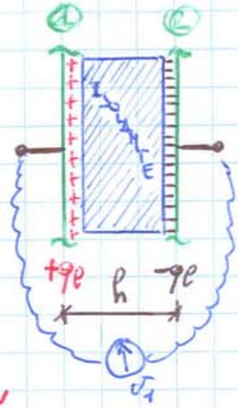
7 maggio 2007 lunedì - FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO 18:15 ÷ 19:45

Lezione n° 7 di 20

POLARIZZAZIONE DIELETTRICI (modello interpretativo)



Ricordiamo che se tra le armature di un condensatore inseriamo un materiale isolante, la tensione tra esse misurata passa da $V_0 \to V_1$ ove $V_0 > V_1$; e tra le due grandezze esiste un rapporto di proporzionalità, valevole anche per il campo elettrico

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{E_0}{E_1} = K$$

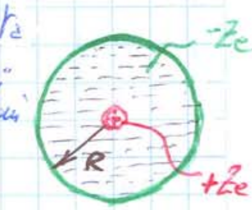
tutto ciò supposto si mantenga costante la carica $q = cost.$

Dalla definizione di capacità $C = \frac{q}{V}$ si è poi detto che

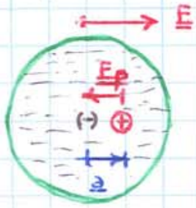
- se C_0 è la capacità del condensatore nel vuoto $C_0 = q/V_0$
- se C_1 è la capacità del condensatore con dielettrico $C_1 = q/V_1$

K = COSTANTE DIELETTRICA = RIGIDITÀ DIELETTRICA $\quad C_1 = KC_0$

Il fenomeno osservato, e matematicamente espresso a livello macroscopico dalla relazione $C_K = K$ (preso $C_0 = 1$) è portatore di un significato ben più profondo perché legato alla struttura microscopica elettrica della materia, vediamone i dettagli



Un atomo in condizioni "normali", cioè non sottoposto ad un C.E. esterno, presenta una distribuzione della nuvola elettronica in media simmetrica rispetto al nucleo, può questa essere pensata come una nube di carica negativa (-)Ze con dimensioni di ~ 10^{-10} m (paragonabili al nucleo) e con centro di massa coincidente con la posizione del nucleo, pensato questo come carica positiva (+) Ze

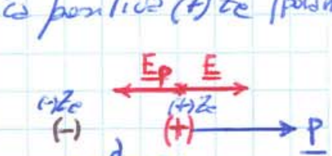


Se ora si sottopone tale atomo all'azione di un campo elettrico $\underline{E}$ si osserva che

- il centro di massa della nube negativa subisce uno spostamento in verso CONTRARIO ad $\underline{E}$
- il centro di massa della nube positiva " " " " " CONCORDE ad $\underline{E}$

All'equilibrio risulta esserci una certa distanza $\underline{a}$ tra i centri di massa delle rispettive nubi atomiche, l'azione del campo elettrico $\underline{E}$ ed anche la nascita di un campo elettrostatico $\underline{E_p}$ dovuto ad una distribuzione di carica negativa (-)Ze non coincidente come centro di massa con quello della carica positiva (+) Ze (polarizzazione)

La situazione all'equilibrio è pensabile come un DIPOLO ELETTRICO e possiamo qui definire come

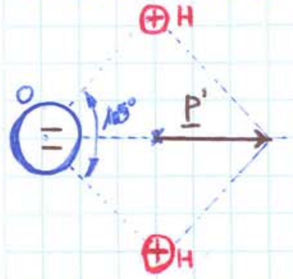


$\boxed{\underline{P} = Ze \cdot \underline{d}}$ ← MOMENTO DEL DIPOLO ELETTRICO indotto dal campo elettrostatico $\underline{E}$

È dimostrabile (ma non lo vedremo) che il momento vale $\underline{P} = \varepsilon_0 (4\pi R^3) \underline{E}$

Riassumendo: un atomo soggetto ad un campo elettrico $\underline{E}$ acquista un momento di dipolo elettrico, la cui direzione è parallela al C.E. e verso concorde -

Il fenomeno si chiama **POLARIZZAZIONE ELETTRONICA** e cessa quando $\underline{E}$ si annulla e non va confuso con il fenomeno della polarizzazione per orientamento proprio delle molecole formate da specie atomiche diverse

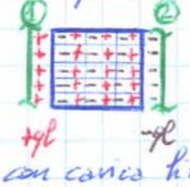


L'acqua è un esempio di sostanza con MOMENTO DI DIPOLO INTRINSECO $\underline{P'}$ per la quale il centro delle cariche negative non coincide con il centro delle cariche positive da cui la nascita di $\underline{P'}$

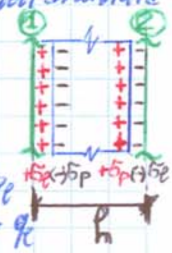
Non è necessario approfondire ulteriormente lo studio, è sufficiente qui ricordare il comportamento atomico della materia, assimilabile ad un dipolo elettrico, il quale dipolo elettrico genera un PROPRIO campo elettrico che ha trovato espressione nel momento $\underline{p}$ -

LEGGE COSTITUTIVA

Torniamo al caso delle armature piane del condensatore con al loro interno inserito un dielettrico; sotto l'effetto del campo $\underline{E}$ tale materiale isolante si comporta come formato da tanti dipoli "accodati" l'un l'altro ed orientati secondo il C.E

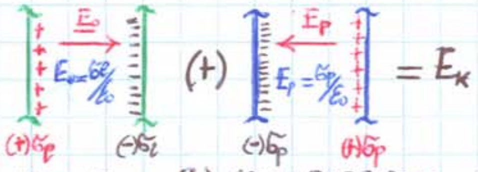


Nell'isolante non vi è eccesso di carica, in quanto le cariche di segno opposto "accodate" si compensano, ma sulle facce esterne del dielettrico non vi è compensazione, quindi si registra su queste un eccesso di carica.
L'eccesso di carica nel dielettrico sarà negativo (−) sulla faccia dell'armatura con carica libera $+q_\ell$, sarà positivo (+) sull'armatura con carica libera $-q_\ell$



Distinguiamo
- densità di carica libera(+) σ_ℓ sull'armatura a carica $(+)q_\ell$
- densità di carica libera(−) σ_ℓ sull'armatura a carica $(-)q_\ell$
- densità di carica polarizzazione (+) σ_p sulla faccia dielettrico in fronte armatura con $-q_\ell$
- densità di carica polarizzazione (−) σ_p sulla faccia dielettrico in fronte armatura con $+q_\ell$
- $E_0 = \sigma_\ell/\varepsilon_0$ campo elettrico nel vuoto del condensatore
- $E_p = \sigma_p/\varepsilon_0$ campo elettrico dovuto alla polarizzazione del dielettrico, con $E_0 \parallel E_p$ ma E_p verso opposto

Per qualsiasi sezione interna all'isolante ho equilibrio $\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_p = 0$, ma nel condensatore con al suo interno l'isolante so esistere un campo elettrico $\underline{E}_K$, calcolabile qui come somma degli effetti tra



$$\underline{E}_K = \underline{E}_0 + \underline{E}_p$$

$$\boxed{E_K = E_0 - E_p = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}}$$

nello scalare E_p il segno negativo(−) si giustifica con il verso opposto ad E_0

CARICHE LIBERE (+) CARICHE POLARIZZAZIONE = SOMMA EFFETTI (principio della sovrapposizione)

Ma anche se posso calcolare $E_K = V_K/h$ attraverso la misura del potenziale V_K con un voltmetro e la conoscenza della distanza h tra le pareti del condensatore, vogliamo/voglio esplicitare la relazione appena data per il calcolo di σ_p; lo posso fare in 2 modi

I°) In funzione del C.E. E_K; ricordando che

$$\begin{cases} E_0/E_K = K \rightarrow E_0 = K E_K \\ E_K = E_0 - E_p = K E_K - \dfrac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \end{cases} \longrightarrow \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = K E_K - E_K = E_K(K-1) \longrightarrow \underline{\sigma_p = \varepsilon_0 (K-1) E_K}$$

II°) In funzione della carica libera σ_ℓ; ricordando che $\begin{cases} E_0 = \dfrac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} \\ E_0/E_K = K \rightarrow E_K = E_0/K = \dfrac{1}{K}\dfrac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} \end{cases}$

$$E_K = E_0 - E_p \longrightarrow \frac{1}{K}\frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow \sigma_p = \sigma_\ell - \frac{1}{K}\sigma_\ell = \sigma_\ell\left(1 - \frac{1}{K}\right) \longrightarrow \underline{\sigma_p = \sigma_\ell\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$$

Riassumendo le due precedenti

$$\boxed{E_K = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{\sigma_p = \varepsilon_0 (K-1) E_K} \\ \boxed{\sigma_p = \sigma_\ell\left(1 - \frac{1}{K}\right)} = \sigma_\ell\left(\frac{K-1}{K}\right) \end{cases}$$

LEGGE COSTITUTIVA

LEGGE di GAUSS in PRESENZA di DIELETTRICO

Si era definita la legge di Gauss come il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa S e prodotto dal campo $\underline{E}$, quale rapporto tra la somma delle cariche totali su ε_0

$$\underbrace{\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\, \underline{u}_n\, ds = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}}$$

Nel nostro caso, con la presenza del dielettrico tra le armature, il campo dielettrico diventa E_k ove ricordiamo $E_0 = KE_k$, mentre le cariche sono sia quelle libere e contenute allo interno della superficie S delle lamiere dette q_l, che quelle di polarizzazione che si trovano sulla superficie dell'isolante ed abbiamo indicato con q_p

$$\Phi(\underline{E_0}) = \oint_S \underline{E_0}\, \underline{u}_n\, ds = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_l}{\varepsilon_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{\oint \varepsilon_0 \underline{E_0}\, \underline{u}_n\, ds = \Sigma q_l + \Sigma q_p}$$

GAUSS ALLA VECCHIA MANIERA

Ma tale forma è poco praticabile per la presenza delle cariche di polarizzazione da noi non controllabili; allo scopo definiamo qui il seguente

$$\boxed{\underline{D} = \varepsilon_0 K \underline{E}}$$

VETTORE DI INDUZIONE DIELETTRICA il quale gode della proprietà di contenere in se l'effetto delle cariche di polarizzazione; il procedimento dimostrativo è omesso per le complicazioni connesse a calcoli in forma differenziale della legge di Gauss -

Con tale definizione posso scrivere e quindi concentrarmi solo sulle cariche libere, e sicuro di conteggiarle attraverso $\underline{D}$

$$\boxed{\oint_S \underline{D}\, \underline{u}_n\, ds = \Sigma q_l}$$

La definizione del vettore D ci permette il suo calcolo noto
- il campo elettrico del condensatore nel vuoto
- il valore della costante dielettrica del materiale isolante

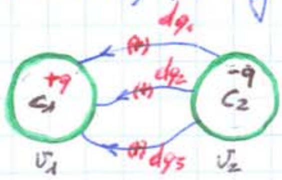
a titolo di esempio si consideri un condensatore sferico di raggio della parte interna R_2 e con carica libera $\Sigma q_l = q$, in tali ipotesi per simmetria sferica ottengo

$$\oint_S \underline{D}\, u_n\, ds = \oint_S D \underbrace{u_r\, u_n}_{1 \cdot 1 \cdot \cos 0} ds = D \oint_S ds = 4\pi R_2^2 D = \Sigma q_l = q \longrightarrow D = \frac{q}{4\pi R_2^2}$$

$$D = \varepsilon_0 K E_0 = \frac{q}{4\pi R_2^2} \longrightarrow \underbrace{E_0 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 K R_2^2}}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA (nei condensatori)

Torniamo indietro ora al caso di due corpi conduttori C_1 e C_2 in uno stato di equilibrio, per ognuno di essi vale $\sum q_i = 0$, se ora preleviamo delle cariche $(+) dq_i$ dal corpo C_2 e le trasferisco al corpo C_1 misurerò:



- un eccesso di carica $+q$ ed un potenziale V_1 sul corpo C_1
- un eccesso di carica $-q$ ed un potenziale V_2 sul corpo C_2

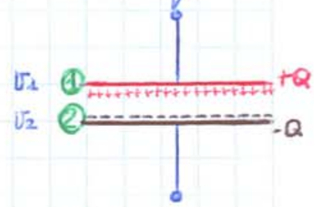
Tale separazione delle cariche richiede del lavoro, che per la meccanica classica vale $dW = \underline{F} \cdot \underline{ds}$ ma in presenza di cariche elettrostatiche, con forze elettriche $\underline{F_{ei}} = dq_i \cdot \underline{E}$, vale

$$dW = \underline{F_{ei}} \cdot \underline{ds} = dq_i (\underline{E} \cdot \underline{ds}) = dq_i (V_2 - V_1) = dq_i \cdot V$$

ove il fatto che il campo elettrostatico sia conservativo lo rende indipendente dal percorso seguito ma dipendente SOLO dalle condizioni iniziali e finali

Se pensiamo ora ad un condensatore, il processo di carica dello stesso lo passa da una situazione di carica $q = 0$ nulla sulle armature, alla situazione $(+q, -q)$ con un potenziale legato alla sua capacità

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{V} \longrightarrow V = \frac{q}{C}$$



ed il lavoro totale speso per passare dallo stato 0 a quello Q vale

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^q q\,dq = \frac{1}{C}\frac{1}{2}\left(q^2\right)\Big|_{q=0}^{q=Q} =$$

Cioè immaginiamo che la carica del condensatore avvenga sottraendo, tramite un agente esterno, una alla volta le cariche infinitesime dq dall'armatura negativa e la si trasferisca così all'armatura positiva; durante la fase intermedia del trasferimento il potenziale tra le armature misurato vale V, e la carica sino a quel momento trasferita è $q = CV$; al termine del processo ho un eccesso di carica misurato $\pm Q$.

Il lavoro totale da spendere prende il nome di

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA

si misura in [J] ed è equivalente ad una pari energia meccanica necessaria per spostare la carica Q da un corpo C_2 ad un corpo C_1, o viceversa.

L'energia elettrostatica W rappresenta il lavoro compiuto per caricare il condensatore, ossia per separare la carica Q tra le sue armature e, non va confusa con L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA U, ed è un lavoro contrario alla forza elettrostatica $\overline{F_e}$ la quale è in opposizione all'accumulo di cariche dello stesso segno.

Se nel momento iniziale in cui $q = 0$ assegno $U_{iniziale} = 0$, il lavoro speso W si può vedere come energia potenziale elettrostatica immagazzinata dal sistema U_e, e se V è il potenziale misurato tra le armature alla fine del processo dalla $Q = CV$ si scrive

$$W = U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}QV \longrightarrow \boxed{U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV}$$

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

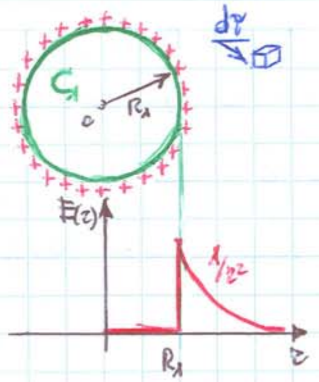
L'importanza dell'e.p.e. U_e è notevole perché permette di ricavare le forze elettriche agenti a partire proprio da questo infatti, considerato che il C.E. è conservativo posso scrivere

$$\underline{E} = (-)\,\underline{grad}(V) \longrightarrow q\underline{E} = q(-)\underline{grad}(V) \Rightarrow \boxed{\underline{F_e} = (-)\,\underline{grad}(U_e)}$$

Vediamo un esempio pratico di quanto detto, consideriamo allo scopo un condensatore sferico; da calcoli precedenti sappiamo che

$$C_0 = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2}$$

in particolare per la sfera isolata nello spazio misuro $\underline{C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1}$, ove $R_2 \to +\infty$



Sempre a proposito della sfera isolata nello spazio si era visto che

- se $0 \le r \le R_1 \rightarrow E = 0$
- se $R_1 < r < \infty \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ perciò $\underline{U_e} = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2\cdot(4\pi\varepsilon_0 R_1)} = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}}$

ed a questo punto anticipiamo che preso un volume infinitesimo di spazio $d\tau$, nell'intorno della sfera vale che

$$\boxed{dU_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau} \quad \text{perciò} \longrightarrow \underline{\frac{dU_e}{d\tau} = u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

è questa la variazione infinitesima dell'e.p.e. nel volume $d\tau$ per effetto del conduttore C_1

Prima di procedere oltre due osservazioni
- si è qui valutato l'effetto di un conduttore C_1 isolato perchè lo si può pensare come un condensatore con un'armatura posta all'infinito
- si è data la relazione $dU_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$ senza spiegazione alcuna, si chiede di assumerla questa definizione (atto "di Fede")

Torniamo al condensatore sferico e pensiamo come integrare sul volume τ

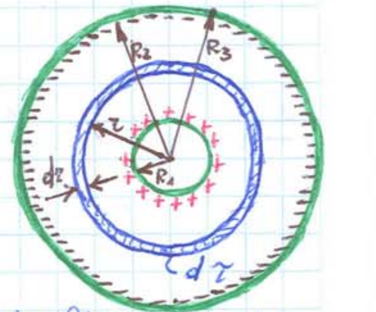
$$U_e = \int_\tau dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon \int_\tau \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 d\tau \longrightarrow$$

ma $d\tau$ è il volume di corteccia sferica infinitesima compresa fra il raggio r ed il raggio $r+dr$

$\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = \frac{4}{3}\pi 3 r^2 dr$

$\underline{d\tau = 4\pi r^2 dr}$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2}\int_\tau \frac{Q^2}{(4\pi r^2)^2}(4\pi r^2)\,dr = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{dr}{r^2}}$$



Ora se il volume τ varia da R_1 a ∞ ottengo in definitiva l'energia potenziale elettrostatica del conduttore C_1 posto nello spazio isolato

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r=R_1}^{r=\infty} = \boxed{U_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}} \quad \text{mentre} \longrightarrow \boxed{dU_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 d\tau}$$

Il concetto di energia potenziale di un campo elettrostatico si fa notare che non è solo una relazione matematica come sopra indicato, ma è concreto nell'ambiente in cui si vive, ad esempio nei telefoni cellulari, se questo emette -160 dBm, ove $1\,dBm = 10\log(P\cdot 10^3)$ (con P = potenza in W),

$$-160 = 10\log(P\cdot 10^3) \rightarrow 10^{-16} = P\cdot 10^3 \rightarrow P = 10^{-13}W = 10pW$$ il C.E. assume entità fisica -

ESERCIZIO 4.28 pagina 103

Due sfere di raggi rispettivamente $R_1 = 6\,mm$ ed $R_2 = 4\,mm$, sono poste a distanza $d \gg R_1$. Una carica $q = 10^{-10}C$ viene comunicata alla I^a sfera; successivamente le due sfere vengono collegate con un filo sottilissimo conduttore - Calcolare

a) la carica q_1 e q_2 sulle due sfere
b) il potenziale V delle due sfere
c) il campo elettrostatico E_1 ed E_2 sulla superficie delle due sfere
d) l'energia elettrostatica ΔU_e persa nel collegamento

RISOLVO

La condizione $d \gg R_1$ permette di pensare i due corpi isolati nello spazio per i quali vale

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \\ C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \end{array}\right\} \quad C_1/C_2 = R_1/R_2$$ con potenziale $\underline{V_1 \neq V_2}$ non noto

e se comunichiamo solo alla I^a sfera una carica, si presume $\Sigma q_{i2} = 0$

$$\boxed{q_1 + q_2 = q_1 = q}$$

Dopodichè colleghiamo le due sfere con un filo e qui le cose cambiano -

La connessione rende i due corpi solidali come fossero uno

$V = V_1' = V_2'$ ma $\begin{cases} C_1 = q_1'/V \rightarrow V = q_1'/C_1 \\ C_2 = q_2'/V \rightarrow V = q_2'/C_2 \end{cases}$ $\rightarrow q_1' = \frac{C_1}{C_2} q_2'$, $\rightarrow q_2' = \frac{C_2}{C_1} q_1'$

Mentre per il principio di conservazione della carica scrivo

$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = q \quad \begin{cases} \frac{C_1}{C_2} q_2' + q_2' = \frac{R_1}{R_2} q_2' + q_2' = q \\ q_1' + \frac{C_2}{C_1} q_1' = q_1' + \frac{R_2}{R_1} q_1' = q \end{cases}$$

$$\underline{q_2'} = \frac{q}{R_1+R_2} \cdot R_2 = \frac{10^{-10}}{10^{-2}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = \underline{0{,}4 \cdot 10^{-10}\,C}$$

$$\underline{q_1'} = \frac{q}{R_1+R_2} \cdot R_1 = \frac{10^{-10}}{10^{-2}} \cdot 6 \cdot 10^{-3} = \underline{0{,}6 \cdot 10^{-10}\,C}$$

b Note le cariche sui due corpi determino subito il potenziale

iniziale $V_1 = q_1 = q/C_1 = q/4\pi\varepsilon_0 R_1 = \frac{K_e q}{R_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-10}}{6 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \cdot 10^2 = \underline{V_1 = 150\,V}$

dopo il collegamento $V = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{K_e q_2'}{R_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot 10^{-3}} = 9 \cdot 10 = \underline{V = 90\,V}$

c Passiamo al calcolo del campo elettrico delle due sfere; ricordiamo essere questo $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ove la densità di carica superficiale vale per definizione $\sigma = q/S = \frac{q}{4\pi R^2}$ $\longrightarrow = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
Sostituendo i rispettivi raggi delle sfere si ottiene

$$\underline{E_1} = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{K_e q_1'}{R_1^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-11}}{6^2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5 \cdot 10^4 = \underline{15'000\ V/m}$$

$$\underline{E_2} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{K_e q_2'}{R_2^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-11}}{4^2 \cdot 10^{-6}} = 2{,}25 \cdot 10^4 = \underline{22'500\ V/m}$$

A questo punto si potrebbe osservare che: la sfera 1 pur avendo un potenziale V_1 superiore conclude con un campo elettrico E_1 inferiore, e viceversa la sfera 2 pur avendo un potenziale V_2 inferiore conclude con un campo elettrico E_2 maggiore; ma ciò è corretto perché si è visto che $q_i = \frac{q}{R_1+R_2} \cdot R_i$ perciò

$$\underline{E_i} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2} = \frac{q}{R_1+R_2} \cancel{R_i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_i^{\cancel{2}}} = \underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1+R_2} \frac{1}{R_i}}$$

il fattore $1/R_i$ rende il campo elettrico di ciascuna sfera inverso proporzionale al rispettivo raggio - considerato che $R_1 > R_2$ è corretto avere $E_1 < E_2$

d Resta infine il calcolo di ΔU_e, considerato che abbiamo visto solo il caso dei condensatori faremo

$$\underline{U_e} = \text{energia potenziale INIZIALE} = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \underline{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}}$$

per U_e iniziale vi è solo il contributo di C_1 perché il corpo C_2 è in equilibrio $\Sigma q_i = 0 \rightarrow U_{e_{C_2}} = 0$ per convenzione

$$\underline{U_e'} = \text{energia potenziale FINALE} = \text{somma dei termini contributo } C_1 + \text{contributo } C_2 = \frac{1}{2} \frac{(q_1')^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(q_2')^2}{C_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{q^2}{(R_1+R_2)^2} R_1^{\cancel{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R_1}} + \frac{q^2}{(R_1+R_2)^2} R_2^{\cancel{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R_2}} \right] = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)^{\cancel{2}}} \cancel{[R_1+R_2]}$$

$$= \underline{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1+R_2}}$$

$$\Delta U_e = U_e' - U_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1+R_2} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} = \underline{\Delta U_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_1} \right]} = \frac{K_e}{2} q^2 \left(\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Si osserva che $\frac{1}{R_1+R_2} < \frac{1}{R_1}$ perciò aspettiamo un risultato negativo $\cong 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot 10^{-20} \cdot (100 - 167) = \underline{(-)3 \cdot 10^{-9}\ J}$

Notiamo infine che le due sfere così come proposte, presentano analogo funzionamento di un circuito ove si pongono in parallelo due condensatori, caso questo già studiato precedentemente.