{cases}$$

$\vec{t} = T\hat{n}$ è il tensore dello sforzo normale o tensore delle tensioni.

vale la reciprocità $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Analizziamo lo stesso problema da un punto di vista più semplice.



Se si effettua una sezione di un corpo continuo soggetto ad una tensione interna, si verifica che sulle due faccie Ω_A e Ω_B dei monconi sono presenti le due forze interne che prima della sezione erano mutuamente equilibrate.

Se $\Delta\Omega_A$ è un intorno di A su Ω e se ΔT è la risultante delle forze che B esercita su di esso, possiamo scrivere:

$$t = \lim_{\Delta\Omega_A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta\Omega_A} = \frac{dT}{d\Omega_A}$$

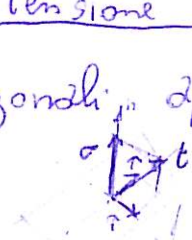
ovvero: la risultante delle forze interne ridotte all'analisi in uno specifico punto è la Tensione.

Per giacitura intenderemo una congruenza con una delle infinite direzioni della stella di rette passante per A.

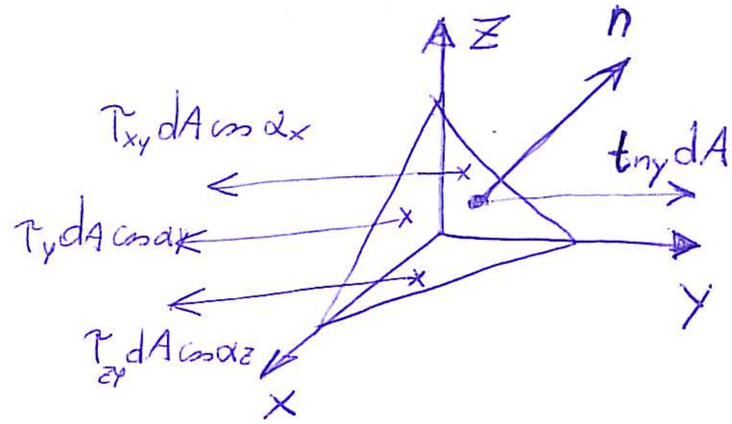
Si riconosce la dipendenza del vettore tensione in un punto dal versore $\vec{n}$ relativo all'area infinitesima $d\Omega$ su cui si valuta la tensione.

DEFINIAMO STATO DI TENSIONE nel punto A il complesso delle tensioni relative agli elementi piani di qualsiasi giacitura contenenti il punto A.

La $\vec{t}$ si può decomporre in una componente di tensione normale σ (che assume valore positivo se ha il carattere della trazione) e componenti di tensione tangenziali τ secondo due direzioni mutuamente ortogonali, appartenenti alla giacitura prescelta.



Analizziamo lo stato di tensione in un punto O rispetto ad un sistema di assi coordinati di origine in O.
Si individuano tre coseni direttori $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$.
Applicando le condizioni di equilibrio del tetraedro di Cauchy nella direzione degli assi coordinati possiamo scrivere:



Equilibrio lungo Y

$$t_{ny} dA = \tau_{xy} dA \cos\alpha_x + \sigma_y dA \cos\alpha_y + \tau_{zy} dA \cos\alpha_z$$

RAGIONANDO IN MANIERA ANALOGA SULLE ALTRE DIREZIONI POSSO OTTENERE IL SISTEMA

$$t_{nx} = \sigma_x \cos\alpha_x + \tau_{yx} \cos\alpha_y + \tau_{zx} \cos\alpha_z$$

$$t_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha_x + \sigma_y \cos\alpha_y + \tau_{zy} \cos\alpha_z$$

$$t_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha_x + \tau_{yz} \cos\alpha_y + \sigma_z \cos\alpha_z$$

che può essere espresso in forma matriciale con:

$$t = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \end{bmatrix}$$

Le componenti σ e τ così trovate sono le componenti di un tensore doppio $\mathcal{J}$ che applicato al vettore $\vec{n}$ fornisce la corrispondente tensione tramite la relazione

$$\boxed{t = \mathcal{J} \cdot \vec{n}}$$

STATI DI TENSIONE PIANI

Uno stato di tensione si dice piano se è caratterizzato da tensioni t_n appartenenti ad uno stesso piano, il piano delle tensioni.
Risulta quindi definito da tre sole componenti indipendenti di tensione, mentre risultano nulle le rimanenti tre.
Ad esempio lo stato di tensione piano relativo alla giacitura individuata da x e y è dato da:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{x,y} & 0 \\ \tau_{y,x} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$$ individuano lo stato di tensione

Un simile stato di tensione può essere decomposto in tre sottostati di tensione definiti dalle componenti:

1) $\sigma_x' = \sigma_y' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \tau_{xy}' = 0$

2) $\sigma_x'' = -\sigma_y'' = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad \tau_{xy}'' = 0$

3) $\sigma_x''' = \sigma_y''' = 0 \qquad \tau_{xy}''' = \tau_{xy}$

Analizziamoli separatamente per vedere come varia la tensione $\vec{t}$ sull'elemento di superficie piana normale al piano (x,y) di giacitura variabile. Anche in questo caso si sfrutta il tetraedro di Cauchy che si riduce ad un elemento di volume prismatico, visto che il piano in esame ha posizione variabile ma sempre ortogonale al piano (x,y).
Rappresentiamo i vettori $\vec{t}_n$ al variare di n in un sistema di riferimento solidale alla giacitura di normale n, ossia nel riferimento (σ, τ).

Primo sottostato

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \tau'_{xy} = 0$$

Per Cauchy possiamo scrivere

$$t'_{nx} = \sigma'_x \cdot \cos\alpha_x + 0 + 0 \quad e \quad t'_{ny} = 0 + \sigma'_y \cos\alpha_y + 0$$

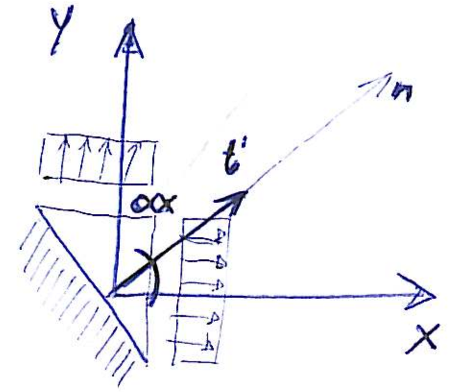
Ricordando le posizioni iniziali

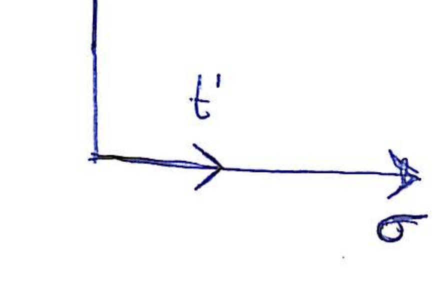
$$t_{ny} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos\alpha_x$$

$$t'_{ny} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos\alpha_y = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \operatorname{sen}\alpha_x$$

t'_n presenta componenti lungo x e y derivanti dal flusso di σ'_x e σ'_y attraverso l'elemento di superficie considerato, espresse da $\sigma'_x \cdot \cos\alpha_x$ e $\sigma'_y \cdot \operatorname{sen}\alpha_x$.

Ha modulo costante di valore $\left|\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right|$ e la direzione di $\vec{n}$. Nel riferimento (σ, τ) t'_n giace sull'asse dello σ.





Secondo sottostato

$$\sigma_x'' = -\sigma_y'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \tau_{xy}'' = 0$$

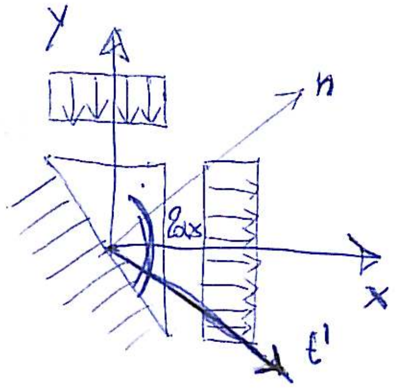
$$\begin{cases} t_{nx}'' = \sigma_x'' \cdot \cos\alpha_x \\ t_{nx}'' = \sigma_y'' \cdot \cos\alpha_y \end{cases}$$

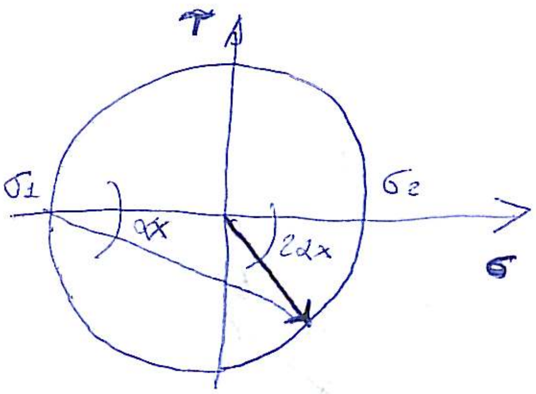
Ricordando le posizioni iniziali si ha:

$$t_{nx}'' = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \cos\alpha_x$$

$$t_{ny}'' = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \cos\alpha_y$$

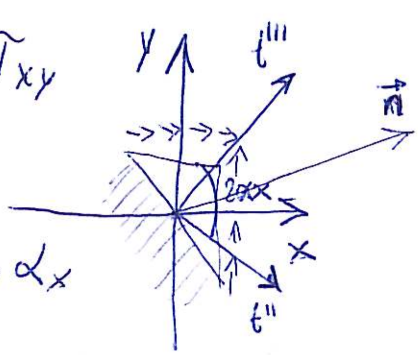
t_n'' presenta componenti lungo x e y espresse da $\sigma_x'' \cos\alpha_x$ e $\sigma_y'' \cos\alpha_y = -\sigma_x'' \operatorname{sen} x$. ha modulo costante di valore $\frac{|\sigma_x - \sigma_y|}{2}$ ed è ruotato di un angolo di $2\alpha_x$ rispetto alla direzione di $\vec{n}$.

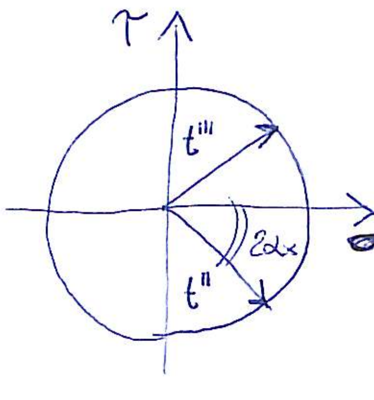




Terzo sottostato

$\sigma_x''' = \sigma_y''' = 0 \qquad \tau_{xy}''' = \tau_{xy}$





Per Cauchy possiamo scrivere:

$\tau_{yx}''' = \tau_{xy}''' \cdot \cos\alpha_y = \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\alpha_x$

$\tau_{ny}''' = \tau_{xy}''' \cdot \cos\alpha_x$

Sia ora $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\cos\alpha_x}{\operatorname{sen}\alpha_x} = \operatorname{ctg}\alpha_x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_x\right) \Rightarrow \phi = \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_x\right)$

t_n''' è ortogonale a t_n'' quindi l'angolo e la direzione di $\vec{n}$ è $2\alpha_x - \dfrac{\pi}{2}$.

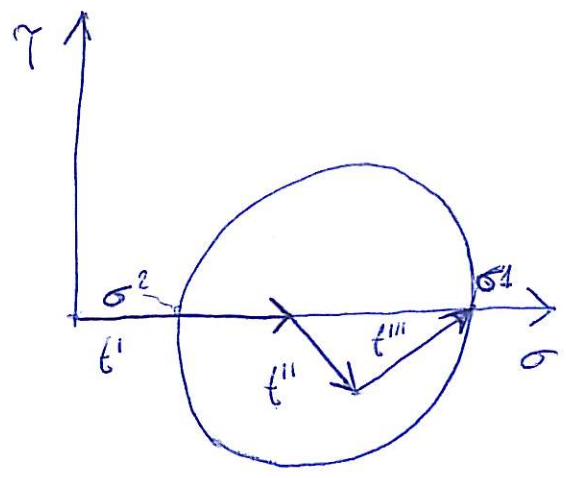
Il vettore t_n''' presenta componenti secondo x e y espresse da $\tau_{xy}''' \cdot \operatorname{sen}\alpha_x$, $\tau_{xy}''' \cdot \cos\alpha_x$. Ha modulo costante di valore $|\tau_{xy}|$ e nel riferimento (σ, τ) appare ruotato di $2\alpha_x - \dfrac{\pi}{2}$ rispetto alla direzione di $\vec{n}$.

Nel sistema (σ, τ) il punto rappresentativo $t = t' + t'' + t'''$ SI MUOVE SU UN CERCHIO avente centro sull'asse delle σ nel punto $(0 + t')$.

· I punti di intersezione di questo cerchio con l'asse σ corrispondono alle tensioni normali σ_1 e σ_2 rispettivamente massima e minima, non accompagnate da tensioni tangenziali. Le due particolari giaciture per le quali i vettori di tensione sono massimi e minimi sono tra loro perpendicolari.

Quindi, per uno stato di tensione piano, esistono due particolari giaciture tra loro ortogonali su cui sono presenti il minimo e il massimo dei vettori di tensione che sono presenti nelle sole componenti σ. Tali direzioni vengono dette DIREZIONI PRINCIPALI a cui corrispondono le tensioni principali

Quanto detto si può riassumere graficamente con:



Quindi per uno stato di tensione generale, esiste sempre almeno una terna di direzioni principali associate alle quali ci sono le tre tensioni principali.

STATO DI TENSIONE DI TIPO IDROSTATICO

Uno stato di tensione si dice idrostatico se è caratterizzato dalle sole componente $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, mentre $\tau_{i,j} = 0$ per $\forall i, j$.
Dall'annullarsi delle τ_{ij} si ricava il parallelismo di **n** e **t**; risulta inoltre: $|\mathbf{t}| = |\sigma|$

Si noti che sovrapponendo ad uno stato di tensione generico uno stato di tensione idrostatico non se ne alterano le direzioni principali in quanto si aggiungono solo tensioni normali, ma variando t', si provoca uno spostamento del centro della circonferenza sull'asse σ.
Infine uno stato di tensione idrostatico è caratteristico dei fluidi in quiete o in moto se il fluido è perfetto.

CERCHI DI MOHR

Con riferimento al generico punto A e alla generica retta che passa per A, una rappresentazione grafica dovuta a MOHR permette di conoscere attraverso la costruzione di un cerchio, la tensione normale e la componente di tensione tangenziale secondo la normale in a z, su uno qualsiasi degli elementi piani di sostegno z. L'intorno di un generico punto A appartenente ad un solido in equilibrio rispetto alla terna cartesiana principale $\{A, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$

Sulla generica giacitura il cui versore normale è $\vec{n}$, le componenti cartesiane del vettore tensione sono date da:

$$\begin{bmatrix} t_{n,1} \\ t_{n,2} \\ t_{n,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_{n1} = \sigma_1 n \\ t_{n2} = \sigma_2 n \\ t_{n3} = \sigma_3 n \end{cases}$$

La componente della tensione normale alla giacitura stessa è data da:

$$\sigma_N = [n_1, n_2, n_3] \cdot \begin{bmatrix} t_{n,1} \\ t_{n,2} \\ t_{n,3} \end{bmatrix} = [n]^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot [n] =$$

$$= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Si può trovare la componente tangenziale della stessa giacitura τ_N attraverso la relazione:

$$\sigma_N^2 + \tau_N^2 = t_{n,1}^2 + t_{n,2}^2 + t_{n,3}^2 = \sigma_1^2 \cdot n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

si ricorda che σ e τ sono le componenti della tensione quindi in qualche modo si ha $\sigma + \tau = t$ ne consegue $\sigma^2 + \tau^2 = t^2$

mg 56

Il Problema di de Saint Venant

Funziona con determinate ipotesi.

1) Le travi devono essere prismatiche (asse rettilineo e sezione costante), a sezione trasversale compatta, libere dai vincoli esterni e di materiale isotropo linearmente elastico.

2) Le forze esterne devono essere equilibrate, esclusivamente di superficie e applicate alle teste

Ricordando che:

Sforzo normale $\longrightarrow$ $N = \int_{\Sigma} \sigma_z \, dA$

Sforzo taglio $\longrightarrow$ $\begin{cases} T_x = \int_{\Sigma} \tau_{zx} \, dA \\ T_y = \int_{\Sigma} \tau_{zy} \, dA \end{cases}$

Momenti flettenti $\longrightarrow$ $\begin{cases} M_x = \int_{\Sigma} \sigma_z \cdot y \, dA \\ M_y = \int_{\Sigma} \sigma_z \cdot x \, dA \end{cases}$

Momenti torcenti $\longrightarrow$ $M_z = \int_{\Sigma} (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \, dA$

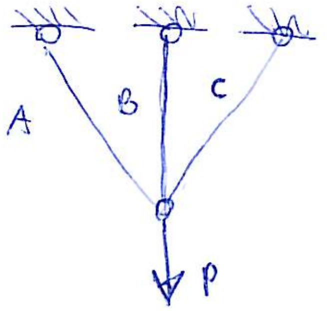
Dalle ipotesi sulle forze esterne seguono le seguenti proprietà

- Biassialità, al più, dello stato di tensione (cioè se si sceglie z come direzione delle generatrici $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$
- In corrispondenza al contorno della sezione trasversale la τ_z è tangente al contorno stesso.

Pag 58

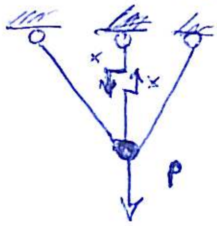
DOMANDA D'ESAME (MOLTO IMPORTANTE)

LA STRUTTURA E' UNA RETICOLARE IPERSTATICA:

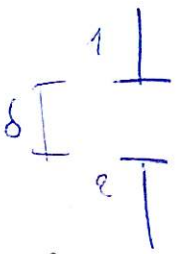


SI RISOLVE APPLICANDO IL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI.

Eliminiamo la condizione che crea iperstaticità creando virtualmente un taglio sull'asta B



LO SPOSTAMENTO RELATIVO DELLE DUE FACCE SEPARATE DAL TAGLIO DEVONO AVERE SPOSTAMENTO NULLO.



$$\delta_2 - \delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_{RELATIVO} = 0$$

EQUAZIONE DI CONGRUENZA CHE SI PUO' RISOLVERE CON IL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI.

IPOTESI DEL PROBLEMA

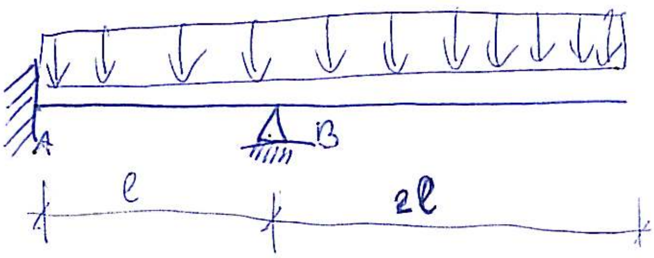
$\delta rel \overset{congruenza}{\Longleftrightarrow} \Delta l_i$ sul sistema reale

$F^* \overset{equivale}{\Longleftrightarrow} \delta_i^*$ ausiliario

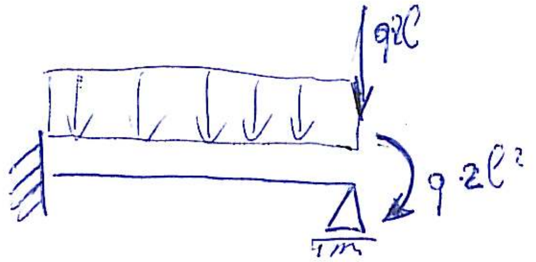
$F^* \delta rel = \sum_i$

DOMANDA D'ESAME

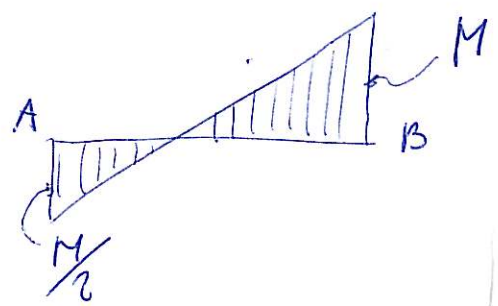
Determinare la reazione vincolare dell'appoggio B per la seguente struttura



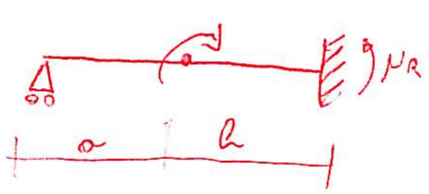
Risoluzione Possiamo eliminare la mensola ottenendo



La forza concentrata $2ql$ viene completamente assorbita dall'appoggio. La coppia $\boxed{M = 2ql^2}$ produce la seguente distribuzione di momenti



VEDI DISPENSA CROSS



$$\mu_R = -\frac{M a (2l-3a)}{l^2} + \frac{1}{2}\frac{M b (2l-3b)}{l^2}$$

Spostando la coppia ad un estremo si ha l'annullamento di un addendo

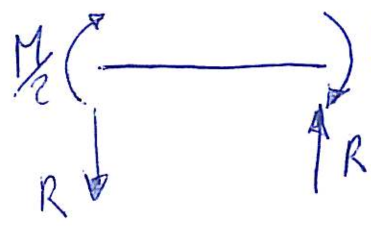
$$\mu_R = +\frac{1}{2}\frac{M b\,(2l-3b)}{l^2}$$

Data la coincidenza di l con b si ha:

$$\mu_R = \frac{1}{2} M b \frac{2l-3l}{l^2}$$

$$= \frac{1}{2} M \cancel{l} \frac{-\cancel{l}}{\cancel{l^2}} = \frac{1}{2} M$$

Ricaviamo le reazioni vincolari.



Preso A come polo

$R\cdot l = M + \frac{M}{2}$

da cui $R = \frac{M}{l} + \frac{M}{2l}$

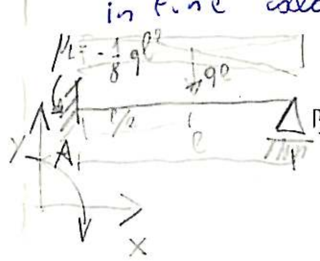
$$R = \frac{M}{l} + \frac{M}{2l} = \frac{3}{2}\frac{M}{l} = 3ql$$

siccome $M = 2ql^2$ sostituendo in

$\frac{3}{2}\frac{M}{l}$ si ha: $\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}ql^{\cancel{2}}}{\cancel{l}} = 3ql$

pag 60

in fine calcoliamo le reazioni dovute al carico ripartito:



$$R_A = \frac{ql}{2} + \frac{1}{8}ql = \frac{5}{8}ql$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - \frac{1}{8}ql = \frac{3}{8}ql$$

$R_A \cancel{l} = \frac{ql^{\cancel{2}}}{2} + \frac{1}{8}ql^{\cancel{2}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI IN A

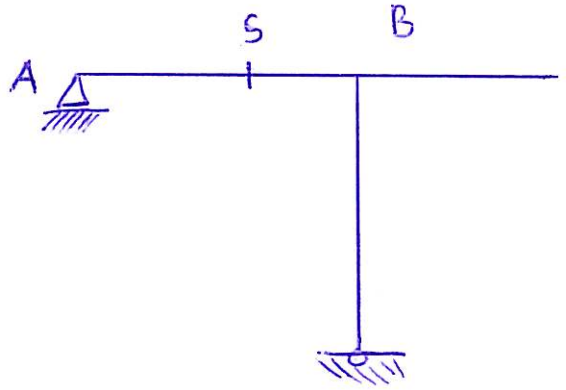
$R_B \cancel{l} = \frac{ql^{\cancel{2}}}{2} - \frac{1}{8}ql^{\cancel{2}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI IN B

Quindi la reazione vincolare complessiva dell'appoggio B vale

$$R_B = \underbrace{2ql}_{\text{CARICO concentr. della mensola}} + \underbrace{3ql}_{\text{carico dovuto al momento della mensola}} + \underbrace{\frac{3}{8}ql}_{\text{carico distribuito sul tratto interno}} = \frac{43}{8}ql$$

DOMANDA D'ESAME

tracciare la linea di influenza del momento flettente nella sezione S, nell'ipotesi di carichi verticali:



Promemoria per la teoria:

Siamo nell'ipotesi di carico in moto, le sollecitazioni (taglio, momento, sforzo normale) non saranno più note in tutte le sezioni ma solo in un'unica S, analizzata durante il moto, sulla struttura del carico stesso.
Una volta verificato che la struttura è fissa e isostatica si procede all'inserimento del corretto vincolo:

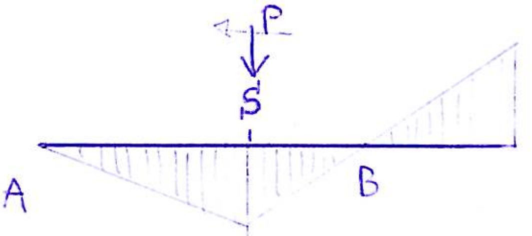
Cerniera → per ricerca linea influenza MOMENTO

Due carrelli contrapposti → per la linea di influenza del TAGLIO

Un pistoncino → per la linea di influenza dello sforzo NORMALE nel problema proposto bisogna eliminare il vincolo che impedisce la rotazione in S' e applicare poi una rotazione relativa.

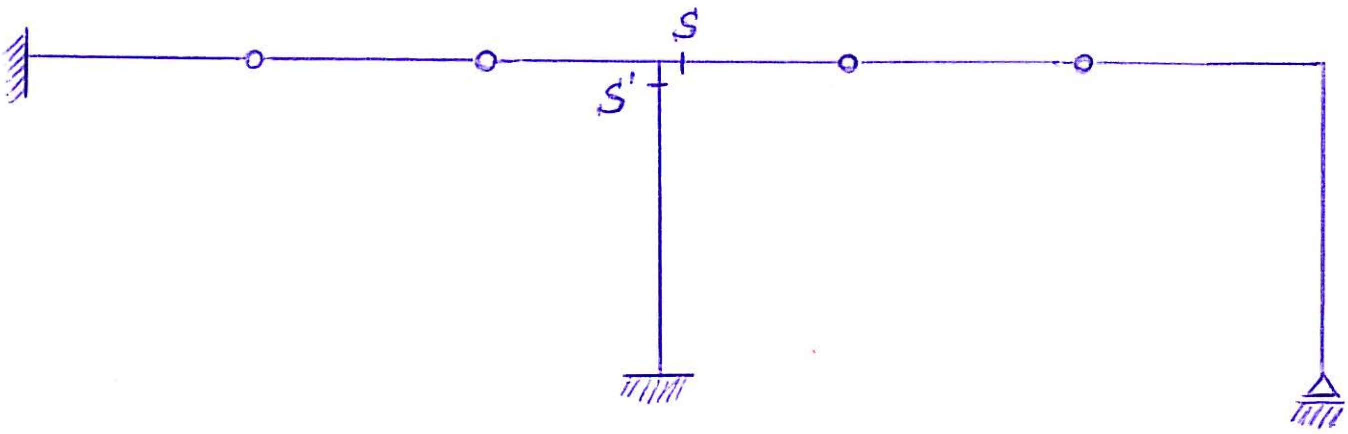
Nell'ipotesi di carichi verticali possiamo sostituire il piedritto con un appoggio semplice.

Quando P transita per S si ha il seguente diagramma del momento flettente

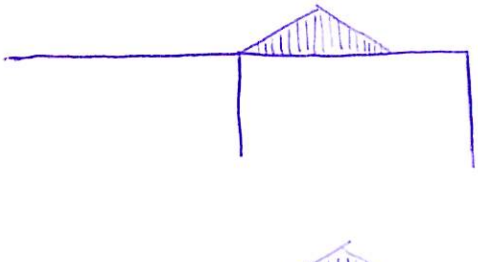


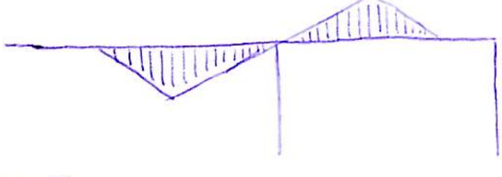
DOMANDA D'ESAME

TRACCIARE LE LINEE DI INFLUENZA DEL MOMENTO FLETTENTE NELLE SEZIONI S ED S'



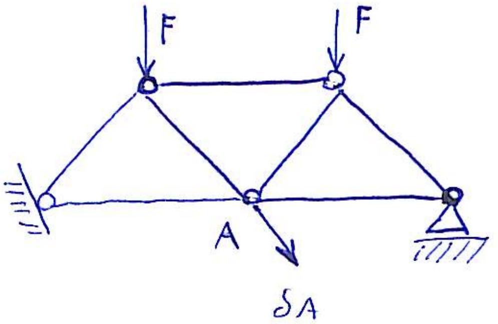
RISOLUZIONE Inseriamo una cerniera nella sezione considerata e disegniamo un moto rigido ottenendo così la linea di influenza:





APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI A STRUTTURE RETICOLARI ISOSTATICHE

Problema: calcolare le componenti di spostamento di un nodo in una data struttura reticolare isostatica.



Si consideri lo spostamento del punto A individuato dal vettore δA che per semplicità scomponiamo nelle due proiezioni lungo due qualsiasi rette passanti per il punto A.

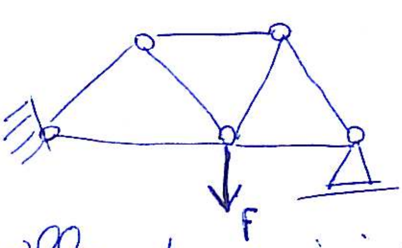
OVVIAMENTE NON VALE LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA.

Attraverso una doppia applicazione del teorema dei lavori virtuali riusciremo a determinare lo spostamento in A. ~~che~~

Si consideri lo stato ausiliovviario caricato da una forza fittizia di intensità arbitraria.

Di esso si ricavano facilmente le tensioni lungo le aste con uno qualsiasi dei metodi noti. Per esse varrà:

$$S_i^* = [\text{Sollecitazioni interne fittizie}] = \alpha_i F_i$$



Ritornando allo schema iniziale, si scelga come spostamento virtuale una delle due proiezioni di δA nel nostro caso quella verticale; noti gli S_i perché il sistema è isostatico ci si potrà collegare gli Δs_i utilizzando la relazione

$$\Delta s_i = \frac{S_i l_i}{\underbrace{R_M}_{\text{RIGIDEZZA}}} = S_i \rho_i$$

applicando il teorema dei lavori virtuali si ottiene

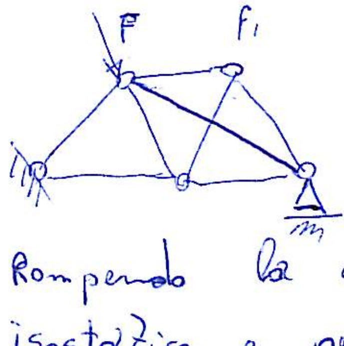
$$F^* \cdot \delta A = \sum S_i^* \cdot \Delta_{si}$$

$$F^* \cdot \delta A = \sum \alpha_i F^* \cdot \Delta_{si}$$

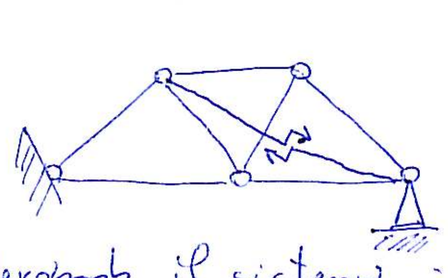
$$\delta A = \sum \alpha_i \Delta_{si}$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI A STRUTTURE RETICOLARI IPERSTATICHE

Premesso che in una struttura iperstatica ogni asta può essere soppressa fino renderla isostatica, per la risoluzione di questo sistema dobbiamo servirci di uno dei due metodi per la risoluzione di strutture iperstatiche.



Rompendo la continuità come in figura, riduco il sistema ad isostatico, e perciò risolvibile imponendo semplicemente che $\delta_{rel} = 0$ sull'asta spezzata.

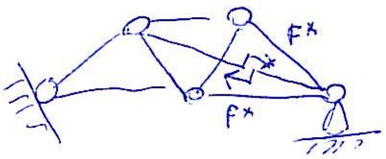


Considerando il sistema isostatico principale ausiliario posso ricavare gli sforzi in ogni asta, e troverò come nel caso precedente $S_i^* = [\text{sollecitazioni interne fittizie}] = \alpha_i F_i$

ritornando ora al sistema principale si può calcolare gli Δs_i

$$\Delta s_i = \sum_i N_i \rho_i$$

Dove gli N_i sono gli sforzi normali che sono dati dalla somma degli sforzi in seguito alle F_e, α $(S^{(0)})$ e quelli dovuti dalla forza interna X $(S^{(x)} = \alpha_i X)$.



perciò applicando il T.L.V.

$$F^* \cdot \delta_{rel} = F^* \cdot \sum_i \left(S^{(0)} + \alpha_i X\right) \cdot \alpha_i \cdot \rho_i$$

$$\delta_{rel} = 0 = \sum_i \left(S^{(0)} + \alpha_i X\right) \cdot \alpha_i \cdot \rho_i$$

$$X = -\frac{\sum_i \alpha \cdot S^{(0)} \cdot \rho_i}{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \rho_i}$$

ELASTICITÁ E TEOREMI ENERGETICI

Si sviluppa l'analisi su casi in cui c'è un legame lineare tra le sollecitazioni S_i e le corrispondenti deformazioni s_i.

Poiché per un generico elemento deformabile il lavoro di deformazione elastica nel passaggio da una configurazione di equilibrio ad un'altro, dipende solo dai valori iniziali e finali in quanto le sollecitazioni e deformazioni sono legate dalla legge elastica (qualsiasi), esiste una funzione potenziale ed il lavoro di deformazione elastica dipende può essere pensato come variazione del potenziale elastico del generico elemento deformabile.

Sia ϕ_i il potenziale elastico del generico elemento deformabile semplice e ϕ quello dell'intero sistema, possiamo scrivere:

$$\delta\phi = \sum_i \phi_i = \sum S_i \cdot \delta s_i$$

Riccorrendo al teorema dei lavori virtuali, in relazione ai sistemi di forze F_j e sollecitazioni S_i in equilibrio e di sistemi congruenti di spostamenti δu_j e di deformazioni δs_i, possiamo scrivere

$$\delta\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i S_i\, \delta s_i = T.L.V. = \sum_j F_j\, \delta u_j$$

Le forze elastiche si collegano ai potenziali elastici mediante la relazione

$$S_i = \frac{d\phi_i}{ds_i} = \frac{\partial \phi}{\partial s_i}$$

Si si ancora il livello zero allo stato naturale dell'elemento il suo potenziale elastico è misurato dall'area racchiusa tra la curva, l'asse delle ascisse e la retta parallela all'asse delle ordinate per il punto P relativo alle condizioni raggiunte.

In maniera del tutto analoga è possibile esprimere s_i in funzione di S_i cioè $s_i(S_i)$ e quindi anche gli incrementi $s_i\, dS_i$ costituiscono una funzione potenziale c_i detta potenziale complementare.

$$s_i = \frac{dc_i}{dS_i} = \frac{\delta C}{\delta S_i}$$

Si noti che avendo fissato l'origine degli assi nello stato naturale dell'elemento e in caso di elasticità lineare

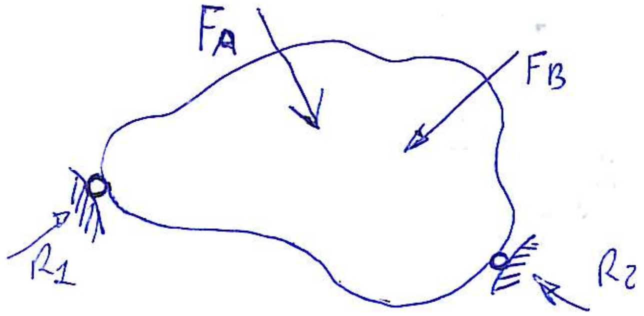
$$\phi_i = c_i$$

Per una trave deformabile

pag 68

METODO DELLE FORZE APPLICATO A RETICOLARI IPERSTATICHE (MOLTO IMPORTANTE)

È un caso particolare di applicazione del teorema dei lavori virtuali $L_e = L_i$.
Richiamandolo se ne possono vedere due forme:



Una prima può essere: ➡ dato un sistema di forze in equilibrio e di tensioni in equilibrio separatamente l'uno dall'altro, se si impone $L_e = L_i$ per ogni sistema di spostamenti s con le deformazioni corrispondenti nel senso della congruenza, le forze in equilibrio con le tensioni

$$F,\sigma \xleftrightarrow{L_e = L_i} \left.\begin{array}{l} s1,\ congr. \\ \Sigma 1,\ cong \end{array}\right\} \text{corrispondenti}$$

$$F,\sigma \xleftrightarrow{L_e = L_1} \left.\begin{array}{l} s2,\ congr. \\ \Sigma 2,\ congr. \end{array}\right\} \text{corrispondenti}$$

$$\Downarrow$$

F, σ equilibrate.

Una seconda forma può essere: ➡ Dato un sistema di spostamenti congruenti e di deformazioni congruenti, se si impone $L_e = L_i$ per ogni sistema di forze e tensioni equilibrate tra spostamenti e deformazioni sussiste corrispondenza

$$\text{corrispondenza} = \Sigma x = \frac{\delta s}{\delta x}$$

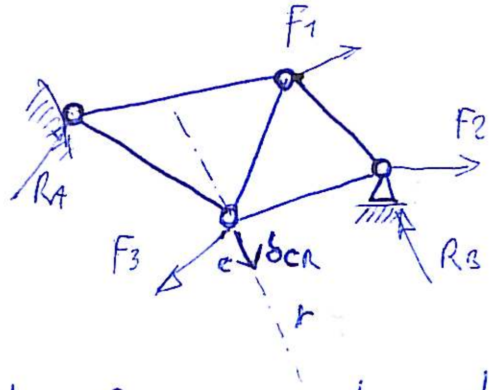
$$s,\Sigma \xleftrightarrow{L_e = L_i} \begin{array}{l} F1,\ equilibrate \\ \sigma 1,\ equilibrate \end{array}$$

$$s,\Sigma \longleftrightarrow \begin{array}{l} F2,\ equilibrate \\ \sigma 2,\ equilibrate \end{array}$$

$$\Downarrow$$

s, Σ
Congruenti corrispondenti

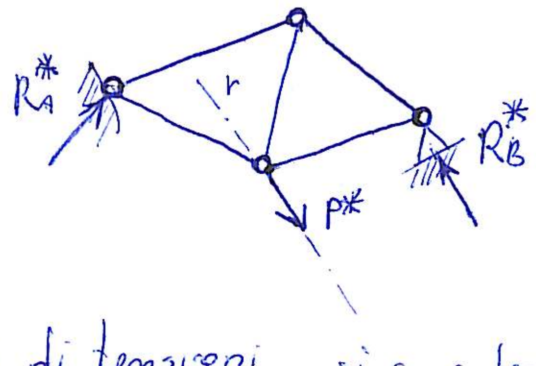
si trattano quindi quattro grandezze: forze F, tensioni σ, spostamenti Δ, deformazioni Σ



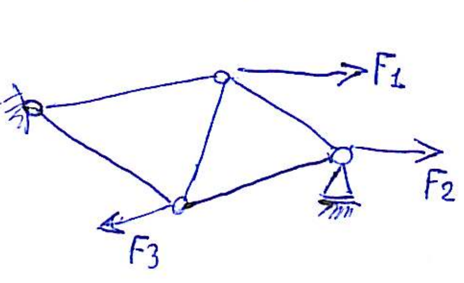
Dato un sistema di forze e spostamenti determinare δ_{CR}.
Poiché le tensioni sono sforzi normali, il teorema dei lavori virtuali è facilmente esprimibile e applicabile visto che

$$L_i = \sum_j S_j^* \cdot \Delta l_j$$

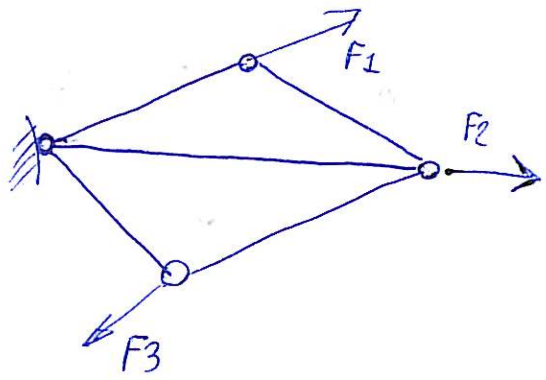
Infatti, per sistema di forze esterne, si considera una forza P^* nella direzione desiderata: se la struttura è isostatica esiste un sistema di forze che equilibria P^* (se fosse iperstatica infiniti)



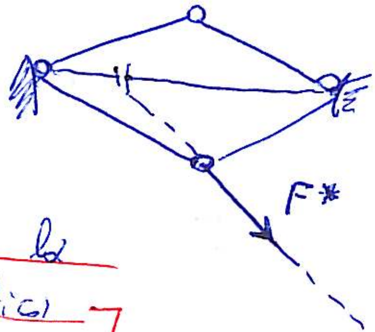
Per sistema di tensioni si considera proprio quello ottenuto da questa situazione; per spostamento quello lungo r; per deformazioni invece si prenderanno quelle reali $\Delta l_i = \dfrac{S_i \cdot l_i}{E \cdot A}$ ← sezioni travi ← modulo elastico



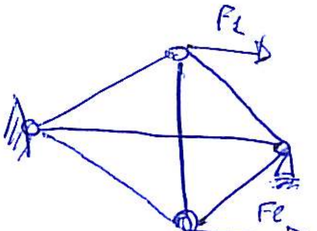
Nel caso di una reticolare iperstatica



si considera una forza F^* nella direzione dello spostamento mentre le tensioni da utilizzare dovrebbero essere quelle ottenute dall'iperstatica stessa. MA è sufficiente un sistema di forze e di tensioni che siano equilibrati.
Nulla costa togliere l'asta iperstatica stessa, mettere gli sforzi con la relazione di congruenza e lavorare con l'isostatica ottenuta.

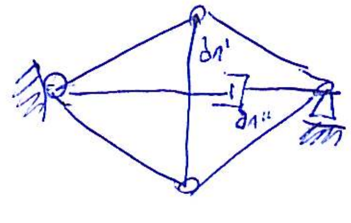


Per esempio, data la struttura iperstatica



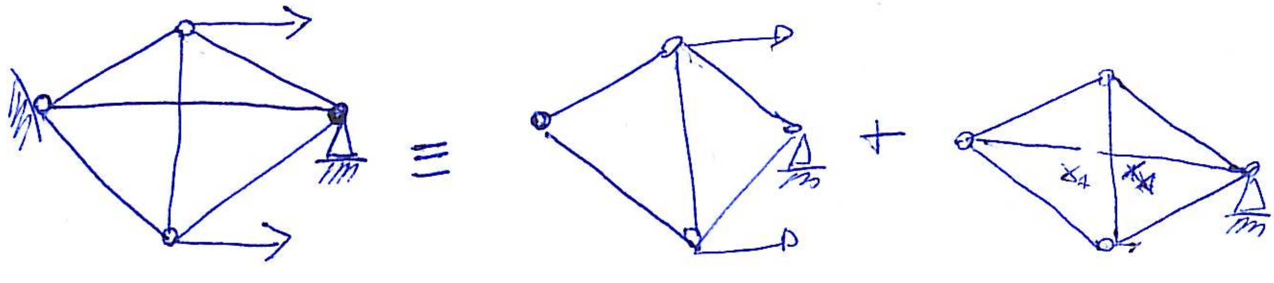
DETERMINARE GLI SFORZI

si esegue un taglio sull'asta A (come se ci fosse un vincolo pistoncino), si mette lo sforzo X_A comune ai lembi tagliati, con la relazione di congruenza (ecco il metodo delle forze) $\delta A' = \delta_A''$



Per sistemi di forze si considerano sempre sistemi fittizi lungo il taglio, mentre per gli spostamenti $\delta_{A'}$ e δ_A'' lungo il taglio

Per le deformazioni si considerano quelle della struttura reale come se fosse composta, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti da:



Poiché X_A è l'incognita, si imposta la proporzione

$$\frac{S_J^{(a)}}{S_J^{(a*)}} = \frac{X_A}{S_A^*}$$

dove S_A^* è una sollecitazione arbitraria a cui corrispondono le tensioni S_J^*. Supponendola unitaria si può ottenere dalla precedente relazione:

$$S_J^{(A)} = \frac{X_A \cdot S_J^{(A*)}}{1} = X_A \cdot S_J^{(A*)}$$

allora applicare il principio di sovrapposizione degli effetti diventa

$$S_{J\,reale} = S_J^{(0)} + S_J^{(a)} = S_J^{(0)} + X_A\, S_J^{(a*)}$$

Ora applicando il teorema dei lavori virtuali si ha:

$$\underbrace{S_A^{*} \cdot (\delta_{A'} - \delta_{A''})}_{Le} = \sum_J S_J^{(a^*)} \cdot \frac{S_{J\,reale} \cdot l_J}{E \cdot A}$$

Di solito sono dati del problema.

modulo di elasticità

sezione

Con $\delta_{A'} - \delta_{A''} = 0$ imposta dalla congruenza per il metodo delle forze.

Con $\rho_J = \dfrac{l_J}{EA_J}$ e supponendo $S_A^{*} = 1$, esplicitando $S_{J,reale}$

si ottiene

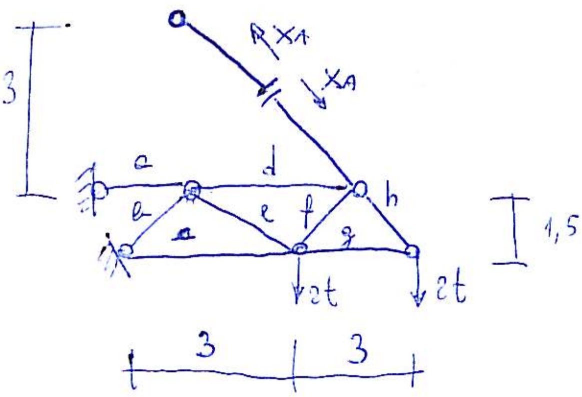
$$\sum_J \rho_J \frac{S_J^{(0)} \cdot S_J^{(a^*)}}{S_A^{*}(=1)} + X_A \cdot \sum_J \frac{\rho_J \cdot S_J^{(a^*)2}}{S_A^{*2}(=1)} = 0$$

Da cui $X_A = - \dfrac{\sum_J \rho_J \cdot S_J^{(0)} \cdot S_J^{(a^*)}}{\sum_J \rho_J \cdot S_J^{(a^*)2}}$ che ~~dà~~ la possibilità di determinare tutti gli sforzi delle aste mediante $S_{J\,reale} = S_J^{(0)} + X_A \cdot S_J^{(a^*)}$

Quindi alla fine dello studio si avranno due sottocasi: l'isostatica senza l'asta tagliata sollecitata dal carico assegnato, l'isostatica sollecitata dagli sforzi dell'asta pensati per comodità unitari.

Nella pagina successiva c'è un esercizio di esempio in cui si applica il metodo delle forze.

ESERCIZIO STUDIARE LA STRUTTURA CON IL METODO DELLE FORZE



MODULO DI ELASTICITÀ LINEARE

$E = 2{,}1 \cdot 10^6\ Kg/cm^2$

A aste a, c, d, i $= 3\ cm^2$

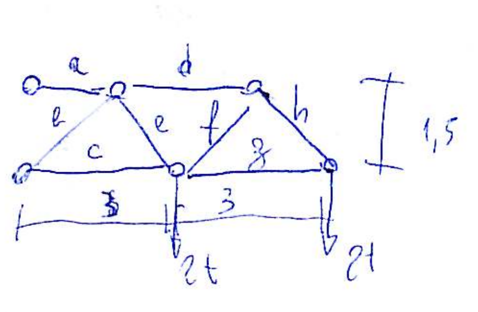
A aste b, e, f $= 4\ cm^2$

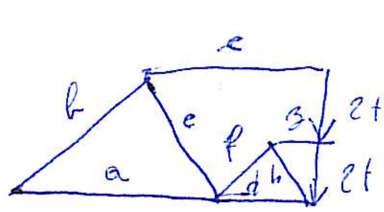
A asta g $= 3\ cm^2$

A asta h $= 21\ cm^2$

SEZIONI

Si taglia l'asta che genera l'iperstaticità (i), si impone l'equazione di congruenza $\delta A' = \delta A''$, si studiano le due strutture isostatiche (due perché $i = 1$, se fosse stato $i = n$, se ne sarebbero studiate $n+1$); la prima da con il metodo del cremona

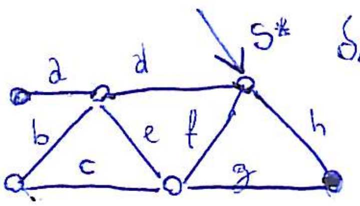




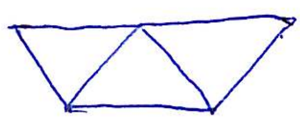
$S_a^{(0)} = 12000\ Kg$ $^{(0)} = -5656\ Kg$ $S_c^{(0)} = -8000\ Kg$ $S_d^{(0)} = 4000\ Kg$

$S_e^{(0)} = 5656\ Kg$ $S_f^{(0)} = -2828\ Kg$ $S_g^{(0)} = -2000\ Kg$ $S_h^{(0)} = 2828\ Kg$

La seconda con lo stesso metodo



$\delta A' = \delta A''$



$S_a^* = -2.49\ Kg$ $S_b^* = 0{,}78\ Kg$ $S_c^* = 1.11\ Kg$ $S_d^* = -1{,}39\ Kg$ $S_e^* = -0{,}78\ Kg$

$S_f^* = 0{,}78\ Kg$ $S_g^* = S_h^* = 0$ $S_i^* = 1\ Kg$

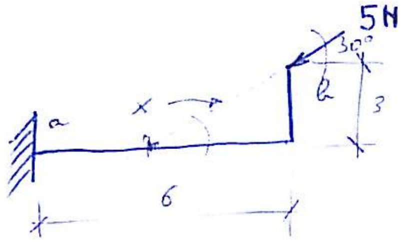
così facendo si determina un $X_1 = - \frac{3257565}{904} = 3603,501$ kg

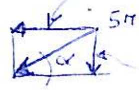
e da questo poi si dovranno ricavare gli sforzi reali.

Per altri esempi si veda più avanti.

RIPASSO DELLE ISOSTATICHE

Tracciare M, N, T della struttura:

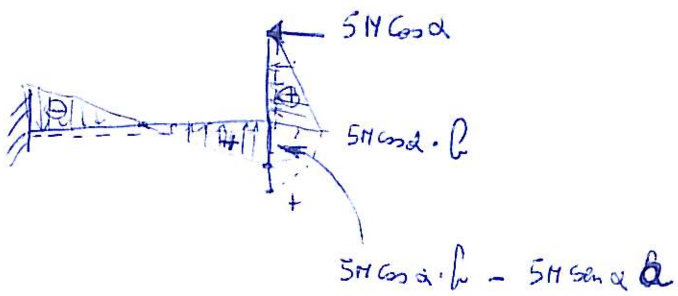




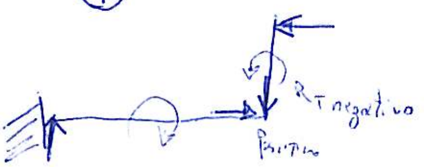
$x \sin 30 = 3$

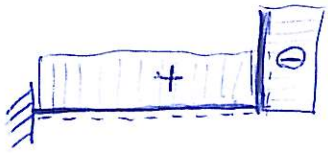
$x \cos 30$

M



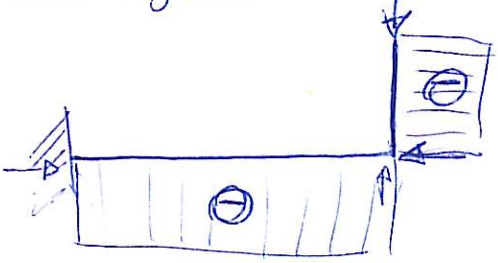
T



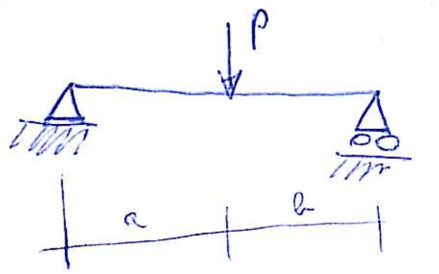


sforzi normali: Si intenderà positivo N se tira, si intenderà negativo se comprime l'asta in esame.

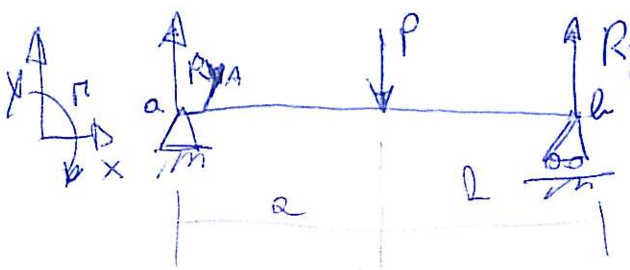
Le aste sono tutte compresse. ~~se ...~~ lo sforzo normale è positivo se disegnato sopra, negativo se dalla parte delle fibre segnate



STRUTTURA CON CERNIERA E CARRELLO



Si scrive un sistema che rappresenta l'equazioni cardinali della statica



Equilibrio dei momenti in a

$$\sum M_a = 0 \quad -R_{yB}\cdot(a+b) + Pa = 0$$

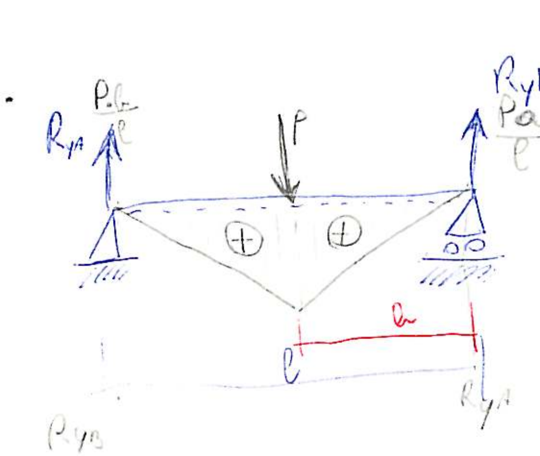
$$\sum M_b = 0 \quad R_{ya}\cdot(a+b) - Pb = 0$$

Trovo le reazioni vincolari: posta $(a+b) = l$

$$R_{ya} = \frac{P\cdot b}{l} \qquad R_{yB} = \frac{-P\cdot a}{+l}$$

Sono entrambi positivi rispetto alla direzione fissata y

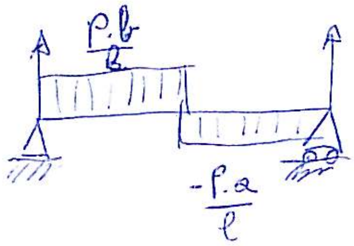
Ora applico il principio di sovrapposizione sulle due reazioni



il momento si annulla agli estremi perché ci sono due cerniere.
Il valore massimo del momento si trova sotto il carico e vale

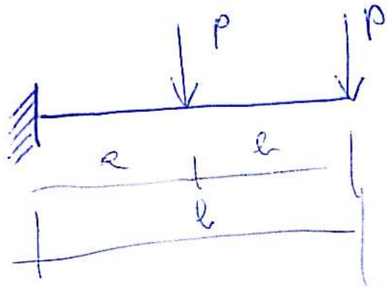
$$R_{yB}\cdot b = \frac{P\cdot a}{l}\cdot b = \frac{Pab}{l}$$

I TAGLI sono positivi se inducono momento orario e negativi se antiorario. I positivi si disegnano sopra

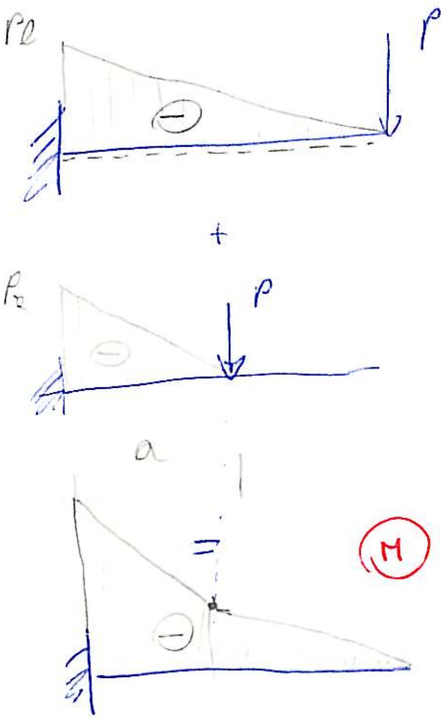


La struttura non è sottoposta a sollecitazioni Normali.

struttura a mensola

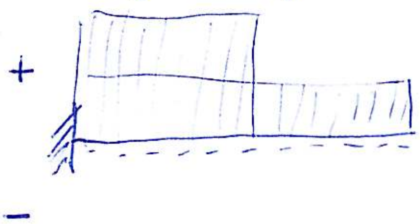


Per i momenti si applica il principio di sovrapposizione.

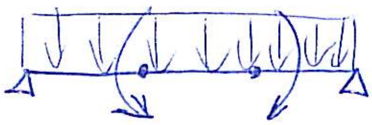


* si nota che un doppio carico concentrato comporta una differenza di pendenza.

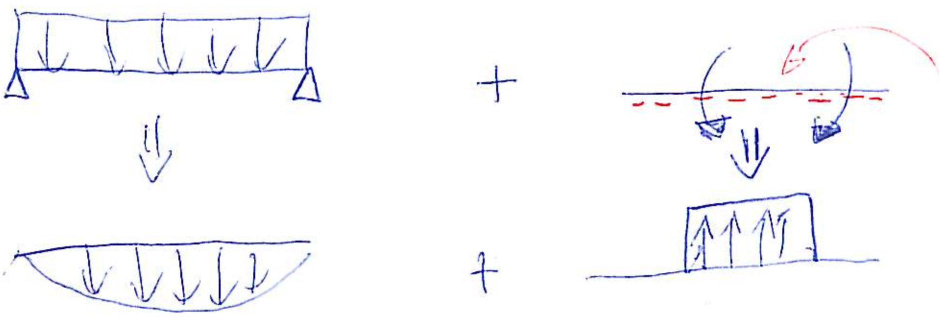
* Per i tagli si nota che hanno lo stesso segno ma moduli diversi.
entrambi inducono momento positivo quindi sono positivo.
il diagramma del taglio presenta una discontinuità grazie al p.s.e.



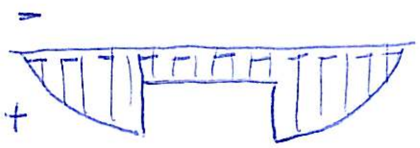
STRUTTURA CON CARICO RIPARTITO PIÙ COPPIA CHE TENDE FIBRE SUPERIORI



SICCOME SIAMO IN PRESENZA DI UNA ISOSTATICA POSSIAMO APPLICARE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

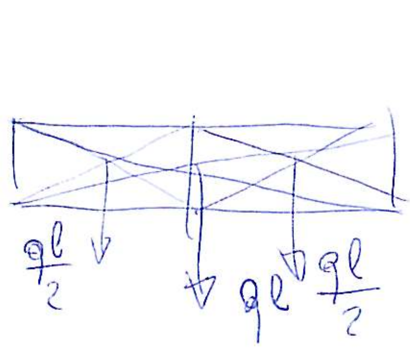


IL DIAGRAMMA COMPLESSIVO È

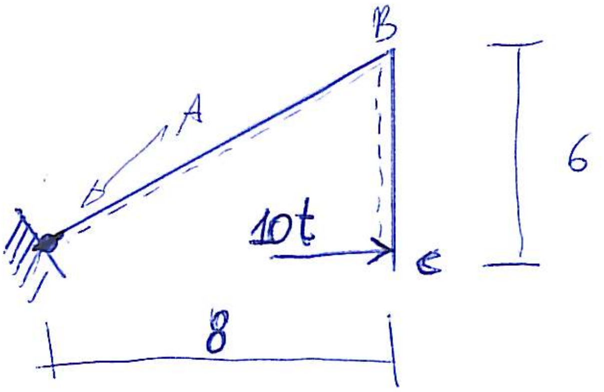


Solo ai fini del calcolo del modulo (quindi al fine dell'equilibrio) ma non della stabilità) è possibile sostituire il carico Q con un carico P concentrato nel baricentro

per cui in mezzeria si ha: $M = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q \cdot l^2}{8}$

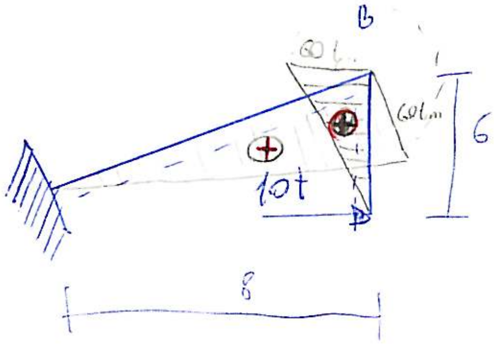


STRUTTURA ISOSTATICA



TRACCIARE M, N, T

Soluzione:



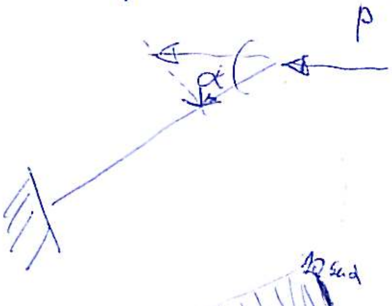
* il momento in B vale $10_t \cdot 6_m = 60$ t·m che tende le fibre inferiori quindi è positivo

* la saldatura trasmette completamente il momento

Per tracciare N e T bisogna trovare le componenti del carico applicato. Per l'asta verticale si ha:

inducono un momento antiorario e quindi negativo $\boxed{T = -10\,t}$

Per l'asta obliqua si ha:

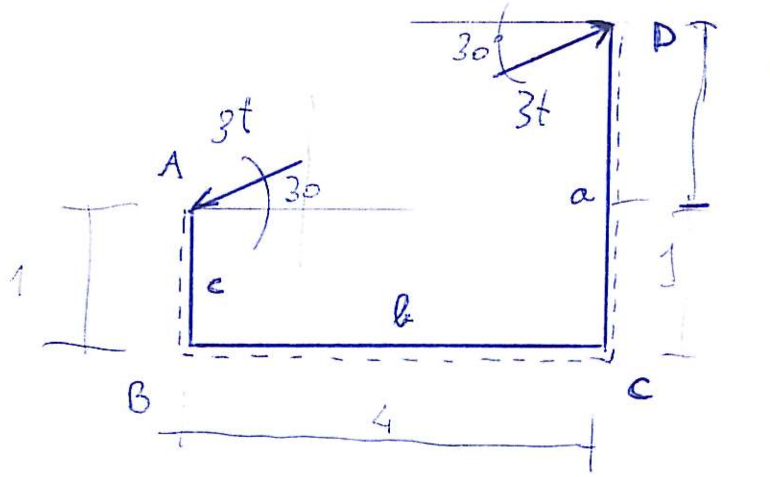


$$\begin{cases} P\cos\alpha = N \\ P\operatorname{sen}\alpha = T \end{cases}$$

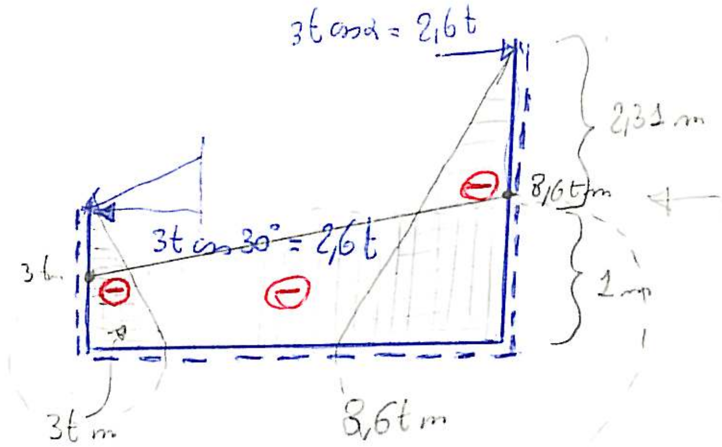
Per i carichi normali si vede che l'asta verticale è scarica mentre l'obliqua è soggetta a $10\cos\alpha$ in compressione

$10\operatorname{sen}\alpha = T$ che induce un momento orario e quindi positivo (disegno sopra)

Struttura semplicemente appoggiata



tracciare M, N, T,



$l\cos\alpha = 4$ $\quad l = \frac{4}{\cos\alpha}$

$X = l\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow X = \frac{4}{\cos\alpha}\cdot\text{sen}\,\alpha$

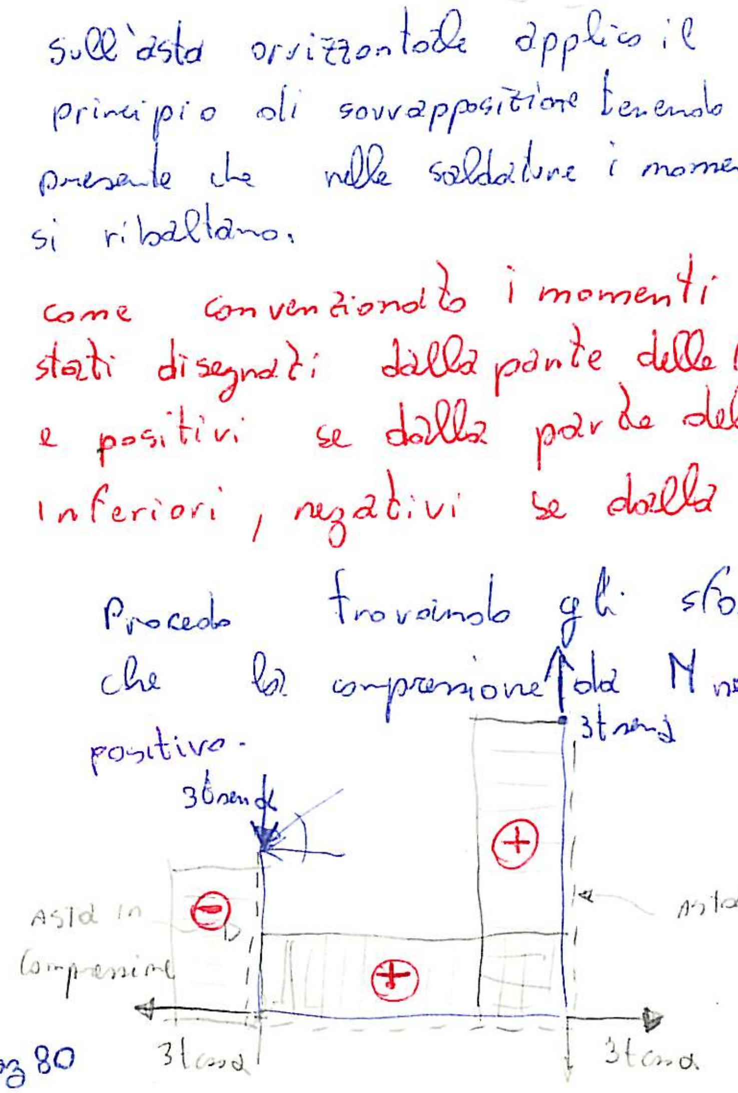
$X = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad X = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{4}{1{,}73} = 2{,}31\ m$

sull'asta orizzontale applico il principio di sovrapposizione tenendo presente che nelle saldature i momenti si ribaltano.

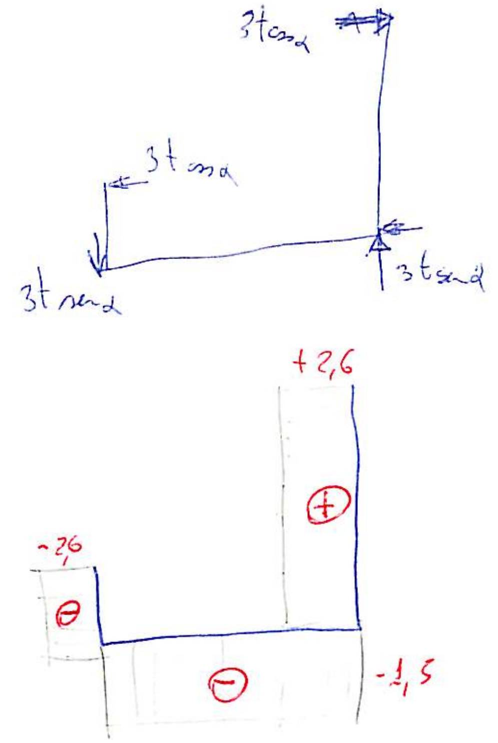
come convenzione i momenti sono stati disegnati dalla parte delle fibre tese e positivi se dalla parte delle fibre inferiori, negativi se dalla parte opposta.

Procedo trovando gli sforzi normali tenendo presente che la compressione da N negativo, mentre la trazione da N positivo.



si disegna positivo dalla parte delle fibre tese (rispetto a M)

IL DIAGRAMMA DEL TAGLIO RISULTA GIÀ DETERMINATO

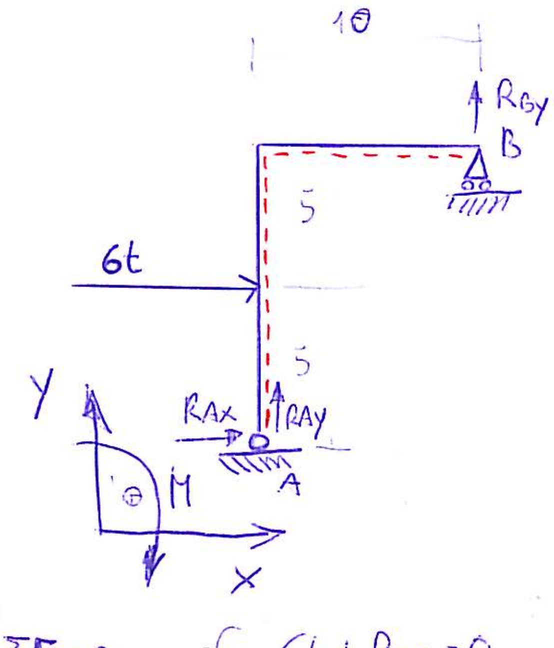


T che inducono momento orario sono positivi e li disegno dalla parte delle fibre tese, mentre

T che inducono momento antiorario sono negativi e li disegno dalla parte opposta.

RIPASSO DI M, N, T

TRACCIARE M, N, T PER LA STRUTTURA:



* QUESTO È UN TIPICO caso nel quale si giunge alla soluzione studiando le reazioni vincolari.

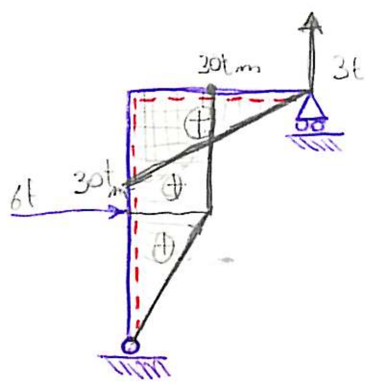
* Le reazioni vincolari si studiano scrivendo le equazioni cardinali della statica.

* si procede fissando un sistema di riferimento che dia i versi positivi per forze e momenti

* Prendo A come polo per i momenti

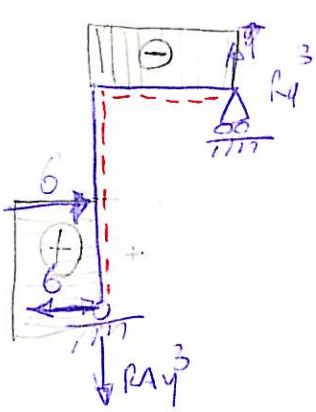
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t + R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} = 0 \\ -R_{By} \cdot 10 + 6 \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ax} = -6t \\ -R_{By} = -\dfrac{30}{10} \Rightarrow R_{By} = 3t \\ R_{Ay} = -3t \end{cases}$$

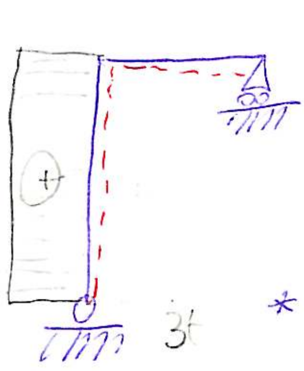


Il momento si scrive dalla parte delle fibre tese ed è positivo se concorde con le fibre segnate

T



N

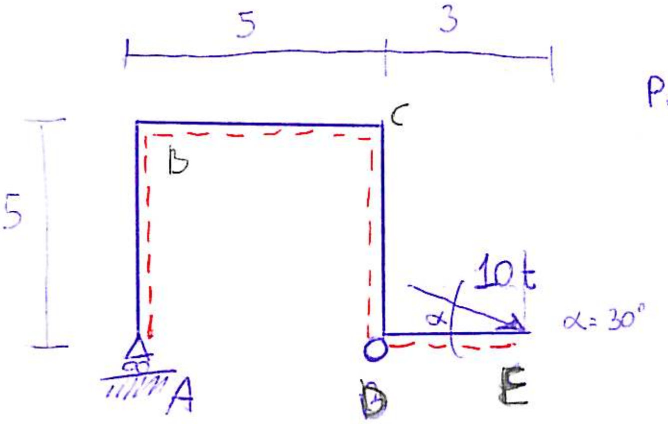


L'asta verticale è in trazione e vale 3t.

* Uno sforzo normale è positivo se di trazione e negativo se di ~~compressione~~ compressione.

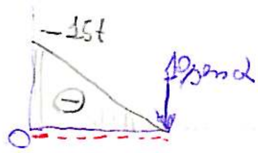
* Gli sforzi normali positivi si segnano dalla parte ~~della fibra tesa~~ ~~del momento~~. sopra della trave

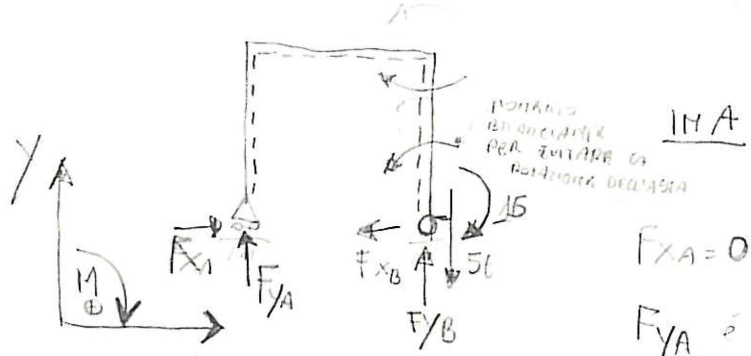
STUDIARE LA STRUTTURA:



Procediamo eliminando l'appendice isostatica.

DE



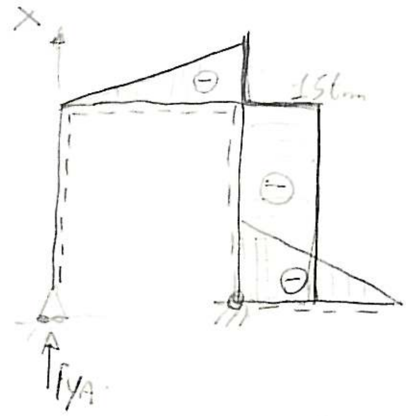


IMA

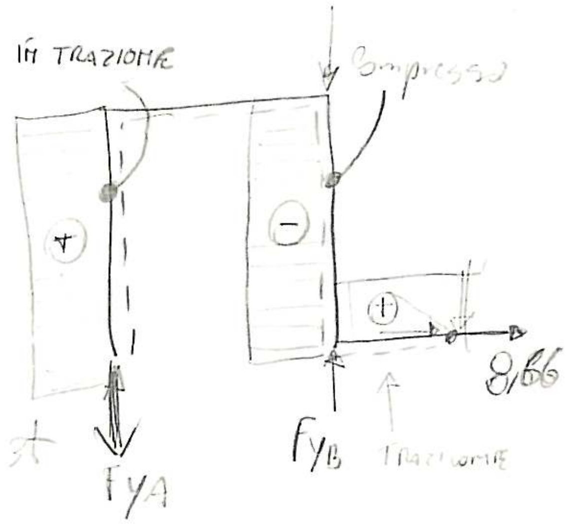
$F_{XA} = 0$ PER IL TIPO DI VINCOLO

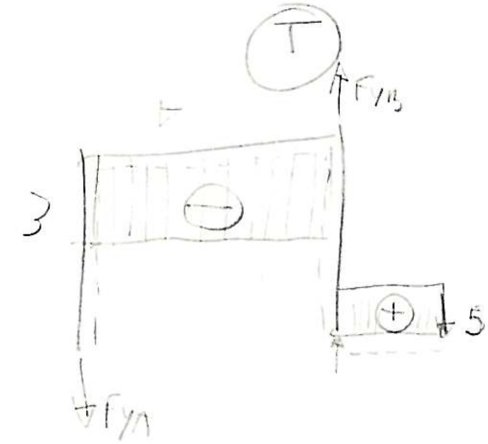
F_{YA} è l'unica forza presente

Quindi l'asta verticale sopra al nodo A non va soggetta a momento.

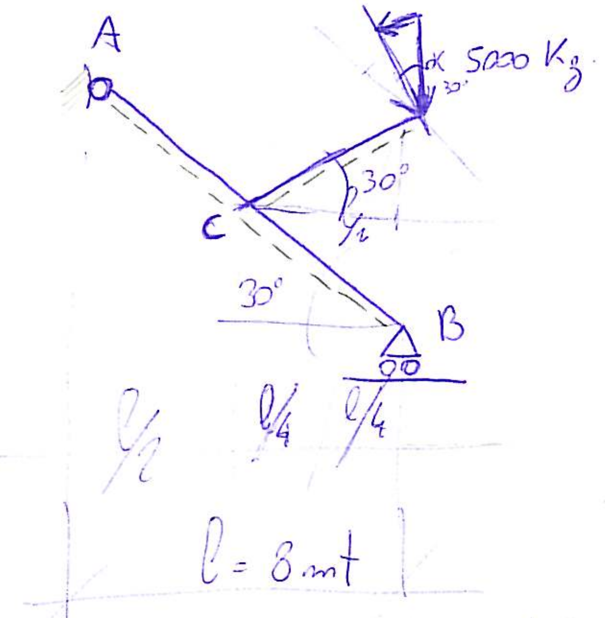


$F_{YA} \cdot 5_m = 15_{t\,m}$ $\quad F_{YA} = \frac{15}{5}$ $\quad \Rightarrow \vec{F_Y} = 3$





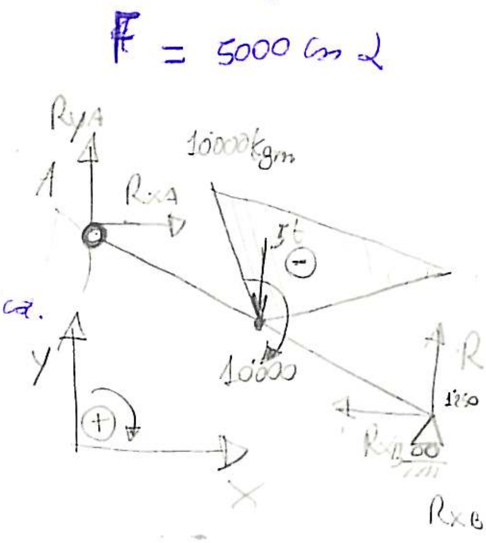
STUDIARE LA STRUTTURA: e tracciare M, N, T,



comincio eliminando l'appendice isostatica

$5000 \cdot \frac{l}{4} = M \Rightarrow M = 10000 \, Kg$

$F = 5000 \, Kg \, \cdot 2$



se fatto il nodo in B $R_{yA} \cdot 8 + 10000 = 0$

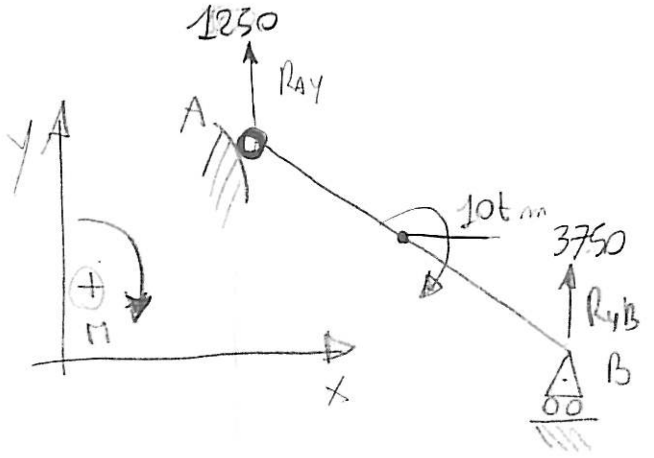
$R_{xB} = 0$ perché è presente un grado di libertà in quella direzione

scrivo le equazioni cardinali della statica.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & R_{xA} - R_{xB} = 0 \Rightarrow R_{xA} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & R_{Ay} + R_{yB} - 5t = 0 \\ \Sigma M_A = 0 & 10000 \, Kg_m + 5000 \, Kg \cdot 4m - R_{yB} \cdot 8 = 0 \end{cases}$$

(R_{xB} è nullo)

da cui $R_{yB} = 3750 \, Kg$



SE FACCIO POLO SU A L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI MI DA:

$$10tm - R_{yB} \cdot 8 = 0$$

$$R_{yB} = \frac{10}{8} = 1'250$$

IL TESTO FORSE HA INVERTITO LE REAZIONI IN A E B.

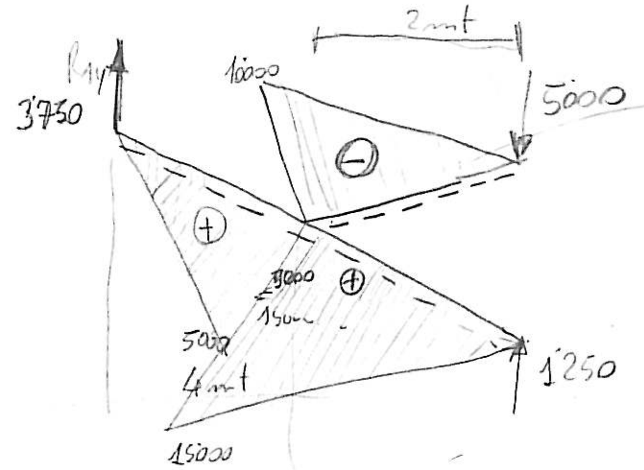
$$5000 - 1250 = 3750$$

SE VOLESSI FARE POLO IN B

$$R_{Ay} \cdot 8 + 10tm = 0$$

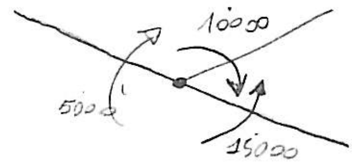
$$R_{Ay} = -\frac{10\,tm}{8}$$

ORA CONSIDERIAMO LA STRUTTURA COME SE COMPOSTA DA TRE MENSOLE INCASTRATE IN "C"

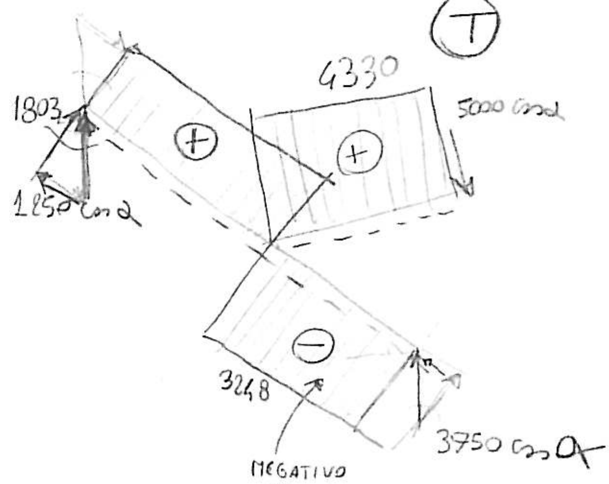


NEGATIVO PERCHÉ TENDE LE FIBRE SOPRA E SEMPRE QUELLE SEGNATE
LO SCRIVO DALLA PARTE DELLA FIBRA TESA.

AFFINCHÉ IL NODO C STIA FERMO CI DEVE ESSERE EQUILIBRIO DEI MOMENTI



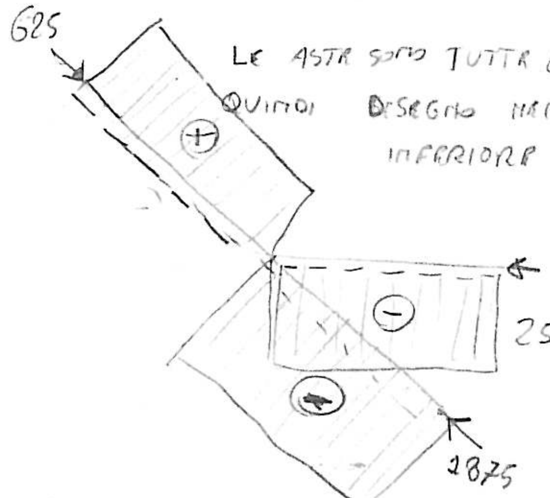
Per il taglio trovo



NEGATIVO PERCHÉ ASSOCIATO AD UN MOMENTO ANTIORARIO

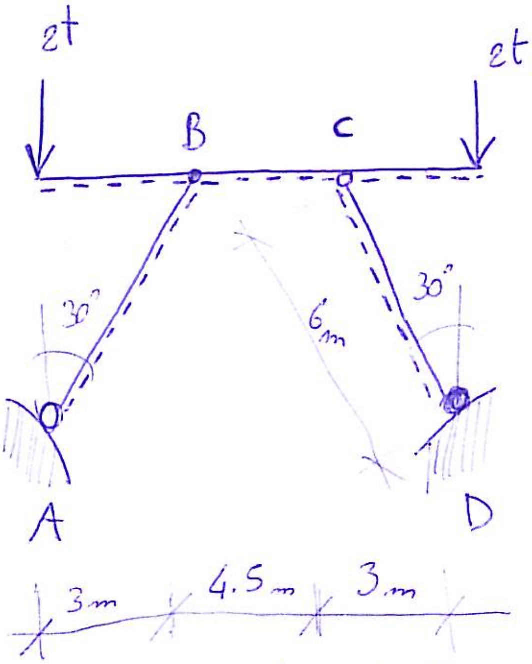
PER LO SFORZO NORMALE

LE ASTE SONO TUTTE COMPRESSE QUINDI DISEGNO NEL LATO INFERIORE



ARCO A TRE CERNIERE

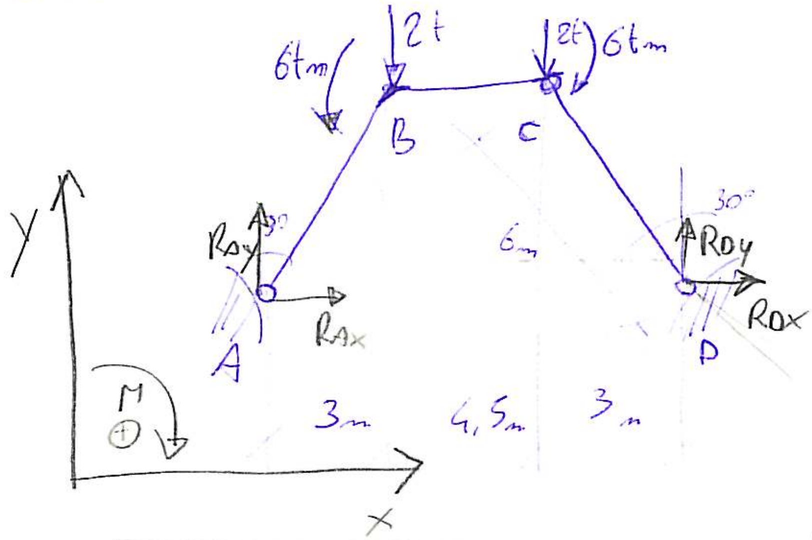
L'arco a tre cerniere è un classico esempio di struttura isostatica.



Come al solito si inizia eliminando le appendici isostatiche,

Poi si scrivono le equazioni cardinali della statica.

ATTENZIONE Su questa struttura è presente una biella !!!
Sulle bielle si possono trasmettere solo sollecitazioni assiali.



Preso A come Polo:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Dx} = 0 \\ R_{Ay} + R_{Dy} - 2t - 2t = 0 \\ 2t \cdot 3_m + 2t \cdot 7{,}5_m - R_{Dy} \cdot 10{,}5_m + 6t_m - 6t_m = 0 \end{cases}$$

Equilibrio dei momenti con A usato come polo

$R_{Ax} = -R_{Dx}$

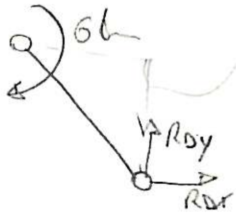
sostituisco R_{Dy} ⇒ $R_{Ay} + 2 - 2 - 2 = 0$ $\boxed{R_{Ay} = 2}$

$+R_{Dy} \cdot 10{,}5 = 6t_m + 15t_m$

$R_{Dy} = +\frac{21}{10{,}5}$ ⇒ $\boxed{R_{Dy} = +2}$

$\boxed{\text{Anche } R_{Ay} = +2}$

ORA DEVO TROVARE R_{Dx} (E' NECESSARIO TROVARE I MOMENTI NELL'ASTA $\overline{CD}$.

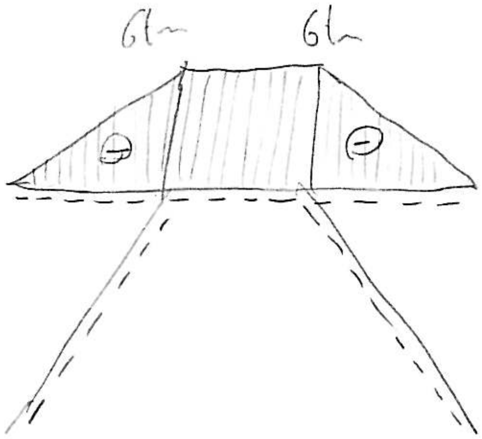


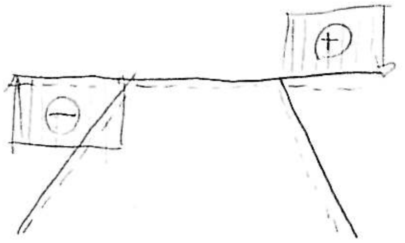
$6 \cos\alpha = 5{,}2$

$6t_m + R_{Dx} \cdot 5{,}2 = 0$

da cui $R_{Dx} = 1{,}155$ ⇒ anche R_{Ax}

Posso tracciare ora il diagramma di M

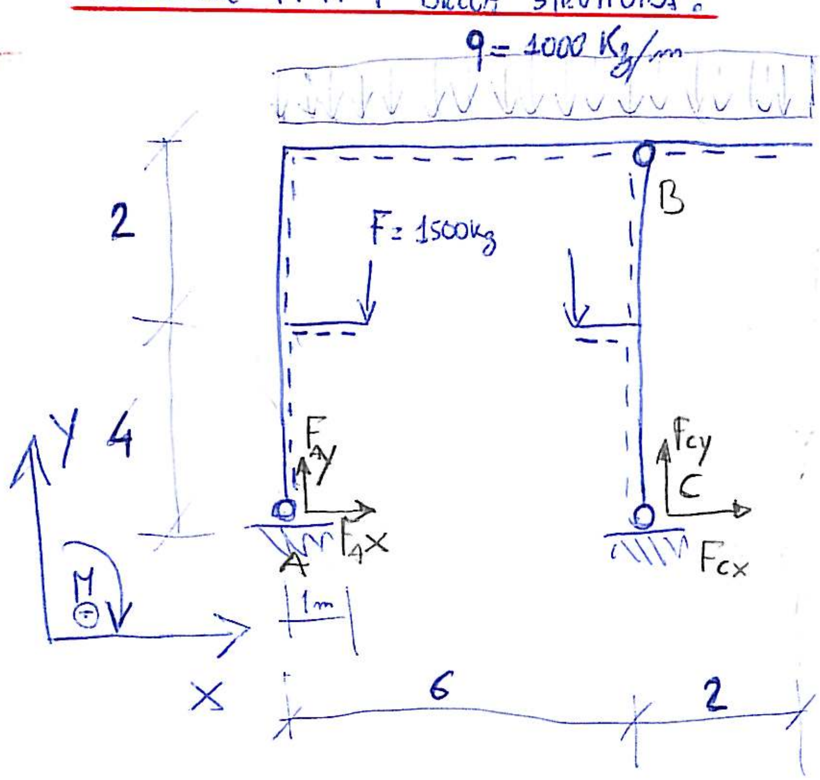




T

N

TRACCIARE M N T DELLA STRUTTURA:



È una variante di arco a tre cerniere e quindi è isostatico.

Per trovare M N e T devo conoscere le reazioni al suolo, devo cioè impostare le equazioni cardinali della statica.

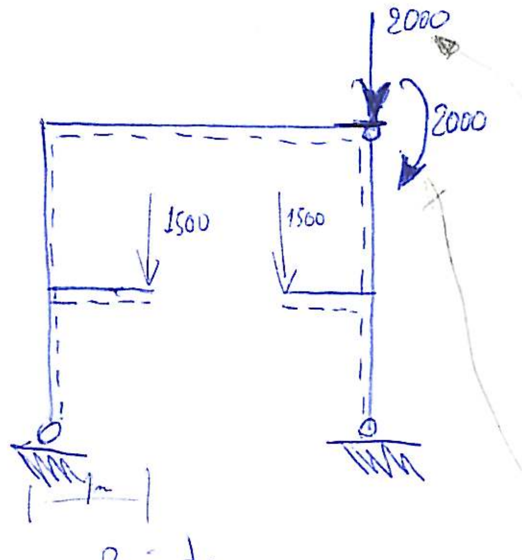
1) fisso un sistema di riferimento.

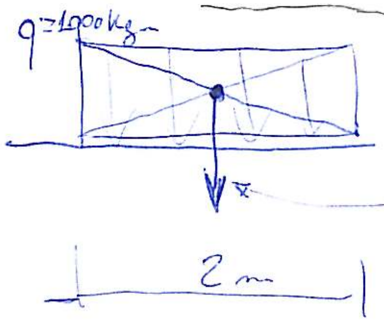
2) Elimino le appendici statiche sostituendole nel punto di incastro con il loro effetto

3) disegno le reazioni nei vincoli.

4) tolgo le appendici isostatiche.

Per il carico distribuito si procede effettuando la concentrazione nel baricentro:



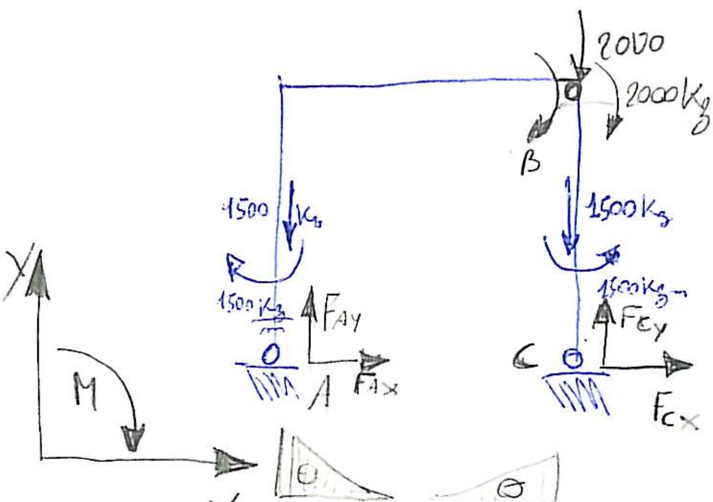


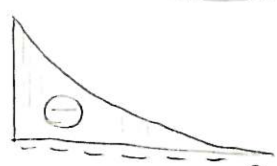
$1000 \cdot 2 = 2000$ Kg

Poi trovo il momento della forza concentrata

$2000_{Kg} \cdot 1_{mt} = 2000 \ Kg_m$

tolgo le mensole interne



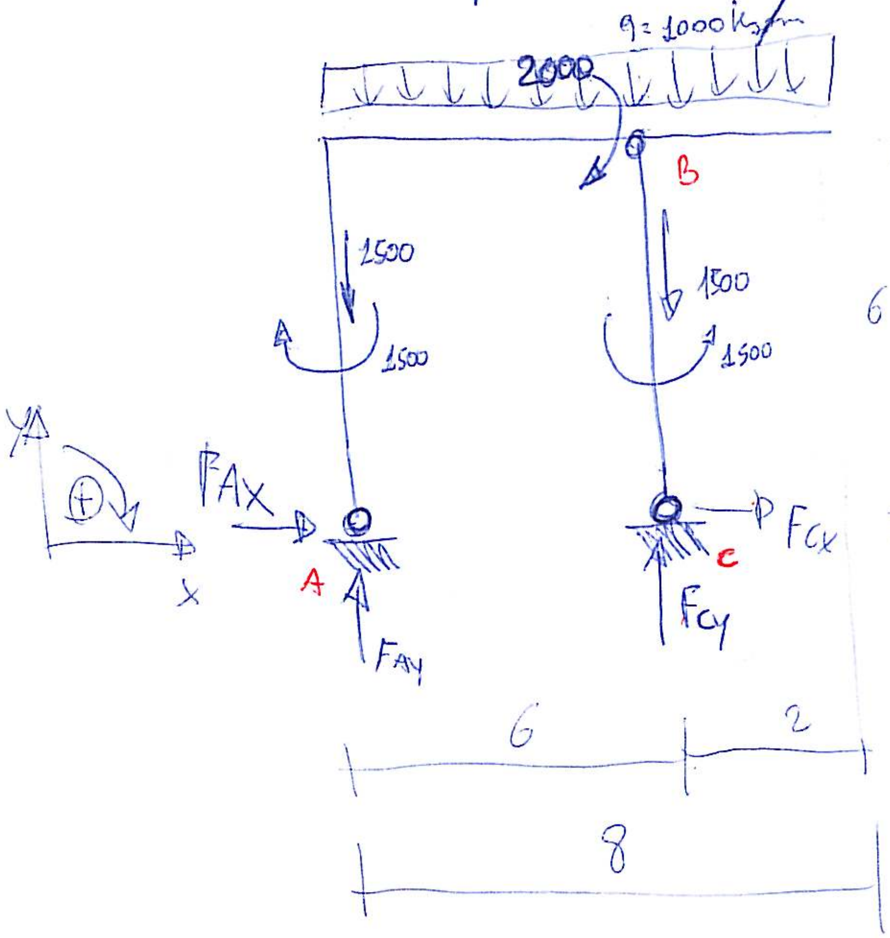


EQUAZIONI DELLA STATICA

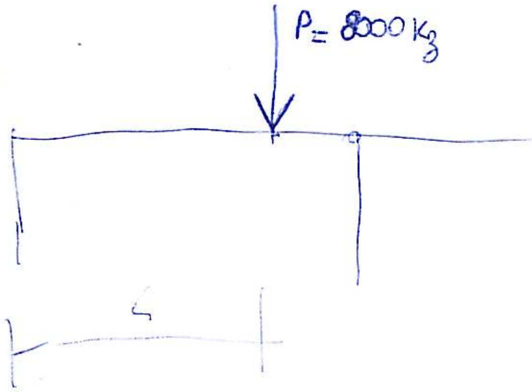
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

$F_{Ay} + F_{Cy} - 1500 - 1500 - 2000 = 0$

Prendiamo A come polo e equilibriamo i momenti



il carico viene concentrato nella mezzeria di tutta l'asta con la mensola completa, equivale cioè a una forza concentrata P ad una distanza di 4 mt dal polo A



L'equilibrio dei momenti rispetto al polo A diventa (orientato il sistema per le equazioni cardinali verso l'alto) diventa

$$-8000\,Kg \times 4m - 1500\,Kg \times 6m + F_{CY} \times 6m = 0$$

da cui si ricava $F_{CY} = 6833\ Kg$.

Vediamo ora l'equilibrio alle forze verticali:

$$F_{AY} + F_{CY} - 8000 - 1500 - 1500 = 0$$

siccome $F_{CY} = 6833$ sostituisco

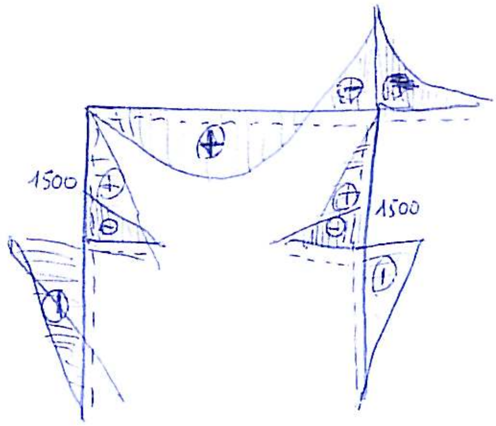
$$F_{AY} + 6833 - 8000 - 1500 - 1500 = 0$$

$$F_{AY} = 11000 - 6833 = 4167$$ ok

$$F_{AY} = 4167$$

NOTA: Per trovare le reazioni orizzontali faccio l'equilibrio dei momenti sul nodo B

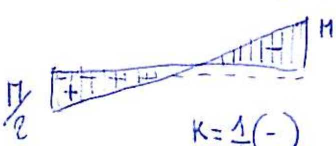
$$\Sigma M_B = -F_{cx} \times 6 + 2000\,tm + 9000\,tm = 0$$



I CINQUE CASI FONDAMENTALI DI RIGIDEZZA

MOMENTO APPLICATO ALL'ESTREMO

1)

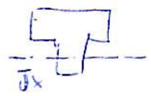


convenzione ingegneristica.

$K = \frac{1}{2}(-)$

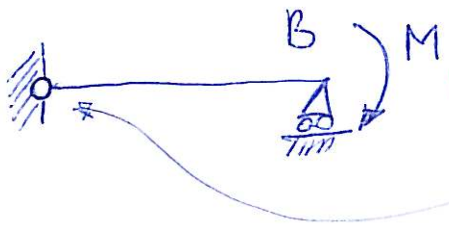
cercare di riportare la rotazione in momenti

RIGIDEZZA $\boxed{W_B = \left(\frac{M}{\varphi}\right)_B = \frac{4R}{l}}$ $= R = EJ$



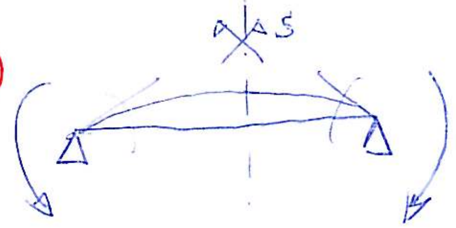
il 4 è dovuto all'incastro

2)



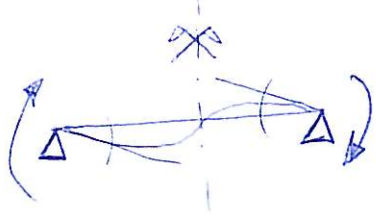
$\boxed{W_B = \frac{3R}{l}}$ il 3 è dovuto alla presenza della cerniera

3)



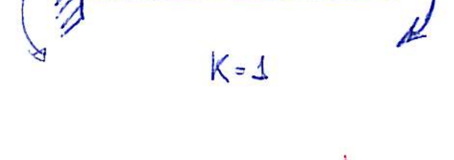
S (simmetrico) $\boxed{W = \frac{2R}{l}}$

4)



A (antimetrico) $\boxed{W = \frac{6R}{l}}$

5) caso della mensola



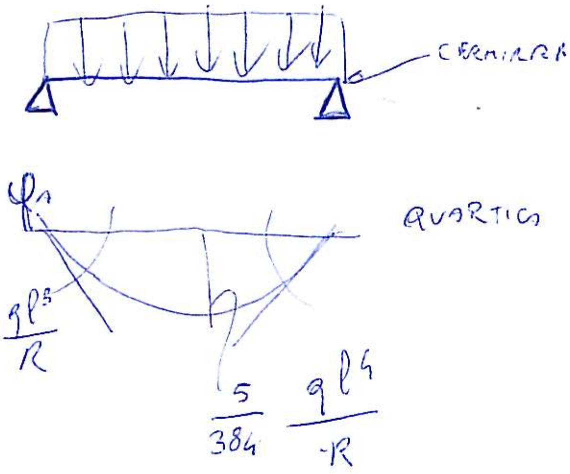
$K = 1$

$\boxed{W_B = \frac{R}{l}}$ RIGIDEZZA TORSIONALE

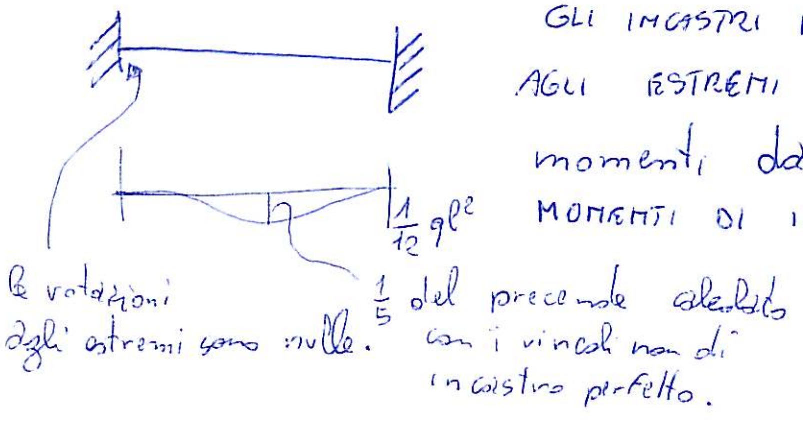
NOTA: usando questi 5 casi di rigidezza risolviamo tutti i telai.

MOMENTI DI INCASTRO PERFETTO

Si tratta di studiare gli estremi delle aste, ovvero studiamo la rotazione assoluta dei nodi e gli spostamenti.
Da qui possiamo conoscere il problema ad infiniti gradi di libertà all'interno delle aste.



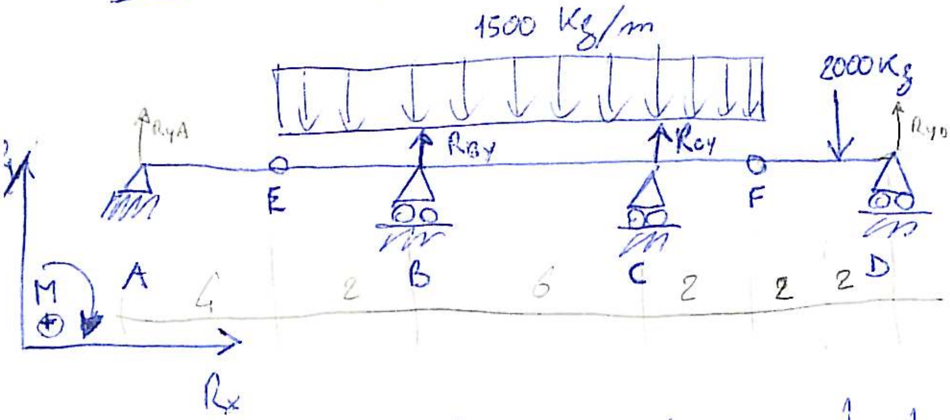
Vediamo il caso con doppio incastro.



GLI INCASTRI PERFETTI ANNULLANO LE ROTAZIONI AGLI ESTREMI (OVVERO SONO APPLICATI dei momenti dai vincoli che si chiamano MOMENTI DI INCASTRO PERFETTO).

Dal concetto di rigidezza bisogna riportarsi ai momenti ottenendo un sistema matriciale.

TRACCIARE M, N, T



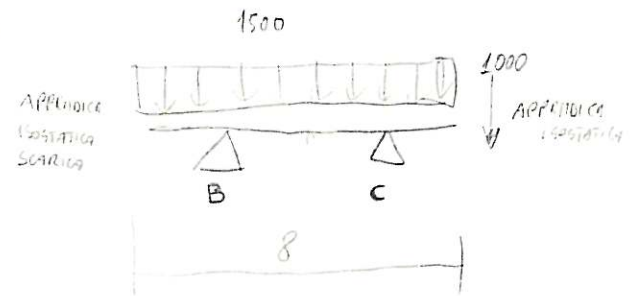
sul tratto $\overline{AE}$ l'equilibrio dei momenti dà:

$\Sigma_{MA} = 0 \Rightarrow R_{yA} \cdot \overline{AE} = 0$ DA cui $R_{yA} = 0$

nel tratto $\overline{DF}$ l'equilibrio dei momenti dà: preso F come polo

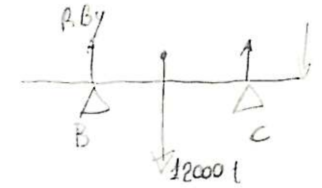
$-2000 \cdot 2 + R_{yD} \cdot 4 = 0 \qquad \frac{2000 \cdot 2}{4} = -R_{Dy} \qquad +R_{Dy} = 1000$

Per trovare la reazione in C, (R_{yC}) faccio polo su C ed equilibrio i momenti.



concentro tutto il carico sul baricentro

$1500 \times 8 = 12000\,t$



$-12000 \cdot 3 + R_{BY} \cdot 6 - 1000 \cdot 2 = 0$

$R_{BY} = \frac{12000 \cdot 3 + 1000 \cdot 2}{6}$

$\frac{36000 + 2000}{6}$

NOTA IMPORTANTE

PER VEDERE SE UN TELAIO È A NODI SPOSTABILI BISOGNA:

1) CONTARE LE CONDIZIONI ELEMENTARI DI VINCOLO

2) CONTARE I GRADI DI LIBERTÀ

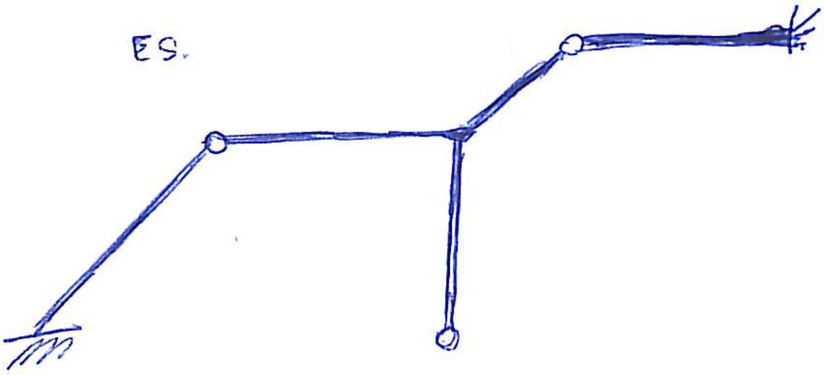
se ad esempio una struttura ha 14 CEV

e 15 GDL

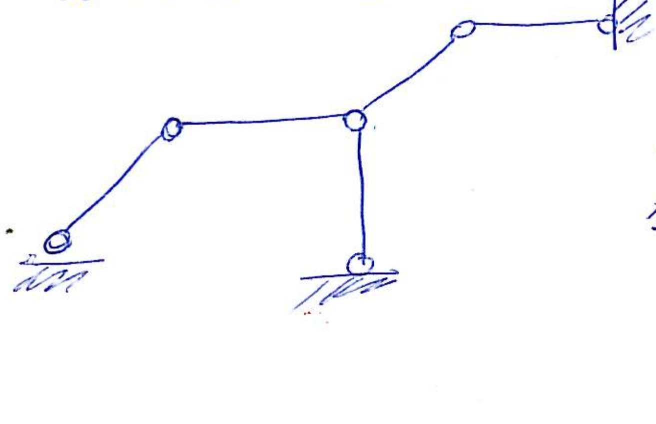
SI TRATTA DI UNA STRUTTURA LABILE

OVVIAMENTE IL CONTEGGIO VA FATTO SULLA TRAVATURA RETICOLARE ASSOCIATA

ES.



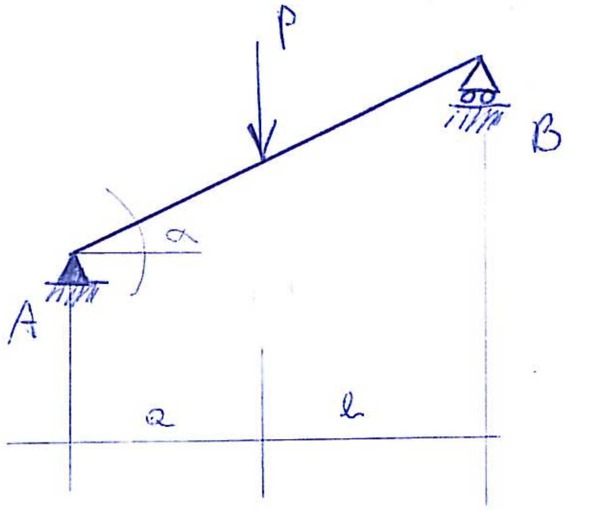
La reticolare associata è



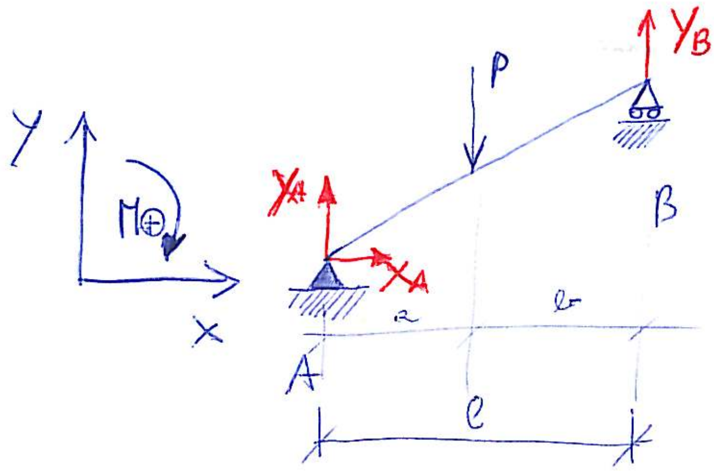
14 CEV
15 GDL => 1 GDL = TRAVATURA TELAIO A NODI SPOSTABILI.

STRUTTURA ISOSTATICA

TRACCIARE M, N, T



SI PROCEDE CERCANDO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO E METTO IN EVIDENZA LE REAZIONI.



POI SCRIVO LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

$$P \cdot a - Y_B \cdot l = 0 \qquad \sum M_A = 0$$

$$P \cdot b - Y_A \cdot l = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\boxed{Y_B = \frac{P \cdot a}{l}}$$

$$\boxed{Y_A = \frac{P \cdot b}{l}}$$

$F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0$

PERCHÉ IL CARRELLO NON REAGISCE LUNGO X.

Una volta trovate le reazioni ne calcolo il momento rispetto al punto di applicazione della P.

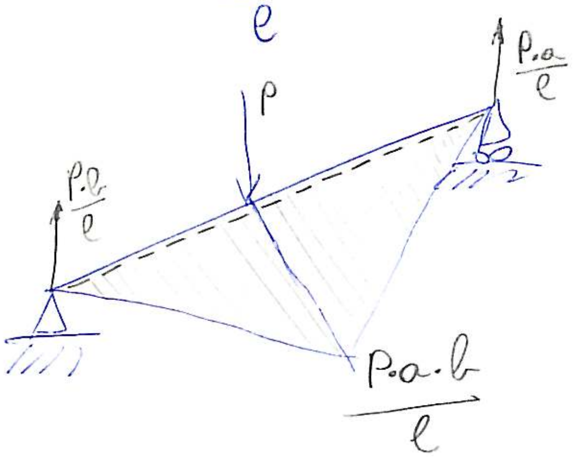
$Y_B \cdot b$ = Momento massimo sotto P

$Y_A \cdot a$ = Momento massimo sotto P

} sono uguali

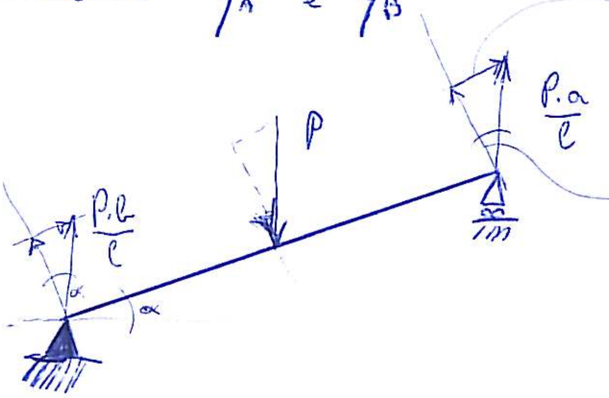
$$y_B \cdot b = \frac{P \cdot a}{l} \cdot b \quad \text{momento da destra verso il centro}$$

$$y_A \cdot b = \frac{P \cdot b}{l} \cdot a \quad \text{momento da sinistra verso il centro}$$



IN GENERALE È BENE RICORDARSI CHE UN CARICO PUNTIFORME GENERA UNA CUSPIDE NEL GRAFICO DEL MOMENTO.

Per tracciare il grafico del taglio è necessario scomporre le reazioni y_A e y_B



$\frac{P \cdot a}{l} \operatorname{sen} \alpha \rightarrow$ GRAFICO DELLA SOLLECITAZIONE NORMALE

$\frac{P \cdot a}{l} \cos \alpha \rightarrow$ GRAFICO DEL TAGLIO

grafico del taglio

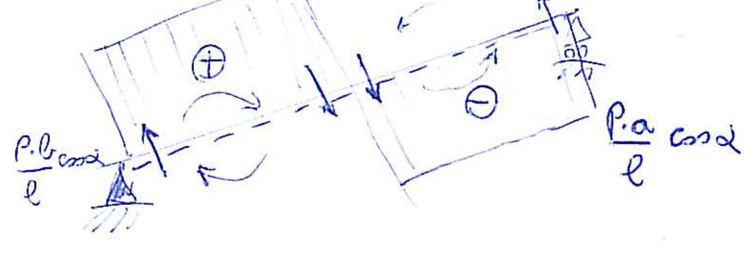
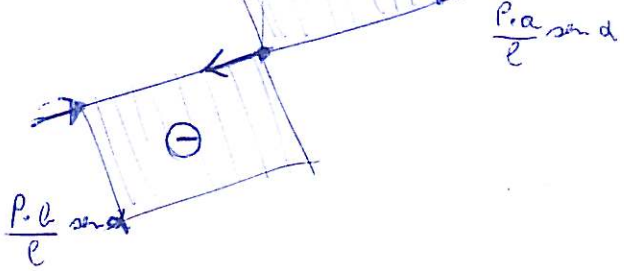


grafico dello sforzo normale



da parte di destra è in trazione
da parte di sinistra è in compressione