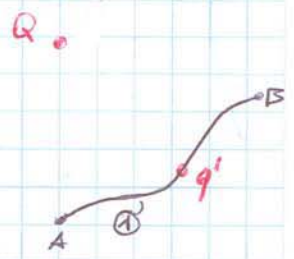


Risumiamo brevemente quanto visto nella lezione precedente lezione n° 3 di 20

- Considerati due punti A e B, lungo un generico percorso la carica puntiforme  $q'$  esercita una forza ~~elettrica~~ sulla carica  $q'$  che si misura in  $F_e = q'E$  se  $E =$  campo elettrico
- Il lavoro prodotto per trasportare la carica puntiforme  $q'$  dal punto A al punto B, lungo il percorso  $\alpha$  vale, e soggetto all'interazione con la carica  $Q$



$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F}_e \cdot d\underline{s} = \int_A^B q'E \cdot d\underline{s} = q' \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s}$$

- Si può definire tensione elettrica tra due punti A e B, soggetti al campo elettrico  $\underline{E}$  generato dalla carica puntiforme  $Q$  come

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q'} = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad \text{e si misura in volt } [V] = \frac{[J]}{[C]}$$

- SOLO per il caso elettrostatico è stata definita la funzione d.d.p. (potenziale)  $\Phi = k_e \frac{Q}{z}$  e con esso si è dimostrato che vale

$$(-) \text{d.d.p.} = V_{AB} = V_A - V_B = \Phi_A - \Phi_B = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad \text{se l'integrale può essere calcolato lungo un qualsiasi percorso congiungente A con B}$$

- SOLO per il caso elettrostatico si è visto che il lavoro per spostare la carica puntiforme  $q'$  dal punto A al punto B, lungo un qualsiasi percorso, prodotto dal campo elettrico  $\underline{E}$  generato dalla forza statica e puntiforme  $Q$  vale

$$W_{AB} = q' V_{AB} = q' (\Phi_A - \Phi_B) = q' \cdot (-) \text{d.d.p.} = +q' (V_B - V_A)$$

- Sappiamo inoltre che per il campo elettrico  $\underline{E} = k_e \frac{Q}{z^2} \underline{u}_z$ , sempre solo per il caso elettrostatico, la funzione potenziale è definita a meno di una costante

$$\Phi = \frac{k_e Q}{z} + c \quad \text{la quale compare nella d.d.p. } \Phi_B - \Phi_A = \frac{k_e Q}{z_B} + c - \frac{k_e Q}{z_A} - c = \frac{k_e Q}{z_B} - \frac{k_e Q}{z_A}$$

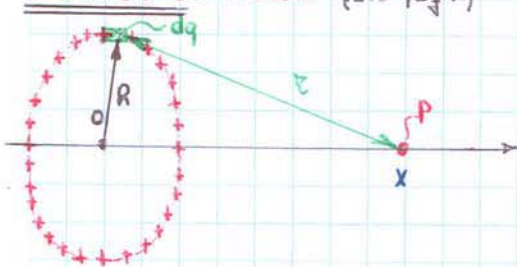
ed inoltre per la funzione potenziale vale il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_n \quad \longrightarrow \quad \Phi = \sum_{i=1}^n \frac{k_e Q_i}{z_i} + c$$

il che ci permette di scegliere la funzione potenziale in 2 modi  $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_B - \Phi_A = \sum_{i=1}^n \frac{k_e Q_i}{z_{Bi}} - \frac{k_e Q_i}{z_{Ai}} \\ \Phi_B - \Phi_A = - \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{s} \end{array} \right.$

Guardiamo ora ad alcuni esempi significativi di calcolo della funzione potenziale

**ESEMPIO 1: ANELLO** (2.6 pag 41)



Una carica  $Q$  è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio  $R$ ; calcolare il potenziale elettrostatico lungo l'asse  $x$  passante per il centro dell'anello

So che la carica infinitesimale  $dq$  alla distanza  $z$  dal punto  $P$  produce un potenziale  $d\Phi = \frac{k_e dq}{z}$  (conosci carica e sua distanza). Il flusso totale è la  $\Sigma$  sommatoria di tutti i  $d\Phi$  sull'intero anello

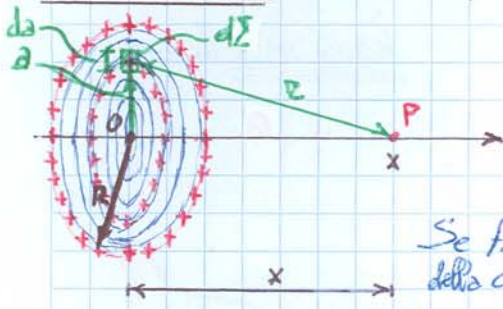
$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \frac{k_e dq}{z} = \frac{k_e}{z} \oint dq = \frac{k_e Q}{z} = \Phi \quad \longrightarrow \quad \text{ma vale } z = \sqrt{R^2 + x^2} \quad \text{perci\u00f2}$$

$$\Phi = \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

funzione potenziale anello lungo asse  $x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } x=0 \Rightarrow \Phi_{\max} = \frac{k_e Q}{R} \\ \text{se } x=\infty \Rightarrow \Phi_{\min} = 0 \end{array} \right.$$

ESEMPIO 2: DISCO (2.7 pag 142)



Un disco sottile di raggio  $R$  ha una carica distribuita  $Q$  uniformemente su tutta la superficie. Calcolare il potenziale elettrostatico ed il campo elettrico lungo l'asse passante per  $O$  del disco.

Se facciamo riferimento all'intera superficie del disco  $S = \pi R^2$ , l'angolarità della carica permette di definire la densità superficiale della stessa

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad \text{perciò per un tratto infinitesimo di superficie } dS \text{ si misura una carica}$$

$$dq = \sigma dS = \frac{Q}{\pi R^2} dS$$

A questo punto conosco quanto vale la carica infinitesima  $dq$  conosco la sua distanza  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$  dal generico punto  $P$  situato sull'asse, il potenziale espresso da tale carica vale

$$d\phi = \frac{k_e dq}{r} = \frac{k_e dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ovv è indicato con  $a$  il raggio medio della superficie  $dS$  di spessore  $da$ ; l'aver definito con  $da$  lo spessore di  $dS$  permette di dire che l'anello con tale spessore e raggio ha superficie pari ad  $dS = 2\pi a da$ , perciò si scrive che  $d\phi$  vale

$$= \frac{k_e \sigma da}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{k_e \sigma 2\pi a da}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

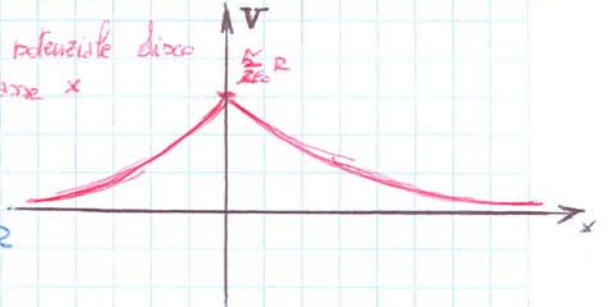
Ora se faccio variare  $0 \leq a \leq R$  e sommo tutti i contributi infinitesimi  $d\phi$  ottengo il potenziale cercato

$$\Phi = \int d\phi = \int_0^R \frac{k_e \sigma 2\pi a da}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \sigma \pi \int_0^R \frac{2a da}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \sigma \pi \int_0^R \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} d(a^2 + x^2) = k_e \sigma \pi \left( 2 \sqrt{a^2 + x^2} \right) \Big|_{a=0}^{a=R}$$

$$\Phi = k_e 2\pi \sigma \left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right)$$

$\left( \frac{2\pi \sigma}{2\pi \epsilon_0} \right)$

Funzione potenziale disco lungo asse  $x$



Per il grafico si nota che: per  $x=0 \rightarrow \Phi_{max} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$   
per  $x \rightarrow \infty \rightarrow \Phi_{min} = 0$

Bisogna dunque il calcolo del campo elettrico  $E$ , posso procedere in due distinti modi:

1. supporre il disco formato da tante superficie  $dS$  infinitesime la cui carica vale  $dq = \sigma dS$  e per ciascuna di esse sommare il contributo del campo elettrico formato  $dE$
2. sfruttare la conoscenza che il campo elettrico di un anello vale  $E = k_e \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x$ , e pensare il disco formato da tanti anelli infinitesimi con  $R = da$  ed  $a = R$  e sommarne tutti i contributi.

Considerato che il 1° metodo appare troppo laborioso, seguiamo il 2°; in tal caso ogni anello del disco produce un campo elettrico infinitesimale pari ad

Integriamo questa come segue

$$dE = k_e \frac{dq x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e \frac{\sigma da x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e \frac{\sigma 2\pi a da x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

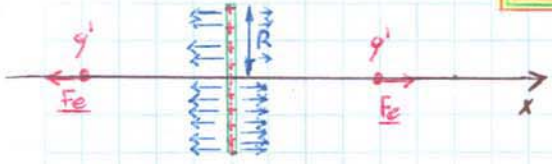
$$E = \int dE = \int_0^R \frac{k_e \sigma \pi x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} 2a da = k_e \sigma \pi x \int_0^R \frac{2a da}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e \sigma \pi x \left( -2 (a^2 + x^2)^{-1/2} \right) \Big|_{a=0}^{a=R}$$

$$= 2k_e \sigma \pi \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = \frac{k_e = 10^{-9} C^2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}}{\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

In termini cartesiani in serie

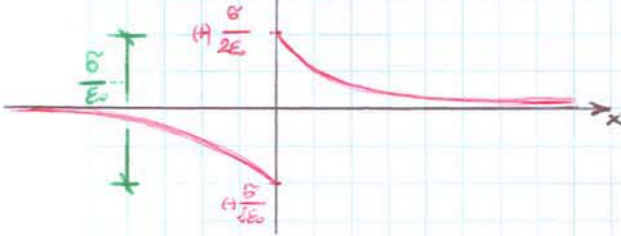
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) \mathbf{u}_x$$

CAMPO ELETTRICO DI UN DISCO  
 con densità di carica  $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$   
 carica totale  $Q$  e raggio  $R$



se il verso di  $\underline{u}_x$  è concorde con l'asse  $x$  e  $x > 0$   
 se il verso di  $\underline{u}_x$  è discorde con l'asse  $x$  e  $x < 0$  }  $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) > 0$

Volevo infine tracciare un grafico per il campo elettrico in modo che



per  $x \rightarrow \infty$   $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}\right) \rightarrow 0$

per  $x \rightarrow 0^+$   $E \rightarrow (+) \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$   
 per  $x \rightarrow 0^-$   $E \rightarrow (-) \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  Nel disco in 0 il campo elettrico  $\underline{E}$  non è nullo ma ha una DISCONTINUITA'

La discontinuità in 0 vale  $\Delta E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\Delta E}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  TEOREMA DI COULOMB

Lo sviluppo del campo  $E$  segue una legge del tipo  $\frac{1}{x^2}$  infatti a sviluppo in serie l'espansione

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}\right)$$

con Taylor, so che per  $\frac{R}{x} \ll 1$  cioè  $x \gg R$ , posso arrestarmi del mio sviluppo del 1° ordine perciò

$$\left[1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2\right]^{-1/2} \approx \text{TAYLOR} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{R}{x}\right)^2 \leftarrow \left\{ (1+y)^n \approx 1 + \binom{n}{1} y + \dots \right\}$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x}\right)^2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x}\right)^2\right]\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{x^2}\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{x^2} \rightarrow E \approx \frac{K_e Q}{x^2}$$

se  $x \gg R$  if che dimostra lo sviluppo secondo la legge  $\frac{1}{x^2}$  del campo elettrico

La dimostrazione appena data si interpreta come segue:

per  $x \gg R$  il disco con carica complessiva  $Q$  si comporta come questa carica fosse concentrata nel suo centro 0

Quatore si abbia  $x \ll R$  e prossimo allo zero per il fatto che  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}\right) \approx 1$ , il campo elettrico è pressoché costante

$$E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

visto allora che il campo elettrico si mantiene costante, ed è ortogonale al piano del disco, è da considerare che tale campo  $\underline{E}$  può essere assimilato ad un piano infinitamente esteso; per angoli di  $\sim \pi/2$  si perde il "concetto di disco" e si assume quello di superficie piano indefinitamente estesa.

concludiamo dunque con la seguente

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

CAMPO ELETTRICO DI UN PIANO INDEFINITO  
 con densità di carica  $\sigma$   
 omogeneamente distribuita

### ESEMPIO 3 : DUE PIANI INDEFINITI (1.3 pag 16 & 2.3 pag 12) e paralleli

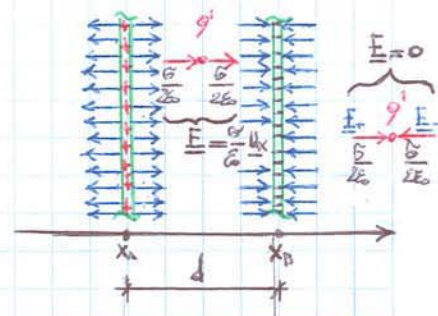
Si abbiano due piani indefiniti disposti parallelamente alla distanza  $d = x_B - x_A$ , con densità di carica superficiale l'uno  $+\sigma$  e l'altro  $-\sigma$ .  
 Si calcoli il campo elettrostatico  $\underline{E}$  e l'aumento del potenziale elettrostatico  $\phi$  prodotto dai due piani.

Per il calcolo del campo elettrostatico si sfruttano le conoscenze già acquisite nel caso di studio operato per il disco

$$\underline{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \underline{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Perciò per ciascun piano si avrà rispettivamente

$$\begin{aligned} E_{(+)} &= (+) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ E_{(-)} &= (-) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$



Una generica carica di prova  $q'$  posta tra i due piani (e positiva  $+$ ) è soggetta ad un campo  $\underline{E} = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)}$  o in questo caso per il principio della sovrapposizione degli effetti si può scrivere

$$\underline{E} = \underline{E}_{(+)} - \underline{E}_{(-)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \quad \underline{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{in termini ottenibili} \quad \underline{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \underline{u}_x$$

CAMPO ELETTRICO INTERNO A DUE PIANI INDEFINITI

Una generica carica di prova  $q'$  posta "ESTERNAMENTE" ai due piani (e positiva  $+$ ) è soggetta ad un campo  $\underline{E} = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)}$  o in questo caso per il principio della sovrapposizione degli effetti si può scrivere

$$\underline{E} = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \quad \underline{E} = 0 \quad \text{in termini ottenibili} \quad \underline{E} = 0$$

CAMPO ELETTRICO ESTERNO A DUE PIANI INDEFINITI

Passiamo ora al calcolo del potenziale elettrostatico  $\phi$ : questa operazione è identica per notare che ovunque il campo elettrico  $\underline{E}$  in ogni punto dello spazio perché

- tra i due piani ha valore costante  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , al di fuori di essi è nullo  $E = 0$
- la sua direzione è  $\perp$  ai due piani indefiniti, ed il verso è da parte  $(+)$   $\rightarrow$  parte negativa  $(-)$   $= \underline{u}_x$

perciò immediatamente:

$$\phi_A - \phi_B = (-) [\phi_B - \phi_A] = (+) \int_A^B \underline{E} ds = \int_A^B E \underline{u}_x ds = \int_A^B E ds \quad \text{ma } ds \text{ è uguale spostamento lungo } ds \text{ con } x \rightarrow \underline{u}_x ds$$

$$= E \int_A^B 1 \cdot dx \cos 0$$

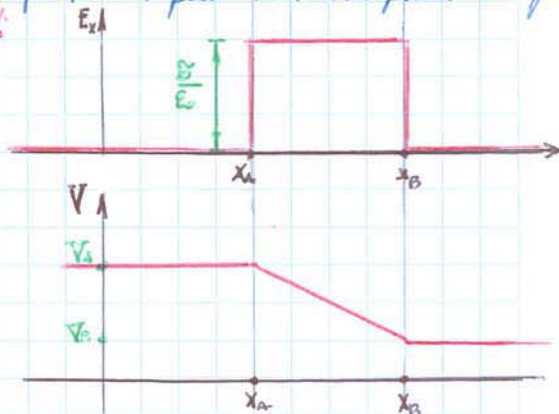
$$\phi_A - \phi_B = E(x_B - x_A)$$

$\rightarrow$  tra i due piani  $\phi_A - \phi_B \neq 0$   
 $\rightarrow$  esterno ai due piani  $\phi_A - \phi_B = 0$

Ma se invece di considerare il punto  $x_B$ , considero un generico punto  $x$  posto tra i due piani allora

$$\phi_A - \phi_B = E(x_B - x) \rightarrow \phi = \phi_A - E(x - x_A)$$

funzione potenziale di due piani indefiniti lungo asse  $x$



Se vogliamo tracciare i grafici del campo elettrostatico noto che

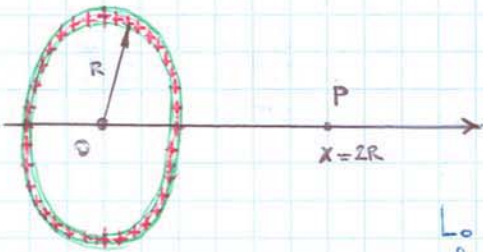
- al di fuori dei piani vale  $\Delta\phi = \Delta V = 0$  ma significa  $\phi = 0$
- tra i due piani  $\phi$  si comporta come una retta
- se voglio spostare  $q'$  da  $A$  verso  $B$  deve essere  $\phi_A > \phi_B$
- se vale  $\phi_A > \phi_B$  ho LAVORO POSITIVO perché

$$dW = \underline{F} ds = q' \underline{E} ds = q' E \underline{u}_x ds = q' E dx = q' \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx > 0$$

ESERCIZIO 2.16 pagina 54

Nel centro  $O$  di un suolo di materiale isolante di raggio  $R=10\text{ cm}$ , uniformemente carico con carica  $q=2,5 \cdot 10^{-8}\text{ C}$ , è posto un protone. Si sposta di molto poco il protone dalla posizione  $O$  che è di equilibrio instabile. Calcolare la velocità  $v_p$  raggiunta dal protone ad una distanza  $x=2R$  dal centro dell'isolante.

**RISOLVO**



$$R = 10\text{ cm} = 0,1\text{ m}$$

$$Q = 2,5 \cdot 10^{-8}\text{ C}$$

$$q' = q_p \rightarrow e = 1,6022 \cdot 10^{-19}\text{ C}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$$

Lo studio della distribuzione del campo elettrico dell'isolante è già stato studiato: lungo l'asse concentrico vale

$$\underline{E} = k_e Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \underline{u}_x$$

ciò significa che in  $O$  esso è nullo.

La forza elettrica a cui è sottoposto il protone appena esce dall'equilibrio instabile vale

$$\underline{F}_e = q' \underline{E} = m \frac{dv}{dt} \underline{u}_x = k_e Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \underline{u}_x$$

La relazione appena scritta, ricavata dalla "fisica classica" descrive esattamente il moto del protone; ma la sua soluzione, che ben si presta quando le forze in gioco sono costanti, nel caso in esame si rivela complicata per via che  $F_e$  varia con lo spostamento di  $P$  lungo l'asse del moto. Allo scopo di determinare relazioni più semplici, ricordo che la funzione potenziale per l'isolante vale

$$\Phi = k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

ove  $x$  è lo spostamento nel tratto  $OP$  del protone e che il lavoro fatto dal campo elettrico in tale spostamento vale

$$W_{OP} = q' V_{OB} = q' (\Phi_0 - \Phi_P) = q' \left( \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2+0}} - \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2+OP^2}} \right) = q' k_e Q \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R\sqrt{5}} \right)$$

Il secondo membro ha parametri a sufficienza per calcolarlo ( $k_e = 9 \cdot 10^9\text{ N}$ )

devo calcolare anche il lavoro; ma sappiamo che il lavoro speso è pari alla variazione di energia cinetica perciò

$$W_{OP} = \Delta E_k = E_{kP} - E_{kO} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 - \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{1}{2} m_p v_p^2$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = q' \frac{k_e Q}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \Rightarrow$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2 q' k_e Q}{m_p R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)} = \sqrt{2 \frac{q'}{m_p} (\Phi_0 - \Phi_P)}$$

Si osserva nella relazione trovata che la carica  $q'$  è sempre riferita alla massa  $m_p$ , infatti non si parla di carica se non vi è massa; tale rapporto va calcolato e tenuto ben presente

$$\frac{q_p}{m_p} = \frac{1,6022 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 9,594 \cdot 10^7 \approx 10^8 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

$$\underline{\Phi_0 - \Phi_P} = k_e \frac{Q}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 9 \cdot 10^9 \frac{2,5 \cdot 10^{-8}}{10^{-1}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 22,5 \cdot 10^2 \cdot 0,553 = \underline{\underline{1243,8\text{ Volt}}}$$

$$v_p \approx \sqrt{2 \cdot 10^8 \cdot 1243,8 \cdot 10^2} = 10^5 \sqrt{24,88} \Rightarrow \underline{\underline{v_p \approx 4,98 \cdot 10^5\text{ m/s}}} \quad \text{valore esatto } v_p = 4,88 \cdot 10^5\text{ m/s}$$

Però bene attenzione all'esercizio perché è probabile considerato per il computer

Faciamo alcune osservazioni sull'esercizio appena svolto

- le forze espresse da un campo elettrico sono conservative e ciò implica che

$$W_{AB} = E_{KA} - E_{KB}$$

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB}$$

$$E_{KA} + E_{PB} = E_{KB} + E_{PA}$$

in un campo di forze conservative la somma tra energia cinetica  $E_K$  ed energia potenziale  $E_P$  è  
 $E_K + E_P = \text{costante}$



- se poi ricordiamo che l'energia potenziale è "parente stretta" del prodotto  $q'\phi$  tra la carica che si sposta lungo AB con il potenziale  $\phi$  espresso dalla carica elettrostatica  $Q$ , si può scrivere relazione tra l'energia cinetica  $E_K$  e questo prodotto

$$W_{AB} = E_{KB} - E_{KA}$$

$$W_{AB} = E_{PB} - E_{PA}$$

$$W_{AB} = q'\phi_A - q'\phi_B$$

$$E_{KB} - E_{KA} = q'\phi_A - q'\phi_B$$

$$E_{KB} + q'\phi_B = E_{KA} + q'\phi_A$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Il ritrovato principio di conservazione dell'energia ci pone in intima relazione il **MOTORE UNIFORMEMENTE ACCELERATO** (con  $\Delta v \neq 0$ ) e la carica elettrica  $q'$  che si muove in un **CAMPO ELETTRICO COSTANTE**, al variare del campo elettrico  $E$  corrisponde una variazione di  $E_K$  (con segno invertito) e viceversa:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + q' \frac{kqQ}{r_B} = \frac{1}{2} m v_A^2 + q' \frac{kqQ}{r_A}$$

al variare dell'energia cinetica  $E_K$  della carica  $q'$  corrisponde una variazione del campo elettrico  $E$  prodotto dalla carica elettrostatica  $Q$