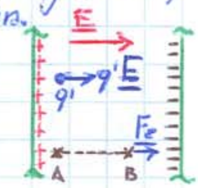
8 maggio 2007 - FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO 18:15 ÷ 19:45

Lezione n° 8 di 20

FORZA ELETTRO MOTRICE - F.E.M.

Abbiamo visto che nel caso di un condensatore è possibile parlare di lavoro per produrre uno spostamento di carica, ed in particolare le forze in gioco che producono lo spostamento possono essere di natura diversa rispetto a quella elettromagnetica, ad esempio MECCANICA - CHIMICA - TERMOELETTRICA - FOTOELETTRICA eccetera.

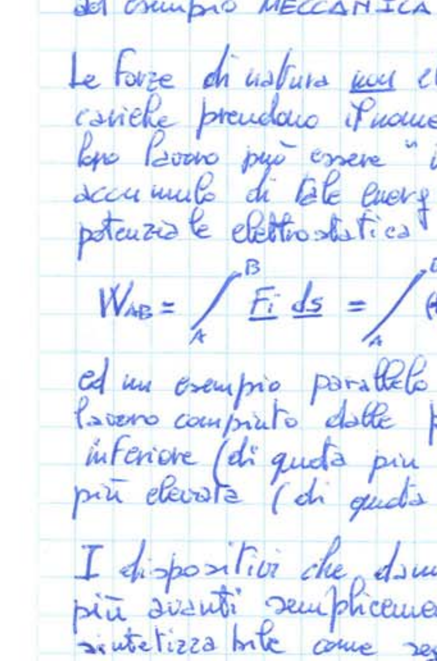


Le forze di natura non elettromagnetiche che producono un lavoro sulle cariche prendono il nome di **FORZE IMPRESSE** = F_i ed il loro lavoro può essere "immagazzinato" dalle cariche, l'entità di accumulo di tale energia si vede attraverso la variazione di energia potenziale elettrostatica

$$W_{AB} = \int_A^B \underline{F_i}\, \underline{ds} = \int_A^B (+)q\, \underline{E}\, \underline{ds} = (+)q \int_A^B \underline{E}\, \underline{ds} = (+)q(V_A - V_B) = E_{KA} - E_{KB}$$

ed un esempio parallelo lo si può fare pensando ad un bacino idroelettrico ed al lavoro compiuto dalle pompe per portare la massa d'acqua da una energia potenziale inferiore (di quota più BASSA), verso un bacino più a monte con energia potenziale più elevata (di quota più ALTA)

I dispositivi che danno luogo alle forze impresse F_i sono detti generatori di forza elettromotrice, più avanti semplicemente **GENERATORE**, ed un esempio è l'acceleratore di **VAN DE GRAAFF** sintetizzabile come segue:



GENERATORE DI CORRENTE ELETTROSTATICA DI VAN DE GRAAFF

Abbiamo un nastro ISOLANTE teso tra due rulli C e D, ove D è posto in rotazione da un motore; durante il moto il nastro passa vicino ad un pettine ① il quale ha un eccesso di carica grazie ad un generatore (separatore di carica) che diciamo (+)q

Le cariche negative (-) sono comunicate al basamento, quelle positive (+) "mollate" alla cinghia grazie al potere disperdente delle punte - Il nastro trasporta le cariche sino alla sommità della macchina, ove un secondo pettine metallico ② le raccoglie e le trasferisce ad una sfera metallica di adeguate dimensioni, la "testa" -

Se la carica q' dal punto A si "stacca" (la "sbocciamo") e va a finire nel basamento nel punto B, l'energia guadagnata nel tragitto vale

$E_{KA} - E_{KB} = q'(V_A - V_B)$ e questo in modulo è uguale (ma contrario) a quello speso per far avanzare la stessa carica dal basamento verso la testa -

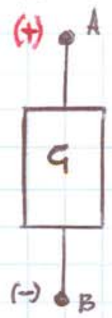
Il lavoro di trasferimento di ciascuna carica q' è prodotto da una forza impressa $\underline{F_i}$, fornita dal motore che aziona la cinghia, la quale F_i ha verso contrario alla forza elettrica $\underline{F_e}$ espressa dalle cariche accumulate sulla "TESTA"; $\underline{F_e} = q'\underline{E}$ è esprimibile attraverso il campo elettrico. Perché vi sia avanzamento di carica dal basamento → testa la $\underline{F_i}$ deve essere almeno uguale a quella $\underline{F_e}$

$$\underline{F_i} = -\underline{F_e} = -q'\underline{E}$$

Lavoro per trasportare la carica q' da un potenziale (-) ad un potenziale (+)

$$dW = \underline{F_i}\, \underline{ds} = -\underline{F_e}\, \underline{ds} = -q'\underline{E}\, \underline{ds} = -q'(V_B - V_A) = q'(V_A - V_B)$$

il lavoro delle forze impresse è andato ad aumentare l'energia potenziale della carica q'



Senza ora capire come funziona il generatore G, abbiamo compreso che per mezzo delle forze impresse $\underline{F_i}$ ha compiuto un lavoro sulle cariche q' che si può complessivamente valutare, detti i (-) e (+) gli estremi di partenza ed arrivo di q', come di seguito

$$W_{BA} = \int_{(-)}^{(+)} dW = \int_{(-)}^{(+)} \underline{F_i}\,\underline{ds} = \int_{(-)}^{(+)} -q'\underline{E}\,\underline{ds} = -q'\int_{(-)}^{(+)} \underline{E}\,\underline{ds} = \underbrace{-q'\left(V_{(-)} - V_{(+)}\right)}_{=\Delta U_e} = q'\left(V_{(+)} - V_{(-)}\right)$$

Ritroviamo qui la definizione di forza elettromotrice F.E.M. e chiaramente relazionata al lavoro del generatore, per unità di carica, di forze impresse; porre attenzione al caso $W_{BA} = -W_{AB}$

$$\boxed{V_{(+)} - V_{(-)}} = \boxed{V_E = \frac{W_{BA}}{q'} = \frac{1}{q'}\int_{(-)}^{(+)} \underline{F_i}\,\underline{ds}}$$

F.E.M. ← generatore G

$$W_{BA} = \int_{(-)}^{(+)} \underline{F_i}\,\underline{ds}$$

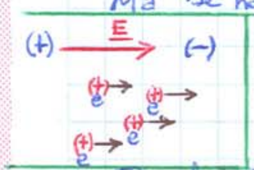
Osserviamo qui la differenza di definizione della FEM tra un generatore G ed un campo elettrico $\underline{E}$

- nel caso si consideri un campo elettrico $\underline{E}$, la FEM è definita su di un circuito $\mathcal{E} = \oint \underline{E}\,\underline{ds}$ e solitamente $\mathcal{E} \neq 0$; solo nel caso di forze conservative (caso elettrostatico) risulta che $\mathcal{E} = 0$
- nel caso si consideri un generatore G, la FEM è definita nel percorso che lo attraversa dal morsetto negativo (-) al morsetto (+) $V_E = \int_{(-)}^{(+)} \underline{F_i}\,\underline{ds}$, anche qui solitamente $V_E \neq 0$; solo nel caso in cui il generatore sia spento $V_E = 0$

In tutti i casi la FEM si misura in $\frac{[J]}{[C]} = [V]$, ed anche se ha la stessa unità di misura del potenziale (volt), bisogna tenere sempre ben presente che differisce da esso perché riconduce ad un concetto di lavoro per unità di carica q'.
Un classico esempio di generatore FEM è la dinamo della bicicletta; altri esempi di generatori sono le PILE - ACCUMULATORI - CICLI TERMODINAMICI eccetera

CORRENTE ELETTRICA

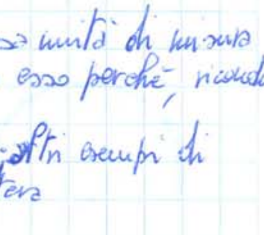
Fino a questo momento abbiamo sempre parlato della carica q, alla quale è sempre associata una massa, (dove q è detta anche particella "portatrice di carica") e abbiamo stabilito che questa fosse IMMOBILE.
Ma se ho n portatori di carica, esempio $q = +e$, soggetti ad un campo elettrico $\underline{E}$, prodotto ad esempio da un generatore G, in assenza di rimedi ulteriori le cariche SI MUOVONO sotto l'azione della forza elettrica con direzione e verso (sono portatori (+)) parallela e concorde a quella del campo elettrico $\underline{E}$



$$\underline{F_e} = e\,\underline{E}$$

Il moto delle cariche dà luogo alla CORRENTE ELETTRICA.

Immediato qui è fissare una superficie di riferimento S ed una direzione associata ad un verso $\underline{U_N}$ come riferimento positivo e dare le seguenti



$$\boxed{\langle I(S)\rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

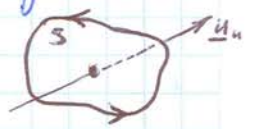
← INTENSITÀ MEDIA di corrente elettrica attraverso una data superficie S, ove Δq è la CARICA NETTA, nel tempo Δt

$$\boxed{I(S) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

← INTENSITÀ ISTANTANEA di corrente elettrica attraverso una data superficie S

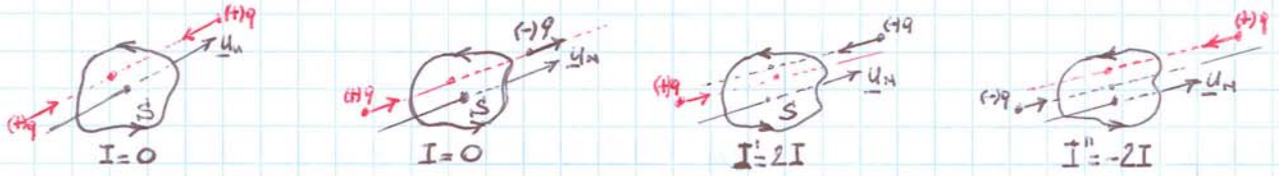
Le dimensioni per l'intensità di corrente (corrente elettrica) sono $I = \frac{[C]}{[s]} = [A]$ ampere

Attenzione qui perché serve fissare bene un criterio da seguire anche più oltre e che ci dia direzione e verso del riferimento adottato; allo scopo vale la regola dei 3 passi: considerata la superficie S assegnata

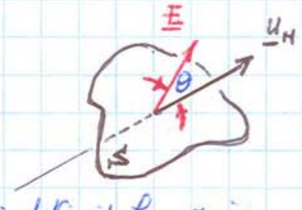


- NE FISSO IL CONTORNO che la delimita
- DO UN ORIENTAMENTO ANTIORARIO al contorno fissato
- USO LA REGOLA DELLA MANO Dx per stabilire una direzione e, poi fisso un verso

Con tale convenzione se due cariche uguali $+q$ attraversano S in modo parallelo ma con verso opposto, il loro contributo è nullo ai fini dell'intensità di corrente, e così pure vale per le cariche parallele ed equiverse $+q$ e $-q$



Il moto delle cariche è dunque legato alla definizione di intensità di corrente, e se perciò il campo elettrico $\underline{E}$, e quindi la velocità $\underline{v}_q$, formano un angolo θ con la normale $\underline{u}_n$ alla superficie S, le cariche q contribuiranno a dare



- $q\underline{v}\cdot\underline{u}_n>0 \Rightarrow I>0$ per $(-)\frac{\pi}{2}<\theta<(+)\frac{\pi}{2}$
- $q\underline{v}\cdot\underline{u}_n<0 \Rightarrow I<0$ per $(+)\frac{\pi}{2}<\theta<(+)\frac{3}{2}\pi$
- $q\underline{v}\cdot\underline{u}_n=0 \Rightarrow I=0$ per $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots)$

Con le stesse convenzioni, ed attraverso la medesima superficie S è definibile qui

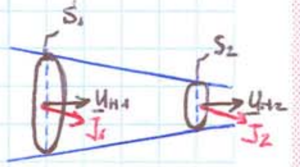
$$\boxed{\langle J(S)\rangle = \frac{I(S)}{S}}$$ ← DENSITÀ MEDIA di corrente elettrica attraverso la superficie S

$$\boxed{J=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta I(S)}{\Delta S}}$$ ← DENSITÀ LOCALE di corrente elettrica

Le dimensioni per la densità di corrente sono $J=\frac{[A]}{[m^2]}$ e non vi è in questo caso un nome particolare come per l'intensità di corrente_

Diamo ancora una definizione di
REGIME STAZIONARIO: è la condizione che impone rimanga costante attraverso ogni sezione del conduttore l'intensità di corrente I

$I_1=I_2$

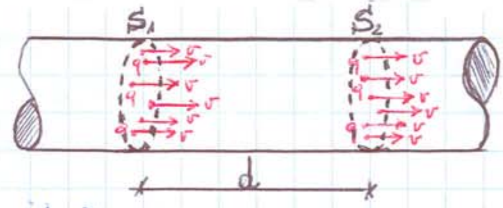


Attenzione che dire regime stazionario NON implica I = COSTANTE nel tempo, la corrente può variare, ma la carica che entra in una data superficie chiusa nell'unità di tempo deve essere uguale alla carica che dalla stessa ne esce

VELOCITÀ delle CARICHE

Consideriamo un conduttore e lo immaginiamo simile ad un tubo ove indichiamo con v la velocità delle cariche; si indichiamo come segue:

- n il numero di portatori di carica
- q la carica positiva (+) o negativa (-) del portatore
- v la velocità di ogni singolo portatore
- S: una generica sezione di un corpo conduttore



per quanto riguarda il numero di portatori di carica, si può calcolare se si conoscono ρ = densità Kg/m^3 della sostanza conduttrice ed A = peso atomico $Kg/Kmole$ e ricordando il numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{26}$ molecole/Kmole, per ogni m³ di sostanza le molecole presenti

$$\boxed{n = \frac{N_A \cdot \rho}{A}}$$

facciamo l'analisi dimensionale $= \dfrac{\frac{molecole}{Kmole} \cdot \frac{Kg}{m^3}}{\frac{Kg}{Kmole}} = molecole/m^3$ qualche esempio lo possiamo fare per

- Cu = RAME $\begin{cases} \rho = 8.96 \cdot 10^3\ Kg/m^3 \\ A = 63,55\ Kg/Kmole \end{cases}$ $\quad n_{Cu} = \dfrac{6,022 \cdot 10^{26} \times 8,96 \cdot 10^3}{63,55} = 8,49 \cdot 10^{28}$ elettroni/m³
- Ag = ARGENTO $\begin{cases} \rho = 10,5 \cdot 10^3\ Kg/m^3 \\ A = 107,87\ Kg/Kmole \end{cases}$ $\quad n_{Ag} = \dfrac{6,022 \cdot 10^{26} \times 10,5 \cdot 10^3}{107,87} = 5,86 \cdot 10^{28}$ elettroni/m³

Detti portatori si muovono sotto l'azione della forza elettrica $F_e = q \cdot E$ lungo la direzione del C.E. E acquistando una velocità v_e, se nel tempo $t = 0$ N cariche transitano attraverso la sezione S_1, al tempo $t = \Delta t$ transiteranno nella sezione S_2 posta a distanza d dalla prima.
Supposta v la velocità di ciascuna carica costante ed uguale per tutte

$d = v \cdot \Delta t$ mentre il numero di cariche N sarà $N = n \cdot \Delta\tau = n \cdot S_1 v \Delta t$ — esempio della rete del pescatore
e questo dice quante cariche N transitano attraverso la sezione generica S nel tempo Δt, ma quanto vale la velocità v?
La velocità v si calcola attraverso la densità J perché:

- se Δq è la variazione di carica attraverso S $\longrightarrow \Delta q = qN = qnSv\Delta t$
- ma Δq è ricavabile dalla intensità $I = \Delta q / \Delta t$ $\quad \Delta q = I \cdot \Delta t$ $\Big\}\ I = qnSv$
- mentre la densità $J = I(S)/S = qnSv/S = qnv$ $\longrightarrow \boxed{v = \dfrac{J}{nq}}$

In definitiva:
- se conosco il materiale di cui è composto il conduttore posso calcolare n
- se conosco carica q e densità J della corrente posso calcolare la velocità v

per esempio: in un conduttore di rame, ove si è visto che $n = 8,5 \cdot 10^{28}\ e/m^3$, si misurano una densità di corrente $J = 5 \cdot 10^6\ A/m^2 = 5\ A/mm^2$, le cui cariche sono costituite da elettroni $q = e = 1,6022 \cdot 10^{-19}\ C$, la velocità di queste si misura in

$$v = \frac{J}{n \cdot q} \simeq \frac{5 \cdot 10^6}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{5}{8,5 \cdot 1,6} \cdot 10^{-3} = 0,368 \cdot 10^{-3} = 3,68 \cdot 10^{-4}$$

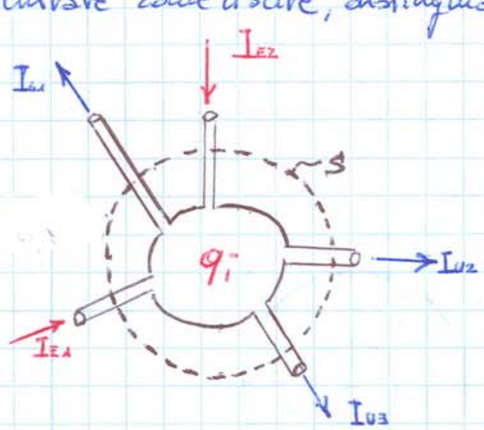
~1/3 di mm al secondo cioè ad una bassissima velocità

Un'ultima precisazione va posta sul fatto che le cariche si muovono attraverso il reticolo in modo completamente disordinato, subendo continue interazioni con gli ioni (URTI) che rendono la traiettoria non rettilinea, soggetta a continui cambi di direzione e di lunghezza variabile d, con risultato di continue accelerazioni e cambi di velocità.
Ciò che noi abbiamo calcolato con v è la velocità di deriva ossia una sorta di velocità media delle cariche conteggiate come N

I^a LEGGE di KIRCHHOFF

Si pensi ora di avere più conduttori (tubi) che convergono in uno stesso punto che chiamo NODO, le cariche in questo possono entrare come uscire, distinguiamo allora

- con il termine I_E se la corrente ENTRA nel nodo
- con il termine I_U se la corrente ESCE dal nodo
- con il termine S una frontiera attorno al nodo



e ci chiediamo ora quanta carica transita attraverso S

ENTRANTI

$$dq_{E1} = I_{E1}\,dt$$
$$dq_{E2} = I_{E2}\,dt$$

USCENTI

$$dq_{u1} = I_{u1}\,dt$$
$$dq_{u2} = I_{u2}\,dt$$
$$dq_{u3} = I_{u3}\,dt$$

$$dq_E = \sum_i dq_{Ei} = \sum_i I_{Ei}\,dt$$

$$dq_u = \sum_i dq_{ui} = \sum_i I_{ui}\,dt$$

con un semplice bilancio delle cariche si conclude che dq_E cariche entrano nel nodo e dq_u cariche escono nel nodo nel tempo infinitesimo dt e vale

- se $dq_E < dq_u$ ovviamente "perdo" della carica nel nodo
- se $dq_E > dq_u$ ovviamente "accumulo" della carica nel nodo

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi: si supponga che il nodo sia in "REGIME STAZIONARIO" ciò vuol dire che I_1 intensità di corrente misurata al tempo t_1 deve essere uguale ad I_2 intensità di corrente al tempo t_2

Ma se $I_1 = I_2$ ciò implica che vi è velocità delle cariche costante ed anche variazione di carica nulla $\quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = 0$

L'invariabilità della carica, dovuta al moto stazionario, unita al principio di conservazione della carica (non posso generare carica, non posso distruggere carica), porta a dire che il numero delle cariche entranti deve essere uguale al numero delle cariche uscenti.

$\boxed{dq_E = dq_u}$ cioè in termini algebrici $\sum_i I_{Ei}\,dt = \sum_i I_{ui}\,dt \longrightarrow \boxed{\sum_i I_{Ei} = \sum_i I_{ui}}$

I^a LEGGE di KIRCHHOFF

La I^a legge di Kirchhoff scritta come sopra non è l'usuale modo nel quale viene presentata; per darle la veste diffusamente conosciuta è necessario stabilire che:

- si conviene indicare come positivo (+) il modulo della corrente uscente dal nodo $I_{ui} = (+)\,|I_{ui}|$
- si conviene indicare come negativo (-) il modulo delle corrente entrante nel nodo $I_{Ei} = (-)\,|I_{Ei}|$

in tale convenzione la precedente diventa $\longrightarrow (-)\sum_i I_{Ei} = (+)\sum_i I_{ui}$

$$(+)\sum_i I_{Ei}\ (+)\sum_i I_{ui} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sum_i I_i = 0}$$

LEGGE dei NODI

Da cui l'enunciato della I^a legge di Kirchhoff:
la somma algebrica delle correnti che CONFLUISCONO in un nodo è nulla

* probabile per il compito (mutati i contenuti)

ESERCIZIO n.38 pagina 104

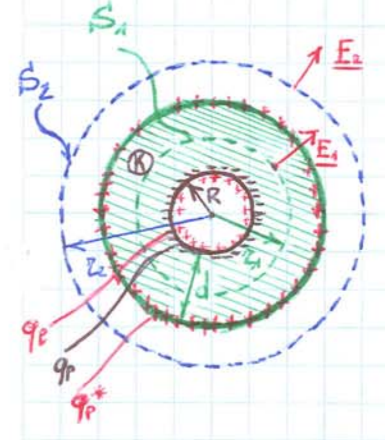
Una sfera conduttrice di raggio $R = 1\,cm$, è circondata da un guscio di materiale isolante di spessore d e possiede una densità di carica $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-6}\,C/m^2$. La densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie dell'isolante di raggio R è di $\sigma_p = 0{,}75\,\sigma$. Calcolare:

a) la costante dielettrica relativa K dell'isolante

b) il campo elettrostatico E_1 in un punto all'interno del dielettrico a distanza $r_1 = 2\,cm$ dal centro

c) a quale distanza r_2 al di fuori dell'isolante, risulta $E_2 = E_1$

RISOLVO



Per determinare la costante dielettrica ci dobbiamo guardare ad un'espressione matematica che ponga in relazione la densità di carica libera $\sigma_e = \sigma$ del conduttore, con la sua carica di polarizzazione, supposto $d \ll R$ tale che si possa assimilare il caso sferico a quello piano studiato precedentemente vale:

$\sigma_p = \varepsilon_0 (K-1) E_K$ non va bene perché non conosciamo ε, E_K

$\underline{\sigma_p = \frac{K-1}{K} \sigma_e = 0{,}75\,\sigma_e}$ ora sta bene è usufruibile.

$K - 1 = K\,0{,}75 \rightarrow K - 0{,}75K = (+)1 \rightarrow \frac{1}{4} K = (+)1 \rightarrow \underline{K = 4}$

Campo elettrostatico E_1, si dovrebbe qui usare la legge di Gauss $\Phi(S_1) = \oint_{S_1} \underline{E_1} \cdot \underline{u}_n\, ds$ sulla superficie di raggio r_1, oppure in alternativa un metodo generale come segue

$\oint_{S_1} \underline{D} \cdot \underline{u}_n\, ds = \sum q_e =$ non compare qui il fattore ε_0 perché per definizione incluso in $\underline{D}$ $= \sigma_e S_1 = \sigma_e 4\pi R^2$

nella ipotesi di un vettore D = COSTANTE e (per simmetria sferica) con direzione radiale $\underline{D} \cdot \underline{u}_n = D$ perciò

$$\oint_{S_1} \underline{D} \cdot \underline{u}_n\, ds = D \oint_{S_1} ds = D 4\pi r_1^2 = [K\varepsilon_0 E(r)] 4\pi r_1^2 = \sigma 4\pi R^2$$

$$\boxed{E(r) = \frac{q_e}{4\pi K \varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma_e R^2}{K \varepsilon_0 r^2}}$$

Nel nostro caso calcoliamo, ponendo $R = 1\,cm = 10^{-2}$ ed $r = 2\,cm = 2 \cdot 10^{-2}$

$$E(r) = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^6}{4^2} \simeq \underline{E_1 \simeq 62\,500\,V/m = 6{,}25 \cdot 10^4\,V/m}$$ campo elettrico all'interno dell'isolante.

Per il calcolo del campo E_2 indico con q_e = carica libera su sfera raggio $R = \sigma 4\pi R^2$

$q_p + q_p^* = 0$ $\begin{cases} q_p = \text{carica polarizzazione su sfera raggio } R = (-)\sigma_p 4\pi R^2 \\ q_p^* = \text{carica polarizzazione su sfera raggio } (R+d) = (+)\sigma_p^* 4\pi (R+d)^2 \end{cases}$ $Q = q_e + q_p + q_p^* = q_e$

$$\oint_{S_2} E_2\, u_n\, ds = E_2(r) \oint_{S_2} ds = E_2(r)\, 4\pi r^2 = \frac{q_e - q_p^* - q_p}{\varepsilon_0} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} \rightarrow \underline{E_2(r) = \frac{q_e}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$$

ciò significa che il C.E. non subisce l'influenza del materiale isolante al di fuori di questo. Ponendo ora la condizione $E_1 = E_2$ troviamo che

$$E_2 = E_1 = \frac{\cancel{\sigma_e R^2}}{\cancel{K \varepsilon_0} r_1^2} = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_e 4\pi R^2}{4\pi \varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\cancel{\sigma_e R^2}}{\cancel{\varepsilon_0} r_2^2} \rightarrow r_2^2 = K r_1^2 = 4 \cdot 2^2 = 16\,cm \Rightarrow \underline{r_2 = 4\,cm}$$

Considerato che il raggio della sfera vale $R = 1\,cm$ e che $r_2 = 4\,cm$ si deduce che lo spessore d dell'isolante deve essere

$\underline{d < 3\,cm}$