17 aprile 2007 martedì - FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO 18:15 ÷ 19:45

lezione n° 2 di 20

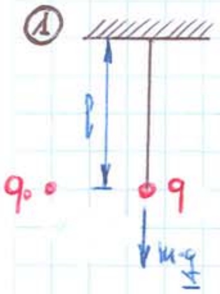
Riassumendo brevemente, nella lezione precedente si è visto

- il PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della CARICA
- che la forza elettrica è proporzionale alla carica $F_e \propto q'$
- la definizione (generale) di campo elettrico $\underline{E} = \dfrac{\underline{F}}{q'}$
- la legge di Coulomb $\underline{F} = K_e \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \underline{u}_r$ e nel caso elettrostatico $\underline{F} = K_e \dfrac{q'Q}{r^2} \underline{u}_r$ ($v_1 = 0$; $v_2 = 0$; $q_1 = q'$; $q_2 = Q$)
- l'unità di misura per la carica q è il Coulomb [C] $K_e = 10^{-7} c^2 \simeq 9 \cdot 10^9$ [N]
- sia per l'interazione tra più cariche che per il campo elettrico $\underline{E}$ vale il principio della sovrapposizione degli effetti.

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \qquad \underline{E} = \sum_{i=1}^{n} \underline{E}_i \; \boxed{=_{\text{SOLO nel caso ELETTROSTATICO}}} = \sum_{i=1}^{n} K_e \frac{Q_i}{r_i^2} \underline{u}_{ri}$$

ESERCIZIO 1.3 (dal testo)

ove abbiamo una carica elettrica q appesa ad un filo (come in Figura) di lunghezza l, e soggetta all'azione di q_0 con $v_0 = 0$



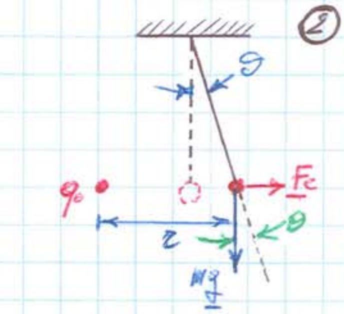
$m_q = 2 \cdot 10^{-3}$ Kg

$q_0 = 2 \cdot 10^{-9}$ [C]

$q = 5 \cdot 10^{-7}$ [C]

$r = 5$ cm

si osservi che una carica elettrica è sempre associata ad una massa



Si vuole calcolare l'angolo θ che viene a formarsi con la verticale per effetto dello spostamento della carica q

Nella situazione 2 sulla carica q agiscono rispettivamente

- la forza peso di valore $m \cdot g$
- la F_e che per Coulomb vale $F_e = K_e \dfrac{q_0 q}{r^2}$

Con semplici calcoli trigonometrici troviamo che $\dfrac{F_e}{m \cdot g} = tg\,\theta \Rightarrow F_e = m \cdot g \cdot tg\,\theta$

$$9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-9} \times 5 \cdot 10^{-7}}{25 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-3} \times 9{,}806 \times \underbrace{tg\,\theta}_{\text{magnitude}}$$

$$\frac{90}{25} 10^{-3} \cong 19{,}61 \cdot 10^{-3}\, tg\,\theta$$

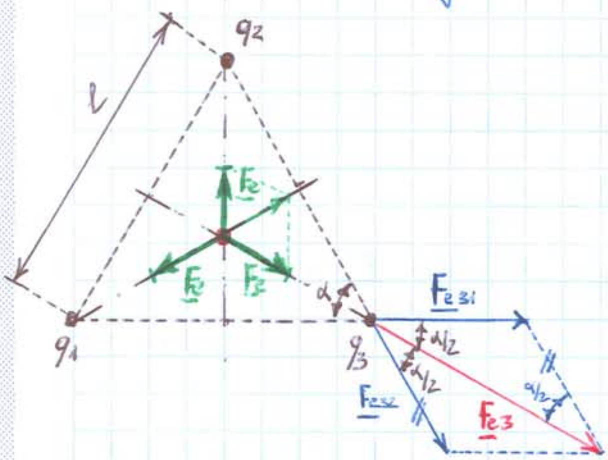
$$3{,}6 = 19{,}61\, tg\,\theta \longrightarrow tg\,\theta = \frac{3{,}6}{19{,}61} \simeq 0{,}1836$$

$$\theta \cong 10{,}4025 = 10° \; 24' \; 9{,}07''$$

ESERCIZIO 1.5 (dal testo)

Si hanno 3 cariche puntiformi uguali $q_1 = q_2 = q_3$ posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato l. Si chiede

- calcolare la forza elettrica agente sulla carica 3 $\underline{F}_{e3}$
- calcolare la forza agente nel baricentro O del triangolo



$q = 5 \cdot 10^{-7}\,C$
$l = 5\,cm = 5 \cdot 10^{-2}\,m$
$\alpha = 60°$
$K_e = 9 \cdot 10^9\,N$

La Forza elettrica agente sulla carica n°3, per il principio di sovrapposizione degli effetti vale

$$\underline{F}_{e3} = \underline{F}_{e31} + \underline{F}_{e32}$$

ma considerato che $q_1 = q_2 = q_3 \rightarrow \underline{F}_{e31} = \underline{F}_{e32} = K_e \dfrac{q^2}{l^2}$, perciò con un po' di trigonometria

$$\underline{F}_{e3} = F_{e31} \cos\frac{\alpha}{2} + F_{e32} \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\left(F_{e31} + F_{e32}\right) = 2K_e \frac{q^2}{l^2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(5 \cdot 10^{-7})^2}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cos 30° = 1{,}8 \cdot \cancel{10^{+10}} \cdot \cancel{10^{-10}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}9\sqrt{3} \simeq \underline{F_{e3} \simeq 1{,}56\,N}$$

Per determinare invece la risultante nel baricentro O, devo considerare che questo è equidistante dai vertici con misura pari ad $\frac{1}{3}l$, ciò significa che le 3 cariche uguali producono qui 3 (interazioni) forze elettriche F_e uguali.
Ma sappiamo che la risultante di una serie di forze DISPOSTE A STELLA è nulla perciò

$$\underline{F}_O = 0$$

Tornando ad occuparci della legge di Coulomb $\underline{F} = K_e \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \underline{u}_r$, si è detto essa valevole in modo rigoroso se le cariche sono puntiformi; nel caso si abbiano cariche NON puntiformi sorge il problema di definire qual è la distanza r da considerare.

Anche se non completamente esatto nei nostri calcoli a seguire r sarà misurato in riferimento AI CENTRI DI MASSA delle cariche.
Tale assunto, anche se sperimentalmente non verificato, si rende necessario per lo sviluppo della parte teorica di seguito sviluppata; e così dunque si opererà.
È poi utile e possibile dare la definizione di

DENSITÀ DI CARICA: λ è il rapporto fra la carica puntiforme Q ~~con~~ la VOLUME / SUPERFICIE / LINEA lungo la quale è distribuita

Se non vi è omogeneità

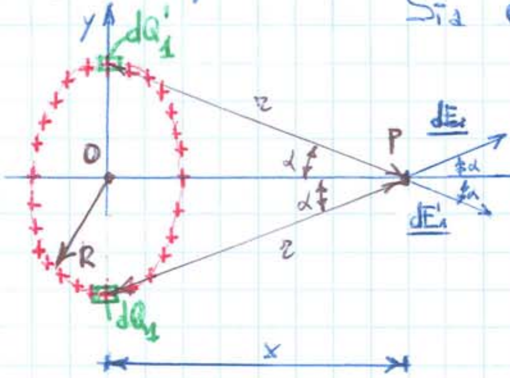
- densità di carica volumica $\rightarrow \lambda = \dfrac{dQ}{dV}$
- densità di carica superficiale $\rightarrow \sigma = \dfrac{dQ}{dA}$
- densità di carica lineare $\rightarrow \lambda = \dfrac{dQ}{dl}$

Se vi è omogeneità nella distribuzione, Q = COSTANTE

- densità di carica volumica $\rightarrow \lambda = Q/V$
- densità di carica superficiale $\rightarrow \sigma = Q/A$
- densità di carica lineare $\rightarrow \lambda = Q/l$

Consideriamo dunque un ANELLO di cariche Q=costanti di lunghezza $l = 2\pi R$ e studiamone il suo comportamento.

Sia O il centro dell'anello ed x il suo asse centrale e ⊥ all'quello



$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2\pi R} \quad \text{(facile!!!)}$$

Preso ora un generico punto P lungo l'asse a distanza x dal centro O dell'anello l'elemento infinitesimo di carica dQ nel CASO ELETTROSTATICO (cioè $v_{dQ}=0$) produce un campo elettrico $\underline{dE}$ di intensità

$$\boxed{dE_1 = K_e \frac{dQ_1}{r^2}}$$

Direzione e verso del vettore campo elettrico $\underline{dE_1}$ è quello della forza elettrica $\underline{dF_{el}}$ (lungo la congiungente dQP), la cui distanza si misura in r che forma un angolo α con l'asse però se considero ora una carica $dQ'_1 = dQ_1$ ma posta in modo simmetrico nell'anello rispetto alla prima dQ_1, in P questa nuova carica produce un campo elettrico $\underline{dE'_1}$ con stesso modulo di dE_1 ma con direzione diversa da questo; vediamo gli effetti COMBINATI dei due campi elettrici.

LUNGO DIREZIONE Y: intensità di entrambe i vettori dE uguale ma verso opposto

$$dE_y = dE_{1y} - dE_{y2} = dE_1 \sin\alpha - dE'_1 \sin\alpha = \sin\alpha\,(\underbrace{dE_1 - dE'_1}_{0}) = 0$$

lungo la direzione y gli effetti dei due vettori si neutralizzano

LUNGO DIREZIONE X:

$$dE_x = dE_{1x} + dE'_{1x} = dE_1 \cos\alpha + dE'_1 \cos\alpha = 2dE_1\cos\alpha = 2K_e \frac{dQ}{r^2}\cos\alpha$$

ma ricordando la densità di carica $\lambda = dQ/dl \rightarrow dQ = \lambda dl$ e che $\cos\alpha = x/r$

$$dE_x = 2K_e \frac{dQ}{r^2}\cos\alpha = 2K_e \frac{\lambda dl}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right) = 2K_e \frac{\lambda dl}{r^3}x$$

Il modulo del vettore campo elettrico $\underline{dE} = \underline{dE_1} + \underline{dE'_1}$ è dato perciò dalla

$$dE = \sqrt{dE_x^2 + \underbrace{dE_y^2}_{0}} \longrightarrow \boxed{dE = dE_x = 2K_e \frac{\lambda dl}{r^3}x}$$

si noti che nel campo elettrico infinitesimale di una coppia di cariche dQ SIMMETRICHE i parametri (2, K_e, λ, r) sono costanti

Il campo elettrico totale dell'anello è ottenuto per integrazione di dE solo su ½ lunghezza dello stesso (πR), perché parlo di coppie di cariche perciò, per una fissata distanza x

$$E_{ANELLO} = \int_0^{\pi R} dE = \int_0^{\pi R} 2K_e \frac{\lambda dl}{r^3}x = 2K_e\lambda\frac{x}{r^3}\int_0^{\pi R} dl = \frac{2K_e\lambda x}{r^3}\pi R = \frac{K_e \overbrace{\overbrace{2\pi R}^{l}\lambda}^{Q}\, x}{r^3}$$

Vogliamo poi dare il risultato in una forma più esplicita perciò noto che $r^2 = R^2 + x^2 \longrightarrow r = (R^2+x^2)^{1/2}$

$r^3 = (R^2+x^2)^{3/2}$

$$\boxed{E = \frac{K_e Q x}{(R^2+x^2)^{3/2}}}$$

in termini vettoriali dobbiamo introdurre un versore che ci dia la direzione del campo elettrico $\underline{E}$ dell'anello.
Ma considerato che $dE_y = 0$ la direzione del campo elettrico $\underline{E}$ dell'anello è quella per il suo centro O ed ortogonale a questo: cioè $\underline{u}_x$

$$\boxed{\underline{E} = K_e Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\underline{u}_x}$$

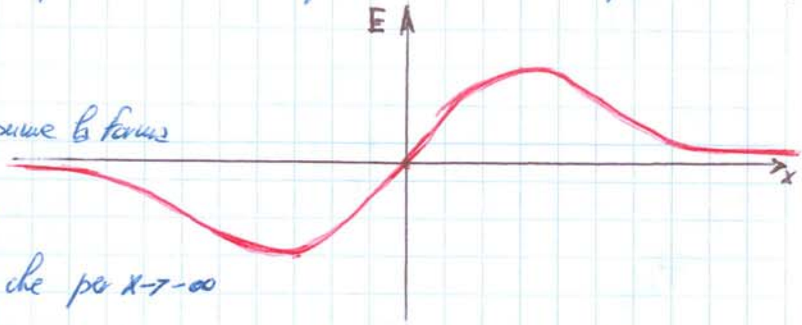
CAMPO ELETTRICO DI UN ANELLO di carica Q totale e raggio R

Abbiamo trovato l'importante risultato che: per un anello il campo elettrico da questo prodotto è

$$\boxed{\underline{E} = K_e Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \underline{u}_x}$$

se x è la distanza misurata lungo l'asse per il centro o ed $\perp$ all'anello stesso -

Se vogliamo descrivere con un grafico della Funzione del campo elettrico, non lo faremo per il vettore $\underline{E}$ ma per il modulo



Se $x=0$ con $R\neq 0$ $E=0$

Se $x \to \infty$ la Funzione del modulo assume la forma

$$E = K_e Q \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{R^2}{x^2}+1\right)^{3/2}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

ciò vale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

Se $0<x<\infty$ considerato che il segno di x rende il segno di E sarà che
per $x>0 \to E>0$ ed in $0<x<+\infty$ avrà un massimo
per $x<0 \to E<0$ ed in $-\infty<x<0$ avrà un minimo

LAVORO FORZE ELETTRICHE (campi elettrici)

Si abbia un percorso $\widehat{AB}$ ed una forza $\underline{F}$ agente lungo la direzione θ, la quale produce uno spostamento $\underline{ds}$ di un generico corpo dalla meccanica sappiamo che il

LAVORO $\boxed{dW = \underline{F} \cdot \underline{ds}}$ infinitesimale di $\underline{F}$ che produce spostamento $\underline{ds}$

ove il prodotto $\underline{F} \cdot \underline{ds}$ è un PRODOTTO SCALARE così definito

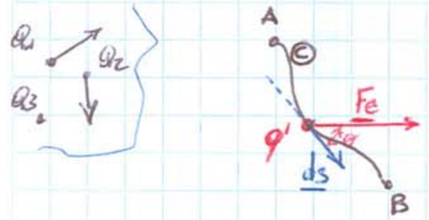
$\underline{F} \cdot \underline{ds} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = dW$, ed il risultato è uno scalare

Il lavoro della forza $\underline{F}$ (sul corpo esaminato) lungo tutto il percorso $\widehat{AB}$ si calcola con l'integrazione degli infinitesimi contributi dW lungo il percorso

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \underline{F}\,\underline{ds}}$$

il lavoro così calcolato DIPENDE dal percorso seguito se $AB \neq AB'$ risulta in genere $W_{AB} \neq W_{AB'}$

Anche per una forza elettrica $\underline{Fe}$ posso calcolare il lavoro come richiesto dalla meccanica "classica" lungo quello che diremo percorso ©, il simbolo © inserito prima dell'integrale non ha alcun significato se non quello di chiarire quale percorso si è seguito per calcolare il lavoro della forza elettrica -



$$\boxed{W_{AB} = ©\int_A^B \underline{Fe}\,\underline{ds}}$$

E fino a qui nulla di particolare; la cosa diventa più interessante se ricordiamo come è stato definito il campo elettrico $\underline{E} = \underline{Fe}/q'$ da cui $\underline{Fe} = q'\underline{E}$ e lo introduco nella relazione sopra (q' = costante)

$$\underbrace{W_{AB}} = ©\int_A^B \underline{Fe}\,\underline{ds} = ©\int_A^B q'\underline{E}\,\underline{ds} = q'\,\underbrace{©\int_A^B \underline{E}\,\underline{ds}}$$

$$\boxed{W_{AB} = q' \int_A^{B\,©} \underline{E}\,\underline{ds}}$$

Il lavoro della forza elettrica $\underline{Fe}$, W_{AB}, dipende certamente dal percorso seguito © MA ANCHE dalla carica q': è a questa proporzionale

Per "slegarci" dalla diretta proporzionalità del lavoro, rispetto alla carica q', possiamo definire come

$$\boxed{\frac{W_{AB}}{q'} = V_{AB} = \text{©}\int_A^B \underline{E}\, d\underline{s}} = \Delta V_{BA} = (V_A - V_B) = V_{AB}$$

TENSIONE ELETTRICA: il rapporto tra il lavoro prodotto dalla F_e forza elettrica lungo il percorso © rispetto alla carica q' spostata da A in B

La tensione elettrica così definita DIPENDE dal percorso © seguito dalla carica q'

L'unità di misura della tensione V è $\frac{[J]}{[C]} = [V]$ VOLT $\qquad [J] = [N] \cdot [m]$

L'unità di misura del campo elettrico $\underline{E} = \frac{F_e}{q'} = \frac{[N]}{[C]} = \left[\frac{V}{m}\right]$

A questo punto se conosco la carica q' e la tensione a cui questa è soggetta V_{AB}, nello spostamento da A verso B (e supposta COSTANTE), il lavoro prodotto vale
e nel caso più generale se indichiamo con I° un generico percorso da A -> B e con II° un'alternativo tragitto risulta

$$\boxed{W_{AB} = q' \cdot V_{AB} = q' (V_A - V_B)}$$

$$(W_{AB})_{I} \neq (W_{AB})_{II^\circ} \Rightarrow q_0 \int_B^A (\underline{E}\, d\underline{s})_{I^\circ} \neq q_0 \int_B^A (\underline{E}\, d\underline{s})_{II^\circ}$$

da cui lungo un circuito I + (−II°) per forze elettriche $\underline{F_e}$ QUALSIASI e definiamo inoltre

$$\boxed{W = \text{©}\oint \underline{F_e}\, d\underline{s} = q_0 \text{©}\oint \underline{E}\, d\underline{s} \neq 0}$$

FORZA ELETTRO MOTRICE = F.e.m. dal campo elettrico $\underline{E}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E} = \text{©}\oint \underline{E}\, d\underline{s}}$

Si noti che:

- la f.e.m. NON è una forza, per cui il nome non deve trarre in inganno
- la $\mathcal{E} \neq 0$ in genere, cosa NON vera per campi elettrostatici $\underline{E}$ dove le $\underline{F_e}$ sono conservative

La II° osservazione appena condotta necessita di un approfondimento, quale caso particolare

Dalla meccanica la categoria di forze dette CONSERVATIVE (per le quali il lavoro W_{AB} NON dipende dal percorso seguito)

$$W_{AB} = (W_{AB})_{I} = (W_{AB})_{II^\circ} = \int_A^B \underline{F} d\underline{s} = (-)\int_B^A \underline{F} d\underline{s} \Rightarrow \oint \underline{F} d\underline{s} = \int_A^B (\underline{F} d\underline{s})_{I} - \int_A^B (\underline{F} d\underline{s})_{II^\circ} = 0$$

cioè la loro differenza di potenziale si misura in $W_{AB} = E_{PA} - E_{PB}$
Se guardo al caso ELETTROSTATICO, detta U l'energia potenziale, e così poter dare un distinguo da E che è simbolo usato in meccanica

$$\boxed{\begin{aligned} W_{AB} &= (-)\Delta U_{AB} = U_A - U_B = (+) q_0 (V_A - V_B) = E_{KB} - E_{KA} \\ (-)W_{AB} &= (+)\Delta U_{AB} = U_B - U_A = (-) q_0 (V_A - V_B) = (-)\Delta E_{KAB} \end{aligned}}$$

$$W_{AB} = -\Delta E_{AB} = -\Delta U_{AB}$$

$$\boxed{\Delta U_{AB} = U_B - U_A = (-) W_{AB} = (-) q_0 \int_A^B \underline{E}\, d\underline{s}}$$ ← DIFFERENZA DI POTENZIALE ELETTROSTATICO

$$\boxed{\Delta U_{AB} = (-) q_0 \Delta V_{BA} = -q_0 (V_A - V_B)}$$ ← energia potenziale ELETTROSTATICA risulta proporzionale alla d.d.p. elettrostatico

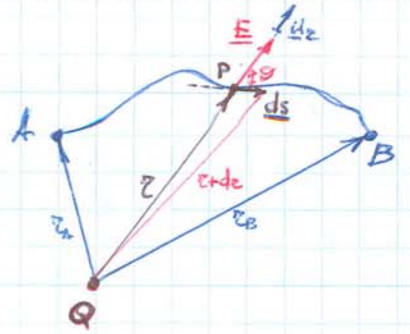
$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \underline{E}\, d\underline{s}}$$

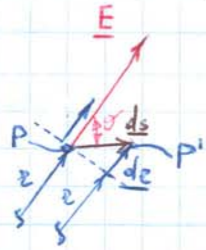
Nel caso elettrostatico le $\underline{F_e}$ sono di tipo conservativo $\Rightarrow$ in un circuito chiuso la loro energia potenziale NON varia

$$\Delta U = -q_0 \oint \underline{E}\, d\underline{s} = -q_0\, \mathcal{E} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{E} = \oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0} \qquad \boxed{W = q_0\, \mathcal{E} = 0}$$

La differenza di energia potenziale in un circuito ove è definito un campo elettrostatico $\underline{E}$ è nulla: definiamo meglio la funzione d.d.p. e calcoliamola operativamente

POTENZIALE ELETTROSTATICO





Considerata la carica puntiforme Q (statica) essa sappiamo determinare nel punto P un campo elettrico $\mathbf{E}$ con direzione radiale u_r

$$\mathbf{E} = K_e \frac{Q}{r^2}\, u_r$$

Se P si sposta lungo il percorso AB di una quantità ds è compiuto un lavoro dW

$$dW = Q\mathbf{E}\,d\mathbf{s} \rightarrow W_{AB} = Q\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} \hookrightarrow V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \int_A^B E\underbrace{ds\cos\vartheta}_{dr} = \int_A^B E\,dr$$

si nota che $dr = ds\cos\vartheta$ rappresenta "l'allungamento" della distanza radiale r della carica Q dal punto P nell'incremento infinitesimo per passare da P a P', perciò lungo $\widehat{AB}$. La variazione di tensione elettrica nel campo elettrostatico $\mathbf{E}$ si misura come

$$\Delta V_{BA} = V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \int_A^B E\,dr = \int_A^B K_e\frac{Q}{r^2}\,dr = K_eQ\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = K_eQ\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right) \quad \boxed{V_{AB} = V_A - V_B = K_eQ\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)} \; (-)\text{d.d.p.}$$

Ciò dimostra che la tensione misurata è INDIPENDENTE dal percorso seguito dal punto P per passare da A verso B; di conseguenza anche il lavoro di una carica q' soggetta all'azione di Q nel passare da A verso B è indipendente dal percorso seguito

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F_e}\,d\mathbf{s} = q'\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = q'V_{AB} = \boxed{q'\frac{K_eQ}{r_A} - q'\frac{K_eQ}{r_B} = W_{AB}}$$

se il lavoro W è indipendente dal lavoro seguito le forze in gioco sono conservative

Per le forze elettrostatiche, che sono conservative, il loro ddp (di seguito SOLO POTENZIALE) è una funzione indipendente dal percorso seguito; se indichiamo ora con $q_0 = Q$ la carica che genera il campo elettrico $\mathbf{E}$ la funzione potenziale può essere così definita:

$$\boxed{\Phi = K_e\frac{Q}{r}}$$

FUNZIONE POTENZIALE ELETTROSTATICO PER UNA CARICA Q PUNTIFORME

ricordando ora le relazioni $W_{AB} = (-)\Delta U_{AB} = U_A - U_B$
$(-)W_{AB} = \Delta U_{AB} = U_B - U_A$

d.d.p. $= \Phi$

$$\boxed{\underset{\Phi_B - \Phi_A}{V_B - V_A} = (-)V_{AB} = \frac{K_eQ}{r_B} - \frac{K_eQ}{r_A}}$$

differenza di potenziale elettrico tra A e B

energia potenziale $= U$

$$\boxed{\Delta U_{AB} = U_B - U_A = \frac{K_eq'Q}{r_B} - \frac{K_eq'Q}{r_A}}$$

variazione di (energia) potenziale tra A e B

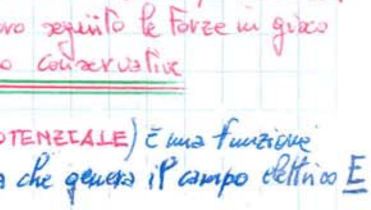
lavoro $= W$

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta U_{AB} = U_A - U_B = \frac{K_eq'Q}{r_A} - \frac{K_eq'Q}{r_B}}$$

lavoro cariche elettriche tra A e B

La funzione POTENZIALE Φ è naturalmente definita a meno di una costante e nel caso elettrostatico in presenza di più cariche (sistema di cariche) vale il principio di sovrapposizione degli effetti

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{E_1}+\dots+\mathbf{E_n})\,d\mathbf{s} = (V_{A1}-V_{B1})+\dots\dots+(V_{An}-V_{Bn})$$



$$\boxed{\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_eQ_i}{r_i}}$$

da cui segue che se voglio calcolare il potenziale per un sistema di cariche posso farlo in due distinti modi

1) Se conosco i valori delle cariche Q_i e le loro distanze dagli estremi A e B con $\Phi_B - \Phi_A = \sum \frac{K_eQ_i}{r_{Bi}} - \frac{K_eQ_i}{r_{Ai}}$

2) Se è noto il campo elettrico $\mathbf{E}$ in ogni punto dello spazio e non conosco la posizione delle cariche Q_i $\quad \Phi_B - \Phi_A = (-)\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$

Naturalmente per un circuito, nel caso elettrostatico per un sistema di cariche $\quad \Phi = -\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$