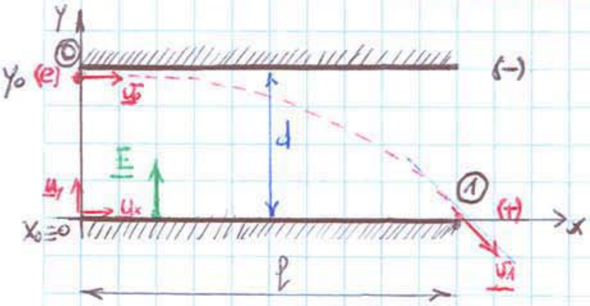
ESERCIZIO n° 2,13 pagina 53

Gli elettroni di un fascio si muovono con velocità $v_0 = 10^6\ m/s$ – Il fascio entra nello spazio compreso tra due piani conduttori carichi, lunghi $l = 10$ cm e distanti $d = 1$ cm, passando molto vicino al piano superiore – Calcolare la differenza di potenziale V che occorre applicare tra i piani affinché il fascio esca rasente al bordo del piano inferiore

RISOLVO



$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C$
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ Kg$
$y_0 = d = 1\ cm = 1 \cdot 10^{-2}\ m$
$v_0 = 10^6\ m/s$

Si suppone essere in regime elettrostatico e se tra i due conduttori applico una ddp si genera un c.E. $\underline{E}$ la cui relazione con il potenziale risulta $\underline{V_1 - V_0 = E\,d}$, se determino $\underline{E}$ ho risolto il problema –
Allo scopo posso guardare alle forze che generano il moto, che sono di tipo elettrico $\underline{F_e}$, e dalla meccanica classica

$\underline{E} = \frac{\underline{F_e}}{q} \rightarrow \underline{F_e} = q\,\underline{E} = (-e)\,\underline{E} = m\,\underline{a}$ se scompongo l'accelerazione in $\underline{a} = \underline{a}_x + \underline{a}_y$ posso cercare le equazioni del moto lungo i due assi

ASSE X

$\underline{F}_{ex} = (-e)\,\underline{E}_x$ ma vale $\underline{E}_x = 0 \rightarrow \underline{F}_{ex} = 0 = m\,\underline{a}_x = m \frac{dv}{dt}\,\underline{u}_x \rightarrow \underline{v_{x} = v_0 = 10^6\ m/s = COSTANTE}$

$\frac{dx}{dt}\,\underline{u}_x = \underline{v}_x \rightarrow x = x_0 + \int_0^t v_0\,dt \Rightarrow \underline{x = v_0 t}$, se pongo $x = l$ posso determinare il tempo t_1 che una particella impiega a percorrere la distanza l

$t_1 = \frac{l}{v_0} = \underline{\underline{10^{-7}\,s = 10\,\mu s}}$

ASSE Y

$\underline{F}_{ey} = (-)e\,\underline{E}_y = m \frac{dv_y}{dt}\,\underline{u}_y \longrightarrow dv_y = (-)\frac{e}{m} E_y\,dt \rightarrow v_y = v_{y0} (-)\frac{e}{m} E t \qquad \underline{\underline{v_y = (-)\frac{e}{m} E_y t}}$

$\frac{dy}{dt} = v_y \longrightarrow y = y_0 + \int_0^t v_y\,dt \Rightarrow \underline{y = y_0 (-)\frac{e}{m} E \frac{1}{2} t^2}$ $y_0 = d$ ed è noto, se poniamo $t = t_1$ risulta essere $y = 0$, perciò posso calcolare E

$0 = d (-)\frac{e}{m} E \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{m}{e}\frac{2d}{t^2} = \frac{m}{e}\frac{2d\,v_0^2}{l^2} = 11{,}3875\ V/m}}$

Ho ora tutti gli elementi per calcolare la ddp richiesta

$\underline{ddp = E \cdot d = 11{,}3875 \cdot 10^{-2} \cong 0.114\ V = 114\ mV}$

Non richiesto ma di facile calcolo la velocità nel punto ① $v_{y1} = (-)\frac{e}{m} E t \cong 2 \cdot 10^5\ m/s = 0{,}2 \cdot 10^6\ m/s$

$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{10^{12} + 0{,}2^2 \cdot 10^{12}} \cong 1{,}02 \cdot 10^6\ m/s$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_{y1}}{v_{x1}} = \operatorname{arctg} \frac{0{,}2 \cdot \cancel{10^6}}{\cancel{10^6}} \cong 11°\ 18'\ 35{,}8''$

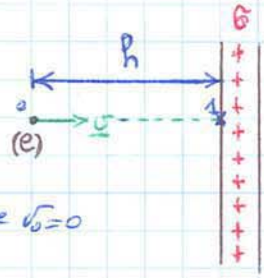
ESERCIZIO n° 2.14 pagina 53

Un elettrone si trova a distanza $h = 10$ cm da un piano indefinito, di materiale isolante, uniformemente carico con densità $\sigma = 1{,}77 \cdot 10^{-6}$ C/m². Calcolare:

a) l'energia cinetica E_e e la velocità v_e con cui l'elettrone arriva sul piano se lasciato libero.

b) ripetere l'esercizio se il piano ha densità di carica $\sigma = (-)\, 1{,}77 \cdot 10^{-6}$ C/m² e la particella è un protone.

RISOLVO



Per determinare l'energia cinetica con cui la particella arriva sul piano possiamo sfruttare

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E_{K_1} - E_{K_0} = qV_0 - qV_1 = \frac{1}{2} m_e v_1^2 - \cancel{\frac{1}{2} m_e v_0^2} = \frac{1}{2} m_e v_1^2 = qV \quad \text{ove si suppone } v_0 = 0$$

per calcolare la ddp ricordiamo che per un piano indefinito $V = Eh$,

mentre il campo elettrico del piano indefinito vale $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} =$

che sostituito sopra ci da $= \frac{1{,}77 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 0{,}1 \cdot 10^{6} = E = 10^5$ V/m

$$V = Eh = 10^5 \cdot 10^{-1} = 10^4 \text{ volt} \xrightarrow{\text{METODO}} \text{1)}\ E_{K_1} = e \cdot V = 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 10^4 \text{ eV} = 10 \text{ KeV}$$

Da qui nota l'energia cinetica $E_K = \frac{1}{2} m_e v_F^2$ immediato è il calcolo della velocità finale dell'elettrone

$$v_{F_e} = \sqrt{\frac{2E_K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \cdot 10^{-15}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}93 \cdot 10^7 \text{ m/s} \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\xrightarrow{\text{METODO}} \text{2)}\ \frac{1}{2} m_e v_F^2 = eV \rightarrow v_F = \sqrt{\frac{e}{m_e} 2V} = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} 2 \cdot 10^4} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \cdot 10^{-15}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_e v_F^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 36 \cdot 10^{14} = 1{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

Se infine invece di un elettrone consideriamo un protone $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ Kg, la densità di carica in valore assoluto non varia perciò

$$\left.\begin{aligned} E_e &= E_p = 10^5 \text{ V/m} \\ V_e &= V_p = 10^4 \text{ V} \end{aligned}\right\}$$

$E_{K_e} = E_{K_p} = eV = 1{,}6 \cdot 10^{-15}$ J l'energia cinetica non dipendendo qui dalla massa rimane INVARIATA

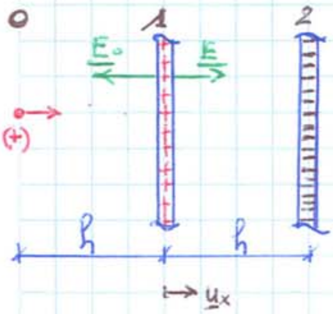
$v_{F_p} = \sqrt{\frac{2E_K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-15}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} \simeq 1{,}38 \cdot 10^6$ m/s la velocità finale del protone invece è diversa perchè funzione della massa.

Si noti qui che $v_p < v_e$, come ci si può aspettare l'elemento più leggero (l'elettrone) acquista una maggiore velocità sotto l'effetto dello stesso E.

ESERCIZIO n° 2,15 pagina 54

Due piani indefiniti isolati di carica $\sigma_1 = 3\sigma$ ed $\sigma_2 = (-)\sigma$ con $\sigma = (+)1{,}77 \cdot 10^{-8}\, C/m^2$ sono distanti $h = 4$ cm - Un protone avente energia cinetica $E_K = 100\, eV$ viene lanciato da distanza $h = 4$ cm dall'esterno verso i due piani - Calcolare con quale energia E_K' raggiunge il II° piano

RISOLVO



Prima mi calcolo l'energia cinetica del protone in 1; allo scopo determiniamo il valore dei campi elettrici

PUNTO 0

Il campo elettrico nel punto 0 si determina quale somma degli effetti

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)} \longrightarrow \underline{E}_0 = (-)\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = (-)\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = (-)\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = (-)\frac{1{,}77 \cdot 10^{-8}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = (-)2 \cdot 10^{3}\, V/m = 2000\, V/m$$

ecco che la tensione tra il punto zero ed il punto 1 si misura in

$$V_0 - V_1 = \Delta V_{01} = E_0 \cdot h = (-)2 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = -80 \text{ volt} \quad \text{chiaramente } V_1 - V_0 = (+)80 \text{ volt}$$

$$E_{K1} - E_{K0} = q\,\Delta V_1 \longrightarrow E_{K1} = E_{K0} + e\Delta V_{01} = 100\, eV + 1\, eV \cdot (-)80 = +20\, eV = 20 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 3{,}2 \cdot 10^{-18}\, J$$

Si nota qui il fatto che $E_{K1} < E_{K0}$ ciò significa che il protone assegnato RALLENTA la sua velocità $E_K = \frac{1}{2} m_p v^2 \to v^2 = \frac{2E_K}{m_p}$ e ciò concorda con il fatto che $V_0 - V_1 < 0$ $V_0 < V_1$; al contrario se per ipotesi si fosse determinato $V_0 > V_1$ allora il protone avrebbe aumentato la sua velocità -

PUNTO 1

Ancora una volta faccio la somma degli effetti per determinare il campo elettrico presente tra le armature

$$\underline{E} = \underline{E}_{(+)} + \underline{E}_{(-)} \longrightarrow \underline{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = (+)\frac{2\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-8}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 4 \cdot 10^{3}\, V/m = 4000\, V/m$$

$$V_1 - V_2 = E \cdot h = 4 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = \Delta V_{12} = (+)160 \text{ volt}$$

$$E_{K2} = E_{K1} + e\Delta V_{12} = 20\, eV + 1\, eV \cdot (+)160 = +180\, eV = 180 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 2{,}88 \cdot 10^{-17}\, J$$

Si osserva qui che essendo $V_1 > V_2$ la particella acquista velocità e quindi energia cinetica; non richiesto ma facile calcolo

$$v = \sqrt{\frac{2E_K}{m_p}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}38 \cdot 10^{5}\, m/s$$

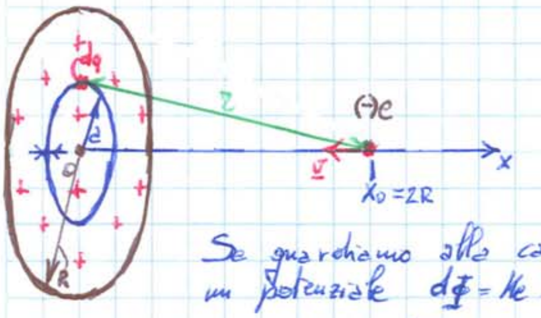
$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 0{,}62 \cdot 10^{5}\, m/s$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 180 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}86 \cdot 10^{5}\, m/s$$

ESERCIZIO n° 2.17 pagina 54

Sull'asse di un disco di materiale isolante di raggio $R = 10$ cm, uniformemente carico con carica $q = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ C, è posto un elettrone a distanza $x_0 = 2R$ dal centro O del disco.
Calcolare la velocità v con cui l'elettrone arriva al centro del disco quando viene lasciato libero

RISOLVO



Per il principio di conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$E_{k_0} - E_{k_{x_0}} = q(V_x - V_0)$$

$$\frac{1}{2} m_e v_0^2 =$$

e nell'ipotesi di $v_{x_0} = 0 \rightarrow E_{k x_0} = 0$ dobbiamo perciò calcolare il potenziale generato dal disco

Se guardiamo alla carica infinitesima $dq = \sigma\, ds$, essa produce sull'elettrone un potenziale $d\Phi = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}} = k_e \frac{\sigma ds}{\sqrt{a^2+x^2}}$, la superficie infinitesima ds si può pensare come l'anello infinitesimo di raggio a e spessore $da \rightarrow ds = 2\pi a\, da$

$$\Phi = \int_0^R d\Phi = \int_0^R \frac{k_e \sigma}{\sqrt{a^2+x^2}} ds = k_e\sigma \int_0^R \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+x^2}} da = k_e \sigma \pi \int_0^R \frac{2a}{\sqrt{a^2+x^2}} da =$$

se poniamo $t = a^2 + x^2$
$dt = 2a\, da$
se $a = 0 \rightarrow t = x^2$
se $a = R \rightarrow t = R^2 + x^2$

$$= k_e \sigma \pi \int_{x^2}^{R^2+x^2} t^{-1/2} dt = k_e \sigma \pi \left(2 t^{1/2}\right)\Big|_{t=x^2}^{t=R^2+x^2} = \underline{k_e 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)} =$$

nel nostro caso $\begin{cases} \text{in } 0 & x = 0 \\ \text{in } x_0 & x = 2R \end{cases}$ mentre $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}$

$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right) = \Phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$$

sostituendo i valori numerici otteniamo

$$q\left(V_x - V_0\right) = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+4R^2} - 2R - R\right] = (-)e\frac{q}{\pi R^2 2\varepsilon_0}\left[R\sqrt{5} - 3R\right] = q\Delta V = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8}}{2\pi\, 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-1}}\left(3 - \sqrt{5}\right) = \frac{1{,}6 \cdot 2{,}5}{2\pi\, 8{,}85} 10^{-14}\left(3 - \sqrt{5}\right) = 0{,}0549 \cdot 10^{-14} \simeq 5{,}5 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

$$\Delta V = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \sqrt{5}\right) \simeq 220\ \mu V$$

ritornando alla relazione iniziale di conservazione dell'energia si determina

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = q\Delta V = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{q \frac{e}{m} \frac{1}{\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \sqrt{5}\right)}}$$

$$v_0 = \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \cdot \frac{1}{\pi 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-1}}\left(3 - \sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 1{,}6}{9{,}1\pi 8{,}85}\left(3 - \sqrt{5}\right) 10^{14}} \simeq \sqrt{12 \cdot 10^{14}} = 2\sqrt{3}\, 10^{7}$$

$$v_0 \simeq 3{,}46 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}$$