24 aprile 2007 martedì – FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO 18:15 ÷ 19:45

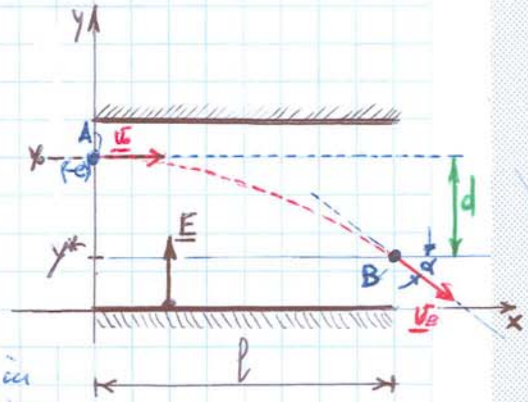
lezione n°4 di 20

Riprendiamo la lezione con un'altro esercizio significativo della relazione tra energia cinetica e potenziale (d.d.p.) di una carica $q' = e$ soggetta ad un campo elettrico $\underline{E}$

ESERCIZIO 2.12 pagina 53

Un elettrone $(-e)$ entra, con velocità $v_0 = 10^7$ m/s, in una regione di lunghezza $l = 4$ cm, in cui agisce un campo elettrico $E = 10^4$ V/m, uniforme, perpendicolare a v_0 – Calcolare
a) lo spostamento d rispetto alla direzione iniziale dopo l'attraversamento della regione
b) l'energia cinetica ΔE_k acquistata (in eV) nel percorso

RISOLVO



I valori iniziali sono
$$\begin{cases} v_0 = 10^7 \text{ m/s} \\ l = 4 \text{ cm} = 4\cdot 10^{-2} \text{ m} \\ E = 10^4 \text{ V/m} \\ q' = (-e) = 1{,}6022\cdot 10^{-19} \text{ C} \end{cases}$$
e per risolvere il problema posto è necessario risolvere le equazioni del moto dell'elettrone $(-e)$ -
La forza che genera il moto di $(-e)$ è una forza elettrica $\underline{F_e}$, ed in termini vettoriali è legata al campo elettrico $\underline{E}$ dalla definizione di questo

$$\frac{\underline{F}}{q'} = \frac{\underline{F_e}}{(-e)} = \underline{E} \implies \underline{F_e} = (-e)\underline{E} \overset{\text{dalla}}{\underset{\text{meccanica}}{=}} m\frac{dv}{dt} \quad \text{considerato che } \underline{E} = \cancel{\underline{E_x}} + \underline{E_y} = \underline{E_y}$$

lungo asse $x \longrightarrow \underline{F_x} = (-e)\cancel{\underline{E_x}} = m\frac{dv_x}{dt}\underline{u_x} = 0 \implies \underbrace{\frac{dv_x}{dt} = 0}$ moto con velocità costante $\underline{v_x = v_0 = \text{COSTANTE}}$

lungo asse $y \longrightarrow \underline{F_{ey}} = (-e)\underline{E_y} = m\frac{dv_y}{dt}\underline{u_y} \implies \underbrace{\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m}E}$ per la costanza dei termini al II° membro $\frac{eE}{m}$ ed il segno negativo (-) lungo y ho MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO VERSO IL BASSO

$$\underbrace{v_y} = -\frac{eE}{m}\int_0^t dt = \underbrace{-\frac{eE}{m}t}$$

Ricordando che per la posizione iniziale in A, le condizioni al contorno sono $\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$

lungo asse $x \longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_x \longrightarrow \boxed{x = \cancel{x_0} + v_0 t}$

lungo asse $y \longrightarrow \frac{dy}{dt} = v_y \longrightarrow \boxed{y = y_0 - \frac{eE}{m}\frac{1}{2}t^2}$

equazioni del moto dell'elettrone $(-e)$ nel tragitto l

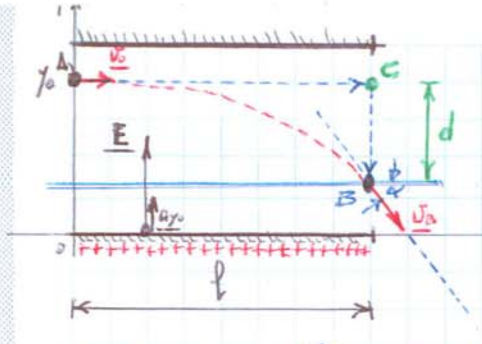
Il tempo t^* necessario all'elettrone e per coprire la distanza l vale

$l = v_0 \cdot t^* \rightarrow t^* = l/v_0$ che inserito nell'equazione di y dà $\boxed{y^* = y_0 - \frac{eE}{m}\frac{1}{2}\frac{l^2}{v_0^2}}$ che infine permette di calcolare la distanza d cercata

$$d = y - y^* = \left(y_0 - \frac{eE}{m}\frac{1}{2}\cancel{t^2}0\right) - \left(y_0 - \frac{1}{2}\frac{eEl^2}{mv_0^2}\right) = \boxed{+\frac{1}{2}\frac{eEl^2}{m_e v_0^2}} = \frac{1}{2}\frac{1{,}6022\cdot 10^{-19}\cdot 10^4\cdot 16\cdot 10^{-4}}{\underbrace{9{,}11\cdot 10^{-31}}_{\text{massa elettrone}}\cdot 10^{+14}}$$

$$= \frac{1{,}6022\cdot 16}{2\cdot 9{,}11}\frac{10^{34}}{10^{33}} = \underline{d \simeq 1{,}407\cdot 10^{-2} \text{ m} \simeq 1{,}41 \text{ cm}}$$

$$t^* = \frac{4\cdot 10^{-2}}{10^{+7}} = 4\cdot 10^{-9} = 4 \text{ nano secondi}$$



La traiettoria dell'elettrone è simile alla gittata di un proiettile, che si muove soggetto alla forza di gravità, con moto parabolico e che sia parabolico lo si vede dal termine $t=x$

$y = y_0 - \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$ di questa parabola posso dire che

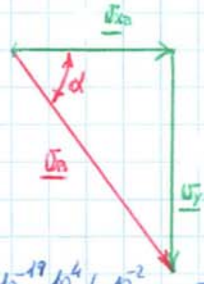
- ha la concavità rivolta verso il basso perché x^2 ha coefficiente negativo (-)
- assume valore massimo con $x=0 \to y_{max}=y_0$
- è simmetrica rispetto all'asse y perché manca la x con grado 1

Dal punto B l'elettrone "esce" dall'influenza del campo elettrico e prosegue con moto rettilineo ed angolo di deflessione α rispetto all'orizzontale; non richiesto dal testo ma facilmente calcolabili questi parametri

- ANGOLO DI DEFLESSIONE α

Posso calcolarlo attraverso due metodi
- con derivazione della funzione $y=y_0-\frac{eE}{2mv_0^2}x^2$
- attraverso il rapporto $tg\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}$

utilizziamo il II° metodo proposto e calcoliamo



$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 &\longrightarrow \text{per } t=t^* \ (v_x)_l = v_0\\ \frac{dy}{dt} = -\frac{eE}{m}t &\longrightarrow \text{per } t=t^* \ (v_y)_l = -\frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}\end{aligned}\right\}$$

$$tg\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{eEl}{mv_0^2} = -\frac{1,6022\cdot10^{-19}\cdot10^4\cdot4\cdot10^{-2}}{9,11\cdot10^{-31}\cdot10^{14}} \simeq 0,7035 \Rightarrow \alpha = 35°,126$$

- VELOCITÀ ALL'USCITA B

La direzione è quella indicata sopra per v_B mentre il suo modulo si calcola con

$$v_B = \sqrt{v_{xB}^2+v_{yB}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{-eE}{m}\frac{l}{v_0}\right)^2} = \sqrt{10^{14}+\left(\frac{1,6022\cdot10^{-19}\cdot10^4\cdot4\cdot10^{-2}}{9,11\cdot10^{-31}\cdot10^7}\right)^2} = \sqrt{10^{14}+\left(\frac{1,6022\cdot4}{9,11}\right)^2\cdot10^{14}} = 10^7\sqrt{1+0,4949}$$

$$v_B \simeq 1,223\cdot10^7 \ m/s$$

all'uscita vi è un incremento in termini assoluti della velocità di circa il 22,3%

- DENSITÀ SUPERFICIALE

Altro parametro non richiesto ma facilmente calcolabile: considerato che il campo elettrico si sviluppa tra due superfici parallele, al loro interno

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \longrightarrow \sigma = E\varepsilon_0 = 10^4\cdot8,85\cdot10^{-12} = \sigma = 8,85\cdot10^{-4} \ C/m^2$$

Torniamo ai quesiti del testo: per calcolare ΔE_k devo conoscere v_B, allo scopo due metodi
- calcolo i moduli v_{xB} e v_{yB} dopodiché $v_B^2 = v_{xB}^2+v_{yB}^2$ (come già fatto sopra)
- sfrutto il principio di conservazione dell'energia

Utilizziamo questo secondo metodo, per verificare con i calcoli sopra

$$E_{kB} - E_{kA} = q'\Phi_A - q'\Phi_B \longrightarrow E_{kB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \overset{e}{q'}(\Phi_A - \Phi_B)$$

Il calcolo del potenziale $\Phi_A - \Phi_B = \int_A^B \underline{E}\,d\underline{s}$, considerato che le forze in gioco sono conservative, può essere fatto lungo un qualsiasi percorso.
Si sceglie così un "modo intelligente" di calcolare $AB = \overline{AC}+\overline{CB}$ come somma di due tratti rettilinei e rispettivamente paralleli all'asse x e poi all'asse y

$$\Phi_A - \Phi_B = \int_A^B \underline{E}\,d\underline{s} = \cancel{\int_{x_A}^{x_B} E\,\underbrace{\underline{u}_{y_0}\cdot\underline{u}_x}_{1\cdot1\cdot\cos(\pi/2)=0}\,dx}^{\,0} + \int_{y_A}^{y_B} E\,\underbrace{\underline{u}_{y_0}\cdot\underline{u}_y}_{1\cdot1\cdot\cos0=1}\,dy$$

notare che dopo il versore u_{y_0} del campo elettrico uso $\underline{u}_y$ e non $-\underline{u}_y$ perché già gli estremi di integrazione y_A ed y_B indicano un verso discendente ↓

$$= \int_{y_A}^{y_B} E\,dy = \underset{\text{costante}}{E}\int_{y_A}^{y_B} dy = \Phi_A - \Phi_B = \underbrace{E(-d)}_{E(y_B-y_0)} = E\left(+\frac{eEl^2}{2mv_0^2}\right) = (+)\frac{1,6022\times8}{9,11}\cdot10^2 \simeq 140,7 \ V$$

Sostituendo sopra si ottiene

$$E_{KB} = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \overset{(+)}{-} eE(-d) = \frac{1}{2} m v_0^2 + eEd = \frac{1}{2} m v_0^2 + eE \frac{eE\ell^2}{2m v_0^2} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{eE\ell}{v_0}\right)^2$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eE\ell}{2 v_0}\right)^2}$$

$v_B \simeq 1{,}223 \cdot 10^7 \, m/s$ valore perfettamente uguale a quello già determinato (CVD)

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_0^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \left(1{,}4949 - 1\right) 10^{14} = 2{,}254 \cdot 10^{-17} \, J$$

Per dare il risultato in eV considerato che $\begin{cases} 1\,eV = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,J \\ 1\,J = 6{,}25 \cdot 10^{18}\,eV \end{cases}$ $\Delta E_K = 2{,}254 \cdot 10^{-17} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18} = 140{,}88\,eV$

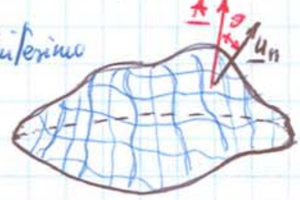
→ Esercizi per casa: da testo vedere esercizi 2.13 ÷ 2.17 pagg 53-54 (n° 2.16 già svolto a lezione)
" " " esercizio n° 2.25

FLUSSO (ELETTRICO)

Introduciamo ora un nuovo concetto utile anch'esso per il proseguo degli studi partendo ancora una volta dalla legge di Coulomb -

- L'interazione tra due cariche elettriche genera una forza elettrica $\underline{F_e} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \underline{u_r}$
- nel caso elettrostatico, la carica Q genera un campo elettrico che vale $\underline{E} = K_e \frac{Q}{r^2} \underline{u_r}$

ed è proprio nella definizione di campo elettrico che è racchiuso il concetto di flusso; vediamo come esplicitarlo -

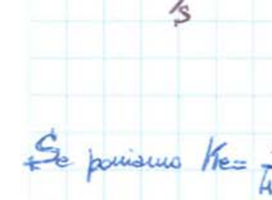


Si abbia una superficie S NON piana e dS un suo elemento infinitesimo per ogni superficie dS posso considerare
- un generico vettore $\underline{A}$ per dS (costante)
- la normale $\underline{u_n}$ alla superficie dS

si pone inoltre la condizione che S DEVE ESSERE CHIUSA

FLUSSO: del vettore $\underline{A}$ attraverso la superficie chiusa dS l'integrale $$\boxed{\Phi = \int_S \underline{A}\, \underline{u_n}\, dS}$$

LEGGE DI GAUSS



Dal generico concetto di flusso, se considero il vettore $\underline{A}$ come quello prodotto da un campo elettrico $\underline{A} = \underline{E}$ ed imponiamo che la superficie S sia una sfera di raggio r e centro coincidente con la carica Q (STATICA) che genera il campo di cui sopra, $S = 4\pi r^2$ mentre il campo ha direzione radiale $\underline{u_r}$ con verso "uscente" dalla sfera -

Se applico a tale situazione la definizione di flusso ottengo

$$\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\, \underline{u_n}\, dS = \oint_S \underbrace{E\, \cancel{\underline{u_r}}\, \cancel{\underline{u_n}}}_{A \cdot A \cdot \cos 0}^{1} dS = \oint_S \underbrace{\frac{K_e Q}{r^2}}_{\text{COSTANTE IN TUTTA S}} dS = \frac{K_e Q}{r^2} \oint_S dS$$

$$\frac{K_e Q}{\cancel{r^2}} 4\pi \cancel{r^2} = \boxed{\Phi(\underline{E}) = 4\pi K_e Q}$$

notare che il flusso elettrico dovuto al campo elettrostatico NON dipende dal raggio r (esempio lampadina)

Se poniamo $K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ si ottiene

$$\boxed{\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\, \underline{u_n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$ ← LEGGE DI GAUSS

Considerato che il flusso NON dipende dal raggio r, nel caso elettrostatico, si può immaginare che la carica Q NON occupi la posizione centrale O della sfera, oppure ancora che la superficie NON sia sferica ma qualsiasi (anche irregolare), anche in tali ipotesi $\Phi(\underline{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ il risultato NON cambia -

Per un sistema di cariche $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ vale il principio di sovrapposizione degli effetti: (purché interne ad S chiusa); infatti ciascuna carica

- produce un campo elettrico $\underline{E}_i$ che concorre a formare $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_n$
- produce un flusso Φ_i misurato come $\Phi_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0};\ \Phi_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0};\ \dots;\ \Phi_n = \frac{Q_n}{\varepsilon_0}$

calcolando il flusso prodotto dal campo elettrico totale si ottiene

$$\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\,ds = \oint_S (\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_n)\,\underline{u}_n\,ds = \oint_S \underline{E}_1 \underline{u}_n\,ds + \oint_S \underline{E}_2 \underline{u}_n\,ds + \dots + \oint_S \underline{E}_n \underline{u}_n\,ds = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} + \dots + \frac{Q_n}{\varepsilon_0}$$

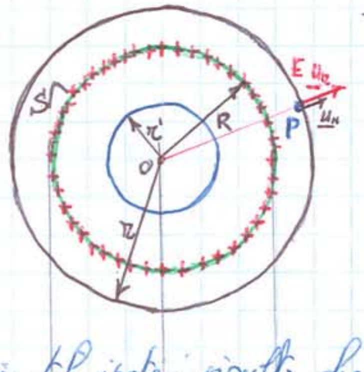
La legge di Gauss stabilisce che: il flusso di un campo elettrostatico $\underline{E}$ prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa S, è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per ε_0.

$$\boxed{\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\,ds = \sum_1^n \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}}$$

L'unità di misura del flusso del CAMPO ELETTROSTATICO è il volt·metro $[V \cdot m]$ in quanto si è visto essere il prodotto tra un campo elettrico ed una superficie $\rightarrow E \cdot S = \frac{V}{m} \cdot m^2$

Si è detto più volte implicitamente, ma chiariamo ancora una volta che: le cariche ESTERNE alla superficie S NON danno contributo al flusso $\Phi(\underline{E})$ non dimostreremo

ESEMPIO: CAMPO $\underline{E}$ A DISTRIBUZIONE SFERICA superficiale DI CARICA (3.1 pagina 62)



Se $r'<R$: all'interno della superficie S non c'è carica e per quanto sopra (non dimostrato) all'interno di una distribuzione superficiale sferica uniforme il campo elettrostatico è nullo $E=0$ e così pure il flusso $\Phi(E)=0$

Se $r>R$: partiamo qui dalla definizione di flusso $\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\,ds$
c'è il problema di capire secondo quale direzione agisce il campo elettrico $\underline{E}$ e quale verso.
E' qui necessario un "AIUTINO", si suppone che
- il campo elettrico dipende dalla distanza r di P dal centro O, $\underline{E} = E(r)$
- che il campo elettrico abbia direzione radiale $\underline{u}_r$ "uscente" dalla sfera

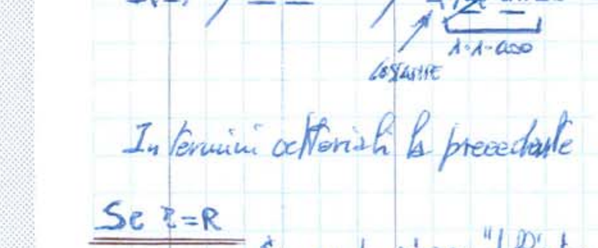
in tali ipotesi risulta che $\underline{u}_r \parallel \underline{u}_n$, e per una stessa distanza r vi è costanza del campo $E(r) = \text{cost}$

$$\Phi(\underline{E}) = \oint \underline{E}\,\underline{u}_n\,ds = \oint \underbrace{E(r)}_{\text{costante}} \underbrace{\underline{u}_r\,\underline{u}_n}_{1\cdot 1\cdot \cos 0}\,ds = E(r) \underbrace{\oint ds}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E(r)\,4\pi r^2 \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

In termini vettoriali la precedente vale $\boxed{\underline{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\underline{u}_r}$ CAMPO ELETTRICO ESTERNO AD UNA SFERA DI RAGGIO R

Se $r=R$

Se guardo $r' \rightarrow R$ "dall'interno" del campo elettrico $\underline{E}$ rimane sempre nullo
Se guardo $r \rightarrow R$ la $E(r) \rightarrow \sigma/\varepsilon_0$ perciò $\boxed{E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$



Se vogliamo riportare in un grafico il risultato si nota che nel passare da $r'<R<r$ vi è una discontinuità σ/ε_0; tale discontinuità conferma il teorema di COULOMB