5 maggio 2007 sabato - FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO 8:30÷11:30

Lezione n° 5&6 di 20

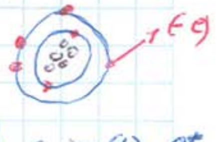
MATERIALI CONDUTTORI & DIELETTRICI

Abbiamo già visto nelle prime lezioni che i materiali possono dividersi in due grandi categorie
- conduttori
- isolanti detti anche dielettrici

I conduttori sono generalmente materiali di tipo metallico e sono dotati al loro l'interno di un numero N di cariche libere molto elevato

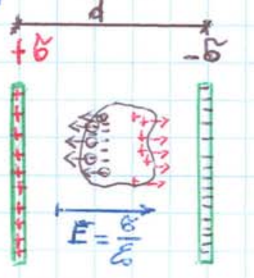
Gli isolanti sono generalmente materiali non metallici dotati al loro interno di un numero di cariche N libere molto piccolo (esempio ARIA - CARTA - MICA)

La possibilità che vi sia uno spostamento di cariche nei conduttori si spiega considerando la struttura atomica di un elemento, che come ben si sa è composto da protoni nel nucleo ed elettroni (-e) che ruotano attorno a questo.



Nel legame metallico, gli elettroni appartenenti agli orbitali esterni sono soggetti a forze di legame debole al punto tale da permetterne la fuoriuscita; una carica si libera (-e) e l'elemento acquisisce a sua volta carica (+) q^+

Supponiamo dunque di avere un corpo conduttore (metallico) e di inserirlo tra due piani rispettivamente con carica superficiale $+\sigma$ e $-\sigma$ posti alla distanza d.



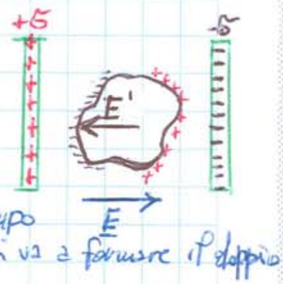
Per effetto della diversa densità di carica sappiamo che tra le due superfici piane viene a formarsi un campo elettrico $\underline{E}$ con direzione $\perp$ alle due e con verso da $(+)\sigma$ a $(-)\sigma$ ed intensità $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Sul corpo metallico così introdotto, si nota una migrazione delle cariche (quando soggetto all'azione di $\underline{E}$) e difronte alla lastra $+\sigma$ si accumulano le cariche negative, mentre difronte alla lastra $-\sigma$ si accumulano le cariche positive (+) del corpo metallico

Detto altrimenti: sulla faccia verso $-\sigma$ trovo delle cariche $q=+e$ ed una $\underline{F_e} = q\underline{E} = +e\underline{E}$
sulla faccia verso $+\sigma$ trovo delle cariche $q=-e$ ed una $\underline{F_e} = q\underline{E} = -e\underline{E}$

Le cariche negative (-) si ammassano dalla parte OPPOSTA della direzione del campo elettrico $\underline{E}$
Le cariche positive (+) si ammassano dalla STESSA parte della direzione del campo elettrico $\underline{E}$

Il moto delle cariche interne al conduttore genera due superfici con eccesso di carica opposte (DOPPIO STRATO) tra le quali vi è un CAMPO ELETTROSTATICO INDOTTO $\underline{E'}$, tale campo ha stessa direzione di $\underline{E}$ ma verso opposto, e che contrasta il movimento degli elettroni



Vi sono infine le cariche interne al conduttore, le quali danno luogo ad un campo elettrico che diremo interno $\underline{E_{int}}$, che nel momento iniziale è pari ad $\underline{E}$, ma via via che si va a formare il doppio strato si calcola come
- in termini vettoriali $\boxed{\underline{E}_{int} = \underline{E} + \underline{E'}}$
- in termini scalari $\boxed{E_{int} = E - E'}$

se dopo il tempo τ raggiungo un equilibrio $\boxed{E_{int} = E - E' = 0}$ DEFINIZIONE DI EQUILIBRIO ELETTROSTATICO

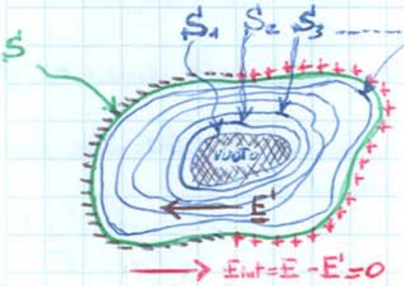
Ricapitoliamo

- il corpo conduttore non soggetto ad alcun campo elettrico $\underline{E}$ "esterno" è in una condizione di equilibrio e misuriamo $\underline{E}_{int}=0$

- applichiamo (introduciamo) il corpo conduttore ad un campo elettrico $\underline{E}$ "esterno", il suo equilibrio interno viene perturbato e
  - nel momento iniziale $\underline{E}_{int}=\underline{E}$ con stesso verso e direzione, si innesca una forza elettrica verso gli elettroni liberi $\underline{F_e}=-e\,\underline{E}_{int}=-e\underline{E}$ che li fa migrare in senso opposto al campo e producendo così una SEPARAZIONE DI CARICHE
  - dopo il 1° istante in cui è applicato $\underline{E}$ inizia la separazione delle cariche e si genera un DOPPIO STRATO che forma un campo elettrico $\underline{E}'$; ora vale $\underline{E}_{int}=\underline{E}+\underline{E}' \rightarrow E_{int}=E-E'\neq 0$
  - dopo un tempo τ si raggiunge un nuovo equilibrio, in quanto le cariche raggiunta la superficie del corpo non possono migrare oltre, e si misura $E_{int}=E-E'=0$, abbiamo ancora un equilibrio elettrostatico e la forza elettrica torna nulla $\underline{F_e}=0$ mentre $E'=E$

Vediamo ora 3 importanti proprietà dei conduttori

I^a PROPRIETÀ: { all'interno di un conduttore non può esserci eccesso di carica elettrica ←
l'eccesso di carica elettrica può stare solo sulla superficie di un conduttore ←



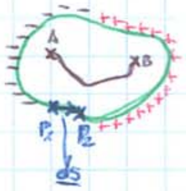
La dimostrazione è semplice applicazione del teorema di GAUSS ad una qualsiasi superficie $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \dots \subset S_i \subset S$ chiusa e tracciata all'interno del conduttore –
All'equilibrio so di avere un "DOPPIO STRATO" dovuto alla separazione delle cariche che genera un campo elettrico $\underline{E}'$, ma di sicuro per qualsiasi superficie "interna" questo eccesso di cariche superficiale NON genera un flusso interno; vale inoltre $\underline{E}_{int}=0$ per la condizione di equilibrio elettrostatico imposta

$$\Phi(\underline{E})^i = \oint_{S_i} \underline{E}_{int}\,\underline{u}_n\, ds = \oint_{S_i} 0\cdot\underline{u}_n\, ds = 0 = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$

considerato il fatto $\varepsilon_0 \Rightarrow \underbrace{\Sigma Q_i = 0}$ ossia vi è equilibrio nelle cariche

Se per ogni superficie interna S_i vi è equilibrio delle cariche $\Sigma Q_i=0$, l'eccesso di carica elettrica si concentra SOLO sulla superficie; ciò vale anche se il conduttore ha una cavità al suo interno

II^a PROPRIETÀ: { il conduttore è un corpo equipotenziale ←
il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore ←



Anche qui la semplice applicazione della definizione di potenziale V_A-V_B tra due qualsiasi punti A & B del conduttore, unita alla condizione di $\underline{E}_{int}$ alla condizione di equilibrio ci dimostra che

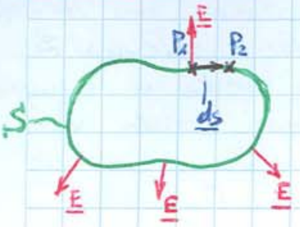
$$V_A - V_B = \int_A^B \underline{E}_{int}\,\underline{ds} = 0\int_A^B \underline{ds} = 0 \Rightarrow \underbrace{V_A = V_B}$$

La proprietà vale comunque si prendano A & B: sia "interni" al conduttore che sulla sua superficie.
Tale proprietà permette di affermare che: il lavoro fatto dalle forze del campo elettrostatico che si sposta da un punto ad un altro di una superficie equipotenziale è nullo

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F_e}\,ds = \int_A^B q'\,\underline{E}_{int}\,\underline{ds} = q'\int_B^A \underline{E}_{int}\,\underline{ds} = q'\,(\cancel{V_A-V_B}^{\,0}) = 0$$

La proprietà, va osservato che, ha validità generale per le superfici equipotenziali, anche se non si è in presenza di un conduttore –

III^ PROPRIETÀ: in un conduttore il campo elettrostatico $\underline{E}$ è sempre ortogonale alla superficie



Riconsideriamo il lavoro svolto per spostare una carica dal punto P_1 al punto P_2, ma questa volta poniamo l'ulteriore condizione che lo spostamento avvenga sulla superficie S;

dalla definizione di lavoro $dW = \underline{F}\cdot \underline{ds} = q'\underline{E}\,\underline{ds}$
per superfici equipotenziali $dW \overset{!}{=} 0$

ma $q' \neq 0$, e $\underline{ds}$ in ogni punto è il vettore tangente la superficie S ($\underline{ds} \neq 0$); rimane il caso

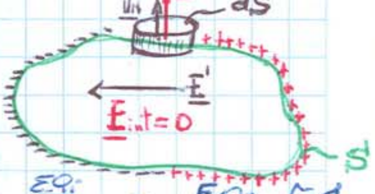
- $\underline{E} = 0$, si verifica se il conduttore NON è soggetto a campo elettrico esterno ed è il caso meno interessante
- $\underline{E} \neq 0$, si verifica in presenza del "DOPPIO STRATO" dovuto alla separazione delle cariche, in tale situazione $\underline{E}\cdot\underline{ds}$ indica che i due vettori sono ortogonali $\underline{E} \perp \underline{ds}$

Anche in questo caso si osserva la validità generale della proprietà: la direzione del campo elettrico è sempre ortogonale alle superfici equipotenziali

Dalle precedenti è possibile calcolare il campo elettrico $\underline{E}$ del conduttore, per il quale già sappiamo avere direzione $\perp$ alla superficie S e verso "uscente" da essa; il calcolo è fattibile attraverso due diverse strade che utilizzano rispettivamente i teoremi seguenti

CON GAUSS: preso un cilindro retto di basi dS (esempio "scatoletta di tonno") una posta all'interno del conduttore e l'altra all'esterno, con altezza infinitesima e trascurabile, il flusso verrà solo sulla base esterna

$$d\Phi = \underline{E}\,\underline{u}_n\, ds$$
$$\overset{!}{=} E\,\underline{u}_E\cdot\underline{u}_n\, ds \qquad \begin{cases} \underline{u}_E \parallel \underline{u}_n \\ \underline{u}_E \text{ stesso verso } \underline{u}_n \\ \underline{u}_E\cdot\underline{u}_n = 1\cdot 1\cdot \cos\varphi = 1 \end{cases}$$
$$\overset{!}{=} E\, ds$$



Considerato poi che la densità di carica sulla superficie S vale $\sigma = \frac{\Sigma Q_i}{S} \rightarrow \Sigma Q_i = \sigma S$
applicando ora Gauss

$$\Phi(E) = \oint_S d\Phi = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\, ds = \oint_S E\, ds = E\oint_S ds = \underbrace{ES}_{} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}}_{}$$

$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ in termini vettoriali vale $\boxed{\underline{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\underline{u}_n}$ CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE

CON COULOMB

Assimilando la superficie del conduttore come composta da tanti dischetti nell'attraversarli, per il teorema di Coulomb si registra una discontinuità del campo elettrico pari a $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ma questo ΔE è il campo elettrico dovuto al "DOPPIO STRATO" generato dalla separazione delle cariche, e ricordando la I^ proprietà in cui $E_{int} = 0$ si può scrivere all'equilibrio elettrostatico

$$E_{int} = E - E'$$
$$\hookrightarrow \quad E' = \Delta E = E - \cancelto{0}{E_{int}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

il che conferma il risultato raggiunto con l'impiego del teorema di Gauss, ma che ha richiesto un po' più di lavoro.

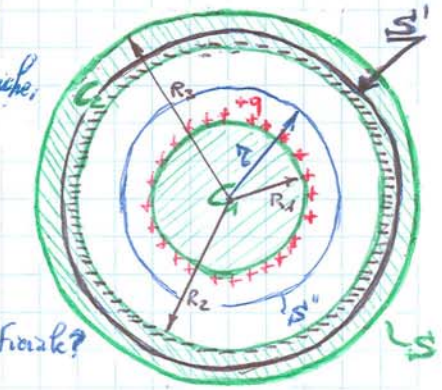
Un'applicazione pratica della 1ª proprietà, le cariche si accumulano solo sulla superficie di un conduttore, è la così detta gabbia di Faraday -
Si ha qui un oggetto ove non si vuole arrivino delle cariche elettriche, esempio un edificio o un'attrezzatura, e per proteggerlo gli si costruisce attorno un reticolo a maglie fitte di materiale conduttore che funge da superficie esterna S -

Se ora bombardiamo il tutto con delle cariche Q, esempio dei fulmini prodotti da fenomeni atmosferici, accade che dette cariche si accumulano solo sulla gabbia/superficie esterna, da qui possono essere raccolte e trasportate verso terra senza che l'oggetto/il corpo da proteggere sia in qualche modo influenzato dal fenomeno -

L'esperienza appena esposta suggerisce di studiare un po' più attentamente il caso

SCHERMO ELETTROSTATICO

Consideriamo un conduttore C_2 sferico, per semplicità geometrica, e cavo il cui raggio interno sia R_2 e quello esterno R_3; all'interno della cavità di questo poniamo una sfera (non necessariamente cava) quale conduttore C_1 e senza nessun punto di contatto con C_2 -



Supponiamo di trasferire dalla sfera esterna C_2 verso C_1 delle cariche, così facendo sulla superficie di C_1 viene a crearsi un eccesso di carica $+q$, mentre sul corpo conduttore C_2 si misurerà un eccesso di carica $-q$ -
La domanda che ora è lecito porsi è: IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO la carica $-q$ di C_2 si accumula sulla parete interna di raggio R_2 perché attirata da $+q$, oppure sulla parete esterna di raggio R_3 in osservanza al principio generale di distribuzione superficiale?

Per Gauss $-q$ è distribuita sulla superficie di raggio R_2 in quanto, considerata una generica superficie S' interna a C_2 e contenente la cavità con il conduttore C_1 risulta che

- il conduttore sferico C_1 genera in prossimità della propria superficie un campo elettrico $E_1(R_1) = \frac{+q}{4\pi R_1^2 \varepsilon_0}$, mentre via via che ci si allontana per $r > R_1$ $E_1(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$
- il conduttore C_2 è sì influenzato da E_1 ma al suo interno risulta $E_{2int} = 0$ perché in equilibrio, perciò su S' non vi è flusso

$$\oint_{S'} \underline{E}_{int}\, \underline{u}_n\, ds = 0 = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$

ma $\Sigma Q_i = (+q) + (-q) = 0$ cioè la carica $(-q)$ deve stare "interna" a C_2 altrimenti risulterebbe $\Sigma Q_i = (+q) \neq 0 \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

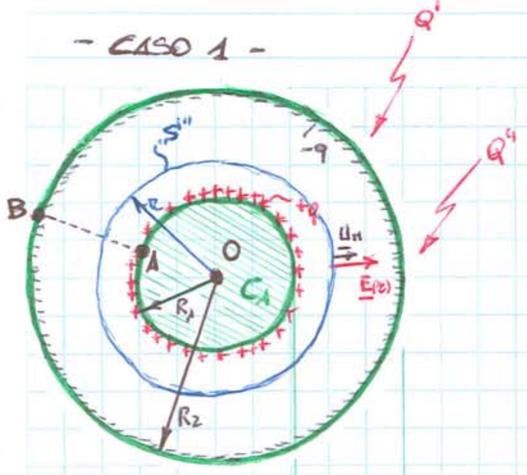
Il conduttore C_2 può assumere uno spessore molto sottile, che si può pensare fungere da schermo elettrostatico di un corpo conduttore C_1 il quale genera un campo elettrico $\underline{E}_1$ -
Diremo tale schermo SUPERFICIE DI GAUSS al cui interno misuro, per $r < R_2$

$$\oint_{S''} \underline{E}_1\, \underline{u}_n\, ds = \frac{+q}{\varepsilon_0}$$

nel valutare il flusso attraverso la superficie S'' di raggio $R_1 < r < R_2$ le cariche $-q$ non entrano in gioco perché esterne a tale superficie

ed all'interno di tale schermo, cioè sulla sua superficie interna, ho un eccesso di carica che vale $-q$

- CASO 1 -



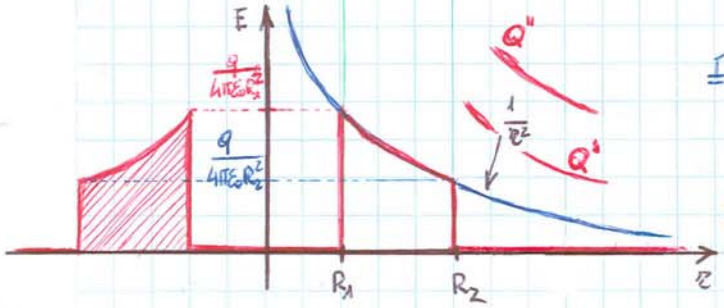
Vediamo come calcolare il campo elettrico dello schermo elettrostatico, qui al solito è necessario qualche ipotesi, che già conosciamo come "AIUTINO":

- il campo elettrico E_1 generato da C_1 dipende dalla distanza r dal centro O della sfera
- il campo elettrico ha direzione u_r radiale

a seguito di dette ipotesi posso scrivere

$$\oint_{S''} \underline{E_1}(r)\, \underline{u_n}\, ds = \oint_{S''} E_1(r) \underbrace{\underline{u_r}\, \underline{u_n}}_{1\cdot 1\cdot \cos 0 = 1} ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= E_1(r) \oint_{S''} ds = E_1(r)\, 4\pi r^2 = \; \rightarrow \; \boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



in termini vettoriali scriveremo

$$\boxed{\underline{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \underline{u_r}}$$

CAMPO ELETTRICO INTERNO A SCHERMO ELETTROSTATICO CON $R_1 < r < R_2$

Vediamo poi anche la funzione potenziale come si determina, allo scopo se come (spostamento) percorso ds scelgo un percorso radiale, vale cioè

$$\underline{ds} = dr\, \underline{u_r}$$

dove ricordiamo che $\begin{cases} \underline{u_r} \parallel \underline{u_n} \\ \underline{u_r} \text{ stesso verso } \underline{u_n} \end{cases}$

utilizzando ora la definizione di tensione elettrica $\underline{dv = \underline{E}(r)\, \underline{ds} = E\, \underline{u_r} \cdot dr\, \underline{u_r} = E(r) dr}$, ed integrando tra R_1 ed R_2

$$v_A - v_B = v_1 - v_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R_1}^{r=R_2} = \boxed{v_1 - v_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

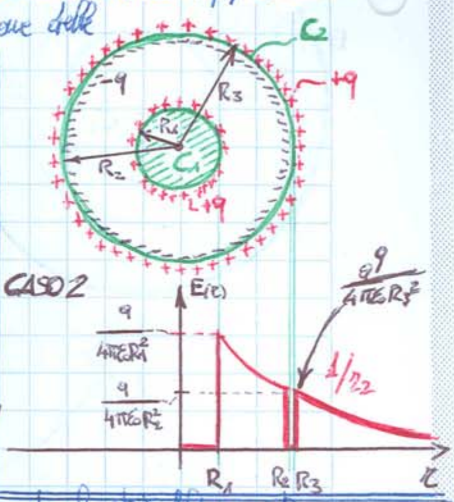
d.d.p tra due superfici DI UNO SCHERMO ELETTROSTATICO

Le osservazioni sul potenziale sono le seguenti

- per $R_2 = R_1 \Rightarrow v_2 = v_1$ la superficie R_1 è equipotenziale (banale)
- se $R_2 > R_1 \rightarrow \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2} \rightarrow \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0$ il potenziale AUMENTA nel passare dalla superficie R_2 alla superficie R_1 (condensa)
- per aumentare il potenziale, fissato R_1 ed R_2, devo aumentare q, cioè vi è una proporzionalità diretta tra carica q e $v_1 - v_2$; per esempio se impiego $2q$, $3q$ ho un potenziale doppio, triplo eccetera -
- se eseguiamo il rapporto $\underline{\frac{q}{v_1 - v_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}}$ risulta questo dipendere solo dalle caratteristiche geometriche dello schermo elettrostatico, da cui si intuisce che vi è una proprietà dietro tale relazione, che tra poco indagheremo
- lo schermo elettrostatico è stato presentato come un isolatore del conduttore interno C_1 verso l'ambiente esterno, protetto qui dal corpo C_2; vale anche il contrario: il corpo C_2 funge da schermo elettrostatico per il corpo C_1 nei confronti di cariche esterne, esempio Q', Q'' eccetera

CONDENSATORI (capacità elettrica)

Se prendiamo ora un sistema formato da due conduttori C_1 e C_2 come nel caso dello schermo elettrostatico, ma sia C_2 SENZA ECCESSO DI CARICHE, mentre induciamo in C_1 un eccesso di carica $+q$, notiamo il formarsi (all'equilibrio) in C_2 un "DOPPIO STRATO" dovuto alla separazione delle cariche (ad opera del campo elettrico E_1 generato da C_1) sempre con $-q$ su R_2.
Tale sistema prende il nome di **CONDENSATORE**, e se C_1 ha un eccesso di carica $+q$ distribuito sulla superficie este



CAMPO ELETTRICO

- se $r < R_1 \longrightarrow E = 0$
- se $R_1 < r < R_2 \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- se $r > R_2 \longrightarrow E(r) =$

POTENZIALE

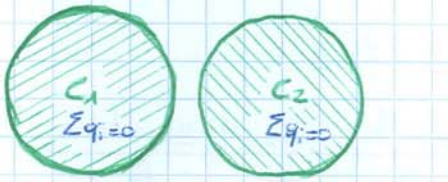
- se $r = R_1 \longrightarrow C_1$ equipotenziale
- se $R_1 < r < R_2 \longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$
- se $r = R_2 \longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Traendo osservazione dall'ultima relazione scritta si è osservata la particolarità del rapporto

$$\frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}$$

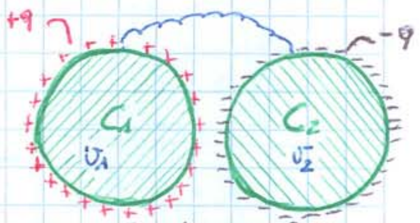
il quale risulta del tutto indipendente dalle cariche in gioco, ma funzione solo della geometria del sistema attraverso R_1 ed R_2, e dal mezzo che separa C_1 da C_2 attraverso ε_0; indaghiamo meglio tale rapporto.

Si immagini avere due corpi conduttori separati ed inizialmente privi di carica; con una macchina otteniamo la carica di C_1 inducendo un eccesso di carica $+q$ ed attraverso un cavo di conduttore le cariche rimosse da C_1 le trasportiamo in C_2 che assume un eccesso di carica $-q$.



SITUAZIONE 1

Siano anche V_1 e V_2 rispettivamente le tensioni dei due corpi. Quando la macchina cessa di funzionare ogni corpo genera un campo elettrico (rispettivamente E_1 ed E_2) e tra gli stessi si può misurare una d.d.p. o $V_1 - V_2$; si dimostra che in tali ipotesi la d.d.p. è proporzionale alla carica q (noi non lo faremo), e perciò si può definire



SITUAZIONE 2

$$\boxed{C = \frac{q}{|V_1 - V_2|}} \quad \text{CAPACITÀ ELETTRICA} = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}}$$

L'unità di misura della capacità di un conduttore è coulomb/volt, e prende il nome di

$$C = \frac{[C]}{[V]} = [F] \quad \text{FARAD}$$

Il Farad è un'unità di misura MOLTO GRANDE ecco perché nella pratica si usano i suoi sottomultipli come segue

10^{-3} F =	mF =	milliFarad
10^{-6} F =	μF =	microFarad
10^{-9} F =	nF =	nanoFarad
10^{-12} F =	pF =	picoFarad

Vediamo un esempio pratico:
Si possa avere un condensatore sferico ove

$R_1 = 2\ \text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$

$R_2 = 2{,}5\ \text{cm} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$

ricordando che $K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9\ \text{N} \longrightarrow 4\pi\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{9 \cdot 10^{+9}} \simeq 1{,}1 \cdot 10^{-10}$

La capacità del condensatore sarà

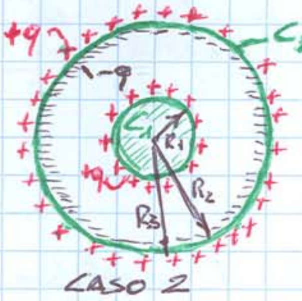
$$C = \frac{q}{|V_1 - V_2|} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-10}}{\frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-2}}} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-10}}{\underset{10}{\underline{50-40}}} = C = 1{,}1 \cdot 10^{-11} = 11{,}1 \cdot 10^{-12} = \underline{11{,}1\ \text{pF}}$$

Altre forme associate dell'espressione della capacità sono

$$\boxed{q = C(V_1 - V_2)} \qquad \boxed{V_1 - V_2 = \frac{q}{C}}$$

Prima di procedere oltre facciamo un passo indietro e vediamo un'ultimo caso che riguarda il condensatore sferico.
Supposto di essere ancora nella configurazione geometrica di un corpo sferico C_1 e con eccesso di carica $+q$ distribuita sulla superficie R_1, entro un conduttore cavo C_2 con raggio interno R_2 ed esterno R_3 all'equilibrio sappiamo che si forma in C_2 un doppio strato distribuito come segue

- una carica di tipo $-q$ sulla superficie "interna" e raggio R_2
- " " " " $+q$ " " "esterna" e " R_3



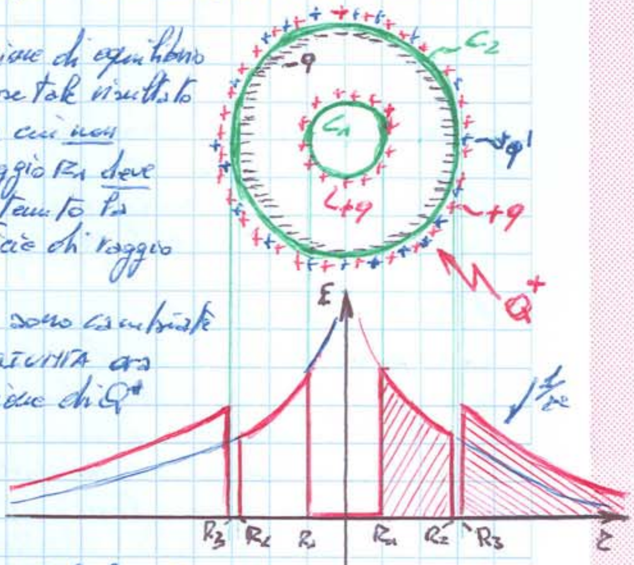
CASO 2

E' questo quello che si è definito caso 2 e per il quale già è stato calcolato il campo elettrico $E(r)$ ed il potenziale $v_1 - v_2$

Ora facciamo un passo in avanti come segue:
prendiamo una generica carica Q^+ "esterna" al sistema già in equilibrio, e somministriamola al corpo C_2 e studiamo il caso
La carica non "attraversa" il corpo C_2 e si spalma all'interno perché, in condizioni di equilibrio, se applico la legge di Gauss ad una qualsiasi superficie S' alla "polpa" del conduttore C_2 risulta

$$\oint_{S'} \underline{E}_{int}\, u_n\, dS = 0 = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$$

è nullo perché per definizione di equilibrio elettrostatico $\underline{E}_{int} = 0$; ma se tale risultato deve essere soddisfatto ancora una volta $\Sigma q_i = 0$, da cui non avendo perturbato la carica $+q$ sulla superficie di raggio R_1 deve essere che anche la superficie di raggio R_2 ha mantenuto la carica $-q$; di conseguenza all'interno della superficie di raggio R_3 nulla è cambiato.
Sulla superficie esterna di raggio R_3 invece le cose sono cambiate alla già presenza delle cariche $+q$ vi troviamo in AGGIUNTA ora anche le cariche $+q'$ provenienti dalla somministrazione di Q^+



CASO 3

Guardiamo al campo elettrico E:

- per $0 \leq r \leq R_3$ nulla è cambiato rispetto al caso 2 già visto
- per $r \geq R_3$ esso ha ancora un andamento secondo la legge $1/r^2$ ma in R_3 vi è un incremento dello stesso dovuto all'effetto di Q^+ che produce un incremento di carica $+q'$ sulla superficie a raggio R_3, rispetto al "caso 2" l'incremento si calcola in

$$\Delta E = E_{caso\,3} - E_{caso\,2} = \frac{+q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Si osserva qui che come già detto lo schermo elettrostatico non permette la diffusione del campo elettrico prodotto da un trasporto di cariche da C_2 verso C_1 (caso 1), ma sua volta non permette il transito di cariche verso C_1 attraverso C_2 quando queste provengono "dall'esterno", come nel caso 3 di Q^+

Torniamo alla definizione di capacità $C = \frac{q}{|v_1 - v_2|}$ e vediamo come questa si applica ai condensatori

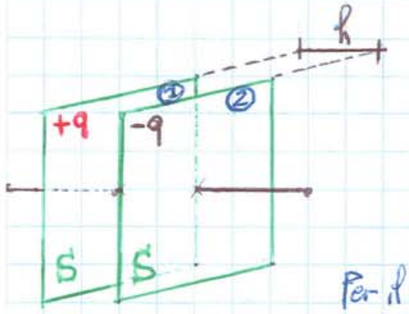
CONDENSATORI SFERICI

Per condensatori di tale forma abbiamo già visto $v_1 - v_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \rightarrow \boxed{C = \frac{q}{|v_1 - v_2|} = \frac{4\pi\varepsilon}{1/R_1 - 1/R_2} = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$
che il caso più interessante è quello tra R_1 ed R_2
E' qui interessante notare che se si pensa ad $R_2 \rightarrow \infty$ si configura la situazione di una sfera di raggio R_1 ed isolata nello spazio, per questa la capacità si misura in

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

CAPACITA' di una SFERA ISOLATA NELLO SPAZIO

CONDENSATORI PIANI



Supponiamo di avere un condensatore costituito da due conduttori piani e paralleli, ciascuno di area S e distanti h, la cui densità carica sia:

- $+\sigma$ uniforme e valga $+q$ sull'armatura positiva ①
- $-\sigma$ " e " $-q$ " negativa ②

Abbiamo, per la geometria proposta, già calcolato il campo elettrico presente tra le due armature, questo è costante in tutta la distanza h e vale

$$\underline{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Per il calcolo del potenziale presente tra le due armature consideriamo lo spostamento da ①→② in modo ortogonale a queste ($ds \perp$ ad ① e ②), e che anche il campo elettrico $\underline{E}$ è equidirezionale ed equiverso a ds (spostamento infinitesimo), dalla definizione della d.d.p. si calcola

$$V_1 - V_2 = \int_A^B \underline{E}\cdot\underline{ds} = \int_A^B E\,ds \quad \text{in quanto } u_E \cdot u_n = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1$$

$$E\int_1^2 ds = V_1 - V_2 = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h$$

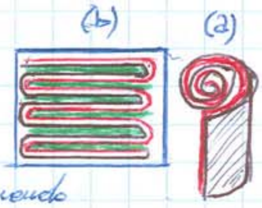
Disponiamo ora di tutti gli elementi per calcolare la capacità presente tra le due armature del condensatore

$$C = \frac{q}{|V_1 - V_2|} = \frac{\sigma S}{\sigma/\varepsilon_0 \cdot h} = \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}}$$

Facciamo ora alcune considerazioni di ordine pratico su come aumentare la capacità di un condensatore piano attraverso la relazione appena trascritta.

- Verrebbe subito da pensare di ridurre la distanza h quanto più possibile, e ciò è fattualmente praticabile interponendo un foglio di materiale dielettrico tra le due lamiere

- Altra tecnica praticabile è quella di aumentare la superficie S di esposizione tra le due lamiere, in questa direzione si lavora quando si parla di supercondensatori.



Le tecniche in questo caso sono varie, due esempi per tutti

a) prese le due lamiere con dielettrico interposto le si arrotola ottenendo un condensatore a forma cilindrica

b) con il principio della "superficie filtrante" si aumenta S attraverso una serie di pieghe delle stesse all'interno di una scatola

Un calcolo pratico del comportamento di un condensatore, lo possiamo fare considerando il precedente esempio di condensatore sferico; i cui dati erano

$R_1 = 2\,cm = 2\cdot 10^{-2}\,m$ calcolato $C = 11{,}1\,pF$ supponiamo qui valga $V_1 - V_2 = 15000\,V$

$R_2 = 2{,}5\,cm = 2{,}5\cdot 10^{-2}\,m$

la carica q si calcola facilmente $q = C(V_1 - V_2) = 11{,}1\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}5\cdot 10^{4} \cong 1{,}67\cdot 10^{-7}\,C$

Se voglio sapere il numero di cariche elementari spostate, ricordando che $e = 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,C$

$$N\cdot e = q \rightarrow N = q/e = \frac{1{,}67\cdot 10^{-7}}{1{,}6022\cdot 10^{-19}} \simeq 10^{+12} \text{ CARICHE}$$

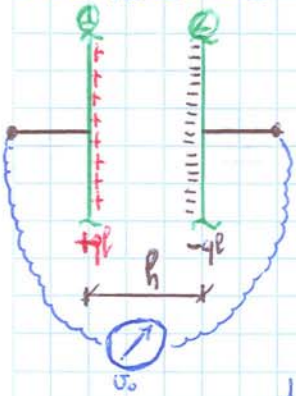
Se ricordiamo che $1\,m^3$ di materia ha mediamente $N_e = 8{,}5\cdot 10^{28}$ elettroni, e che la sfera di raggio R_1 ha volume $\tau = \frac{4}{3}\pi R_1 = 3{,}35\cdot 10^{-5}\,m^3$, in tale sfera ci troviamo

$$N_{tot} = N_e\cdot\tau = 8{,}5\cdot 10^{28}\cdot 3{,}35\cdot 10^{-5} = 2{,}85\cdot 10^{24} \text{ elettroni}$$

Ciò significa che spostando 10^{+12} cariche, abbiamo scomodato circa 1 carica su 10^{+12} di quelle disponibili, cioè una quantità minima.

DIELETTRICI

Sino ad questo momento sono stati studiati gli effetti del campo elettrico $\underline{E}$; prodotto dalle carica q, senza che questa "incontrasse ostacoli" –
Cominciando con l'esaminare una situazione semplice del condensatore piano, vogliamo ora studiare come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra i due conduttori CARICHI, quando questo viene TOTALMENTE riempito da un materiale isolante –



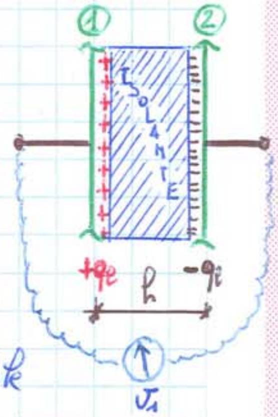
Di tale condensatore al solito diciamo S l'area delle armature, h la loro distanza $+q_\ell$ e $-q_\ell$ la "carica libera" presente sulle armature, distribuita in modo uniforme; sappiamo qui valga

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad v_1 - v_2 = v_0 = E_0 h = \frac{q_\ell}{C_0} \longrightarrow E_0 = \frac{v_0}{h} \qquad C_0 = \frac{q}{v_0}$$

abbiamo qui eseguito un cambio di notazione scrivendo il potenziale $v_1 - v_2 = v$, ed attribuito il pedice 0 alla situazione iniziale nella quale tra le armature non è posto alcun materiale
Se nella situazione "0" misuriamo con un particolare elettrometro, detto voltmetro elettrostatico, si suppone in condizioni ideali di leggere proprio v_0 e per ora teniamo anche ben presente $C_0 = q/v_0$

Mantenendo costante il valore di q_ℓ, introduciamo tra le armature un materiale isolante (dielettrico), il quale riempia TUTTO lo spazio vuoto presente tra le stesse –
Tornando a leggere nel voltmetro il potenziale esistente tra le due armature, non misureremo più un valore di v_0, ma un valore $v_1 < v_0$, in tali condizioni posso dire che

$$v_1 = E_1 h \longrightarrow E_1 = \frac{v_1}{h} \neq E_0 \qquad C_1 = \frac{q}{v_1} = C_0$$



Se tolgo il dielettrico tra le armature misuro ancora v_0, se ripeto l'esperimento con un'altro materiale dielettrico di diversa natura, con il voltmetro misuro un potenziale v_K; allora comprendo esservi un rapporto così definibile

$$\boxed{\frac{v_0}{v_K} = K = \text{COSTANTE}}$$

COSTANTE DIELETTRICA DEL MATERIALE RELATIVA

l'unità di misura è quella del campo elettrostatico $\frac{[V]}{[m]}$

Le osservazioni che possiamo fare sono le seguenti

- considerato il campo elettrico uniforme tra le due lamiere da la costante dielettrica è proporzionale al rapporto tra il campo elettrico E_0 con E_K $\rightarrow E_K = E_0/K$ $\quad \begin{cases} v_0 = E_0 h \\ v_K = E_K h \end{cases} \rightarrow \boxed{K = \frac{v_0}{v_K} = \frac{E_0}{E_K}}$

- visto che nel vuoto $v_0 = qC_0$ ed in qualsiasi altro mezzo $v_K = q\,C_K$, dalla definizione di costante dielettrica si ottiene che

$$\frac{v_0}{v_K} = \frac{\cancel{q}C_0}{\cancel{q}C_K} = K \longrightarrow \boxed{C_K = KC_0}$$

per convenzione è stabilito che NEL VUOTO la costante è assunta pari ad $C_0 = 1$ $\Big\}$ $\boxed{C_K = K}$

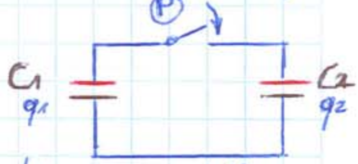
cioè la costante dielettrica assume valori $C_K \geq 1$, ed il massimo valore del potenziale lo si ha nel vuoto, cioè quando $K_{min} = 1 \longrightarrow v_{max} = \frac{v_0}{K_{min}} = v_0$

Per terminare, si ricordi che spesse volte il valore K è indicato con il termine di RIGIDITÀ DIELETTRICA di un isolante, e fisicamente rappresenta il massimo valore del campo elettrostatico $E_K = E_0/K < E_0$ applicabile ad un materiale senza che avvengano scariche al suo interno, le quali lo danneggerebbero irreparabilmente, nel senso che verrebbe a mancare la sua proprietà isolante

Torniamo ora ad occuparci di condensatori: sono questi dei dispositivi elettrici utilizzati come deposito di carica e, tramite opportuni collegamenti conduttori esterni è possibile far fluire la carica negativa $-q$ (elettroni) da un'armatura all'altra.
Supposto qui di avere le cariche COSTANTI nel tempo e le differenze di potenziale v i condensatori possono essere collegati tra loro attraverso fili conduttori in due diverse modalità: IN PARALLELO
IN SERIE } vediamo nel dettaglio i casi

COLLEGAMENTO IN PARALLELO

È questa una connessione che consiste nel realizzare tra i due conduttori come in figura e giusto per avere valori concreti si suppone avere



$C_1 = 10^{-8} F \qquad q_1 = 10^{-7} C$

$C_2 = 2 \cdot 10^{-8} F \qquad q_2 = 0.5 \cdot 10^{-7} C$

Non si confonda qui la capacità C del condensatore con l'unità di misura della carica il Coulomb $C = [C]$.
I valori forniti sono ad interruttore P aperto, vogliamo studiare il caso se P si chiude.
Con la relazione tra potenziale v, capacità C e carica q posso calcolare il potenziale esistente tra le armature a pulsante aperto

$v_1 = q_1/C_1 = 10^{-7}/10^{-8} = v_1 = 10 V$

Il condensatore C_2 ha potenziale 4 volte inferiore a quello di C_1: che ddp avremo quando si chiude l'interruttore P?

$v_2 = q_2/C_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-7}/2 \cdot 10^{-8} = v_2 = 2.5 V$

La soluzione è praticabile attraverso due diverse strade

I) Basandoci sul principio fisico della conservazione della carica, il sistema ha complessivamente sempre la stessa carica Q sia da pulsante aperto che chiuso

$$\begin{cases} \boxed{Q = q_1 + q_2 = q_1' + q_2'} = 10^{-7} + 0{,}5 \cdot 10^{-7} = 1.5 \cdot 10^{-7} C \\ \left.\begin{array}{l} q_1' = C_1 v_1' \\ q_2' = C_2 v_2' \end{array}\right] \end{cases}$$

ma vale anche $q_1'/q_2' = C_1/C_2$ perché se il circuito è chiuso deve essere $v_1' = v_2' = v$

$$q_1' = \frac{C_1}{C_2} q_2' \longrightarrow q_1' + q_2' = q_2'\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = q_2'\left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right) = Q \longrightarrow \boxed{q_2' = Q \frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1} q_1' \longrightarrow q_1' + q_2' = q_1'\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = q_1'\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right) = Q \longrightarrow \boxed{q_1' = Q \frac{C_1}{C_1 + C_2}}$$

Le cariche dei condensatori in parallelo sono proporzionali alle capacità C_i dei condensatori posti in parallelo, cioè la carica totale si redistribuisce sui due condensatori in proporzione alla capacità di ciascuno di essi, nel caso in esame vale

$$(C_1 + C_2) = 10^{-8} + 2 \cdot 10^{-8} = 3 \cdot 10^{-8} C \longrightarrow \boxed{C_{tot} = C_1 + C_2 = \frac{Q}{v}}$$

$$q_1' = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \frac{\cancel{10^{-8}}}{3 \cdot \cancel{10^{-8}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} = 0.5 \cdot 10^{-7} C$$

$$q_2' = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \frac{2 \cdot \cancel{10^{-8}}}{3 \cdot \cancel{10^{-8}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} = 10^{-7} C$$

Curiosamente, i valori iniziali hanno determinato un'inversione di carica tra le situazioni interruttore aperto / interruttore chiuso

Nella nuova situazione la tensione si calcola in

$$v = v_1' = v_2' = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{0.5\cdot 10^{-7}}{10^{-8}} = \frac{10^{-7}}{2\cdot 10^{-8}} = v = \frac{10}{2} = 5V$$

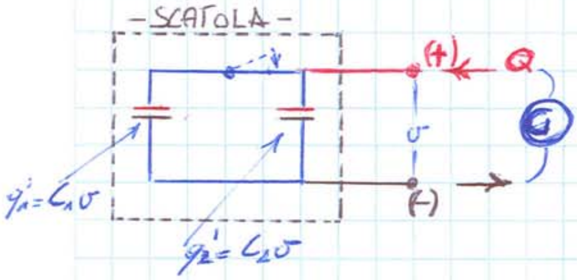
Sul "fronte" "potenziale" risulta che

- il condensatore C_1 ha dimezzato il proprio potenziale $10 \to 5$ V
- il condensatore C_2 ha raddoppiato il proprio potenziale $2{,}5 \to 5$ V

come a dire che vi è una variazione del potenziale non più in rapporto diretto alla capacità C_i dei condensatori, ma in modo inverso;

Altra osservazione da fare è che nel processo descritto, una parte di energia in gioco è perduta, purtroppo con le relazioni espresse ciò non è evidente ma più oltre ne daremo dimostrazione.

II°) La tecnica solutiva qui proposta si basa sempre sul principio di conservazione della carica, ma sfruttato in modo più "empirico", vediamo come



Si suppone di avere il sistema dei condensatori in parallelo all'interno di una scatola, dentro la quale non si sa cosa accada, ma da essa fuoriescono due connessioni che portiamo al collegamento con un generatore G

Conosco per tale sistema la carica totale $Q = 1{,}5\cdot 10^{-7}$ C (p.c.c.)
se guardo dentro alla scatola scopro che risulta
$$\begin{cases} q_1' = C_1 v \\ q_2' = C_2 v \end{cases}$$
ma non posso calcolarli perché è incognito q_1', q_2', v

Ai due capi dei "morsetti esterni" vale inoltre
Nota la capacità C del sistema calcolo $C = \frac{Q}{v} = \frac{q_1'+q_2'}{v} = \frac{C_1v + C_2v}{v} = C_1 + C_2 = \underline{3\cdot 10^{-7}\ F}$

$$v = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1+C_2} = \frac{1.5\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^{-8}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{1} = v = 5V$$ che naturalmente coincide con quanto già sopra stabilito.

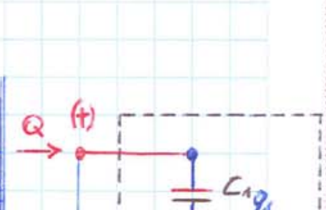
Nota la tensione v che regna nel circuito è immediato calcolare le cariche q_1' e q_2' presenti sulle armature

$$q_1' = C_1 \cdot v = 10^{-8}\cdot 5 = q_1' = 0{,}5\cdot 10^{-7}\ C$$

$$q_2' = C_2 \cdot v = 2\cdot 10^{-8}\cdot 5 = q_2' = 10^{-7}\ C$$

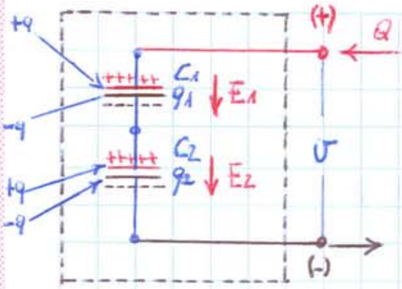
COLLEGAMENTO in SERIE

La rappresentazione grafica di un collegamento in serie è riportata a fianco, e come si può notare i due condensatori sono collegati attraverso un unico capo.



In tale situazione il principio di conservazione della carica ci dice

$$Q = q_1 = q_2 = q \qquad \text{perché:}$$



$Q = q_1 = q_2 = q$ → se la carica +q compare sull'armatura di C_1 in ingresso, la carica -q compare sull'armatura affacciata per induzione. Dovendo essere il conduttore centrale <u>neutro</u> sull'armatura in ingresso di C_2 deve comparire +q (per l'equilibrio) ed infine per induzione compare -q in uscita di C_2

Si spiega anche che il campo elettrico E_1 ha lo stesso verso di E_2

Considerato inoltre che nei circuiti in serie $\underline{v = v_1 + v_2}$, e che

$$\begin{cases} v_1 = q/C_1 \\ v_2 = q/C_2 \end{cases}$$

Dalla $C = \frac{Q}{v} = \frac{q}{v}$ si può più opportunamente scrivere che

$$\frac{1}{C} = \frac{v}{q} = \frac{v_1 + v_2}{q} = \frac{\frac{\cancel{q}}{C_1} + \frac{\cancel{q}}{C_2}}{\cancel{q}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\boxed{C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

Le osservazioni che possiamo fare sono

- la capacità totale C del circuito in serie è inferiore alle capacità dei singoli condensatori $(C < C_1)$ o $(C < C_2)$
- se voglio <u>aumentare la capacità</u> in un circuito, uso lo schema di collegamento dei condensatori <u>in parallelo</u> $\underline{C = C_1 + C_2}$
- se voglio <u>aumentare la tensione</u> v in un circuito, uso lo schema di collegamento dei condensatori <u>in serie</u> $\underline{v = v_1 + v_2}$

In particolare i collegamenti in serie dei condensatori, sono usati quando nel circuito si manifestano problemi legati alla tensione di isolamento.