martedì
15 maggio 2007 - FISICA 2 prof. MORESCO MAURIZIO h 18:15 ÷ 19:45

lezione n° 10 di 20

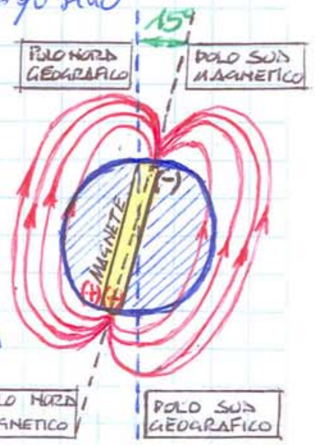
FORZA MAGNETICA F_m

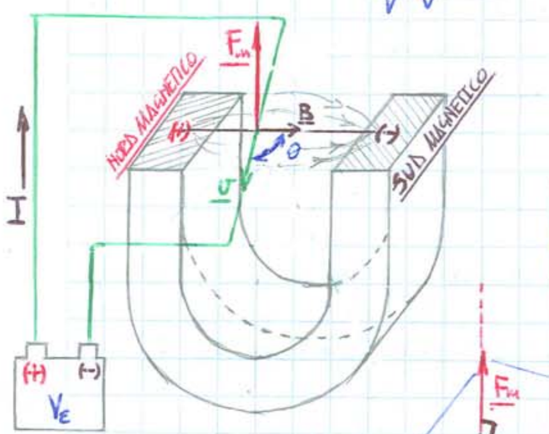
Già nel 1820 Oersted (Danimarca) scoprì che cariche elettriche in movimento producono dei campi magnetici, che noi indicheremo simbolicamente con $\underline{B}$

Detti campi magnetici $\underline{B}$ sono dunque legati al movimento delle cariche (loro velocità $\underline{v}$) ed ad una forza $\underline{F_m}$ = Forza magnetica, attraverso una relazione che fra breve diremo, qui si osserva che

F_m
- (è proporzionale) $\propto$
  - alla velocità v della carica
  - alla carica stessa
  - al prodotto scalare $\underline{B}q\underline{v} = Bqv\sin\vartheta$
- è ortogonale al vettore velocità $\perp \underline{v}$
- è nulla lungo la direzione $\underline{u}$ (vedremo meglio oltre)

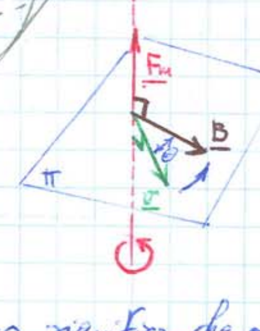
Un campo magnetico $\underline{B}$ avvolge un magnete e punta dal polo NORD magnetico al polo SUD MAGNETICO, nel caso della terra il POLO NORD geografico è corrispondente al POLO SUD magnetico

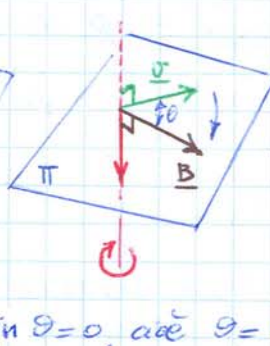




Diamo ora la relazione tra campo magnetico $\underline{B}$, velocità delle cariche $\underline{v}$ e forza magnetica $\underline{F_m}$ nota anche come FORZA DI LORENTZ

$$\boxed{\underline{F_m} = q\,\underline{v} \times \underline{B}}$$





La direzione del vettore $\underline{F_m}$ si ricava con la regola della vite destrorsa ossia
- $\underline{F_m}$ ha direzione $\perp$ al piano contenente $\underline{v}, \underline{B}$
- $\underline{F_m}$ ha verso come quello di avanzamento di una vite destrorsa che nella rotazione porta $\underline{v}$ a chiudere su $\underline{B}$

Il modulo della forza magnetica vale

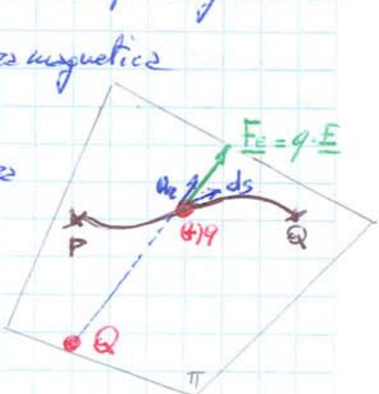
$$\boxed{F_m = q\,v\,B\sin\vartheta}$$

Ecco che se $F_m = 0$ significa che $\sin\vartheta = 0$ cioè $\vartheta = K\pi$, ossia campo magnetico $\underline{B}$ e vettore $\underline{v}$ velocità delle cariche hanno stessa direzione

Notiamo qui subito una differenza tra $\underline{F_e}$ = forza elettrica e $\underline{F_m}$ = forza magnetica

FORZA ELETTRICA (statica)

La (particella) carica q è interagente con la carica statica Q attraverso la forza $\underline{F_e}$ secondo una direzione radiale $\underline{u_r}$



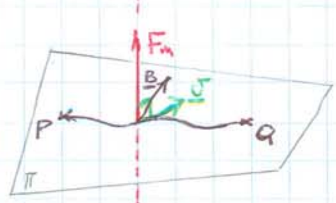
$$\boxed{\underline{F_e}} = K_e \frac{qQ}{r^2}\underline{u_r} = q\left(\frac{K_e Q}{r^2}\underline{u_r}\right) = \boxed{q\,\underline{E}}$$

ed il lavoro prodotto per spostare q dal punto P al punto Q vale

$$W_{PQ} = \oint_P^Q \underline{F_e}\,\underline{ds} = q\oint_P^Q \underline{E}\,\underline{ds} = q(V_P - V_Q) = -q(V_Q - V_P) = \Delta E_K$$

La forza elettrica $\underline{F_e}$ è:
- parallela al campo elettrico $\underline{E}$, hanno stessa direzione $\underline{u_r}$
- quando agisce tra due punti a diverso potenziale ($V_Q \neq V_P$) varia il modulo $|\underline{v}|$ di q perché $E_K \neq 0$
- solitamente varia la direzione di moto $\underline{ds}$ perché da punto a punto non è tangente alla traiettoria

FORZA MAGNETICA



La (particella) carica q è in moto con la velocità $\underline{v} \perp \underline{F_m}$ e, considerato che $\underline{v} \parallel \underline{ds}$, ove $\underline{ds}$ è la direzione del moto, risulta

$$dW = \underline{F_m}\,\underline{ds} = \underline{F_m}\,\underline{v}\,dt = F_m\, v \cos\frac{\pi}{2}\, dt = 0 = dE_K$$

Lungo il percorso PQ il lavoro totale è nullo e perciò $W_{PQ} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 = 0 \rightarrow v_P = v_Q$

Perciò diremo che la forza magnetica $\underline{F_m}$ è:

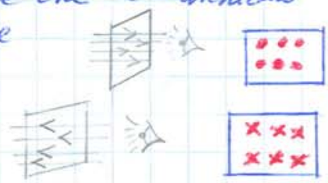
- perpendicolare $\perp$ alla direzione di moto individuata da $\underline{v} = \underline{ds}/dt$
- quando agisce tra due punti P e Q non varia mai il modulo della velocità $|\underline{v}|$
- a meno che $\underline{F_m} = 0$, cambia la direzione del moto attraverso la FORZA CENTRIPETA = B = CAMPO MAGNETICO
- non produce lavoro nello spostamento tra P e Q della carica $dW = \underline{F_m}\,\underline{ds} = (q\underline{v} \times \underline{B}) \cdot \underline{v}\, dt$ ma $(q\underline{v} \times \underline{B}) \perp \underline{v}$ dunque $dW = 0$

Le linee che rappresentano un campo magnetico, come per il C.E., sono in ogni punto tangenti al campo magnetico $\underline{B}$ stesso, e ricordiamo che devono essere $\perp$ perpendicolari alla Forza magnetica $\underline{F_m}$.

B = COSTANTE

Se il campo magnetico è costante $\underline{B} = \text{cost}$, le linee del campo magnetico che lo rappresentano sono tra loro parallele; inoltre si conviene che se indichiamo

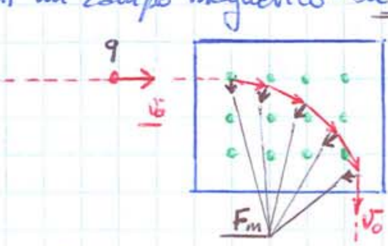
- linee ortogonali ad un piano (il foglio che stiamo leggendo) ma con direzione USCENTE, cioè dal foglio verso il lettore, le indicheremo con un **PUNTO**
- linee ortogonali ad un piano (il foglio che stiamo leggendo) ma con direzione ENTRANTE, cioè dal lettore verso il foglio, le indicheremo con una **CROCE**



MOTO di una PARTICELLA

CASO $\theta = \pi/2$

Immaginiamo ora di avere una (carica) particella q, ed introdurre questa in un campo magnetico ove $\underline{B}$ è costante ed "uscente" dal foglio che stiamo leggendo, con un angolo $\theta = \pi/2$ tra $\underline{v}$ e $\underline{B}$; sia pure $v_0 = \text{COSTANTE}$.

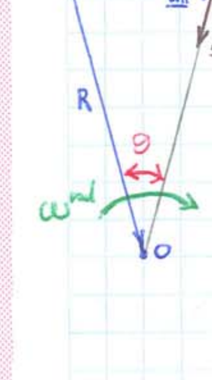


In tal caso la forza magnetica, per la regola della vite, inizialmente avrà direzione verticale e verso orientato al basso $\underline{u}$, e vale

$$\underline{F_m} = q\underline{v_0} \times \underline{B} = q v_0 B \sin\frac{\pi}{2}\, \underline{u} = q v_0 B \underline{u} = \text{COSTANTE}$$

- la condizione $v_0 = \text{COSTANTE}$ rende il moto UNIFORME
- la condizione $\underline{F_m} = \text{COSTANTE}$ non modifica il modulo $|\underline{v_0}|$, ma introduce una forza centripeta costante, rende dunque il moto CIRCOLARE

Il moto della particella con velocità costante $\underline{v_0}$ che entra in un campo magnetico costante $\underline{B}$ con angolo $\theta = \pi/2$ sarà CIRCOLARE UNIFORME, per tutto il tratto in cui tali condizioni permangono; all'uscita dal campo $\underline{B}$ essa riprenderà un moto rettilineo uniforme.



Nel moto circolare uniforme ricordo vale

$$ds = R\,d\theta \rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}} \rightarrow \omega^{rad} = \frac{v}{R} \rightarrow v = \omega^{rad} R$$

Per un vettore ricordiamo poi vale

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\underline{u_T}) = \frac{dv}{dt}\underline{u_T} + v\frac{d\theta}{dt}\underline{u_N} = \frac{dv}{dt}\underline{u_T} + v\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\underline{u_N} = \frac{dv}{dt}\underline{u_T} + \frac{v^2}{R}\underline{u_N}$$

Nel nostro caso si ha $\frac{dv}{dt} = 0$ perché $|\underline{v_0}| = \text{COSTANTE}$ rimane perciò solo la componente centripeta

$$\begin{cases} \underline{F}_{tangenziale} = 0 \\ \underline{F}_{centripeta} = \dfrac{v^2}{R}\underline{u_N} = \omega^2 R\, \underline{u_N} \end{cases}$$

Ritornando al caso della particella q posso scrivere dunque

$$F_{centripeta} = m \cdot a = m \cdot \frac{v_0^2}{R} = F_m = q v_0 B \sin\frac{\pi}{2}$$

$$m\frac{v_0}{R} = qB \quad \rightarrow \quad \boxed{R = \frac{m v_0}{qB}}$$

RAGGIO DI CURVATURA
MOTO CIRCOLARE UNIFORME
PARTICELLA q
notare che $m v_0 = p$ = quantità di moto

Semplice ora, noto il raggio, ricavare anche la velocità angolare ω

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{m v_0} qB = \frac{q}{m} B$$

oppure lo stesso risultato si ottiene con

$$F_{centripeta} = m \cdot a = m\omega^2 R = q v_0 B \sin\frac{\pi}{2} = q \omega R B$$

$$m\omega = qB$$

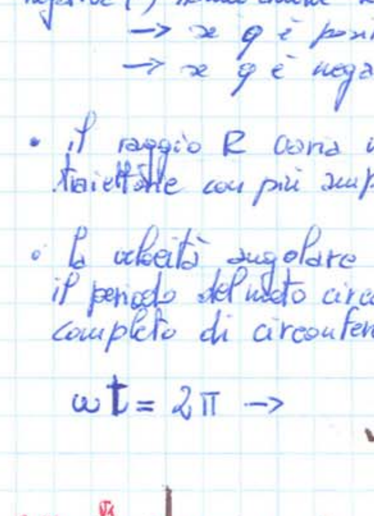
$$\boxed{\omega^{rad} = \frac{q}{m} B}$$

Le osservazioni che possiamo fare sono le seguenti:

- raggio R e velocità angolare ω^{rad} sono completamente indipendenti dall'angolo θ con cui la particella q entra nel campo magnetico $\underline{B}$ perciò le espressioni hanno VALIDITÀ GENERALE
- in termini vettoriali vale $\underline{\omega} = (-)\frac{q}{m}\underline{B}$ perché dalla proprietà $q\underline{v} \times \underline{B} = m\,\underline{\omega} \times \underline{v} = (-)\, m\,\underline{v} \times \underline{\omega}$ anticommutativa del prodotto vettoriale; ciò significa che $\underline{\omega}$ e $\underline{B}$ sono paralleli e se q è negativa (-) hanno anche lo stesso verso
  - → se q è positiva (+) il moto appare ORARIO
  - → se q è negativa (-) il moto appare ANTIORARIO
- il raggio R varia in modo proporzionale alla velocità: particelle più veloci descrivono traiettorie con più ampio raggio, particelle con minore velocità hanno raggio più stretto
- la velocità angolare ω è indipendente dalla velocità della particella, perciò se t è il periodo del moto circolare uniforme, ovvero il tempo impiegato per eseguire un giro completo di circonferenza a raggio R, risulta essere

$$\omega t = 2\pi \quad \rightarrow \quad t = \frac{2\pi}{\omega}$$

ovvero il periodo del moto circolare uniforme (e la frequenza di rotazione) non dipendono dal raggio dell'orbita e dalla velocità con cui questa viene descritta



Ciò significa che le particelle che entrano in un campo magnetico $\underline{B}$ costante con diversa velocità $v_1, v_2, \ldots v_i$, e compiono un ½ giro di cerchio anche se lo fanno con raggi diversi $R_1, R_2, \ldots R_i$, mantengono la loro velocità v_i inalterata e si presentano tutte all'uscita, seppur in posizione diversa ma allo stesso tempo t

Naturalmente di norma elettroni o ioni hanno moto all'interno di contenitori in cui è stato praticato il vuoto per evitare l'azione di disturbo degli urti con le molecole dell'aria; in quest'ultimo caso gli urti altererebbero il moto conferendogli caratteristiche molto diverse da quelle modellizzate con

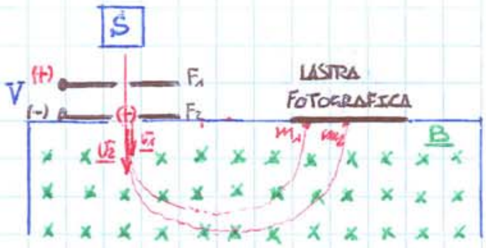
$$\boxed{\underline{F_m} = q\left(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}\right)}$$

ESPRESSIONE COMPLETA DELLA FORZA DI LORENTZ di una particella che si muove in un campo magnetico ed in compresenza di un campo elettrico

SPETTROMETRI DI MASSA

Lo spettrometro di massa è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica ma <u>con MASSA DIVERSA</u>; esempio tipico sono gli ISOTOPI, cioè gli atomi con ugual numero Z di protoni nel nucleo, ma con diverso numero di neutroni N.
Un esempio di spettrometro è lo

SPETTROMETRO DI DEMPSTER



Progettato nel 1920 dall'omonimo scienziato gli ioni sono prodotti da una sorgente S e passano attraverso una coppia di fenditure F_1 ed F_2 che ne definiscono la traiettoria.
Tra la coppia di fenditure è applicata una d.d.p. dell'ordine di $10^3\,V$, ed all'uscita della fenditura F_2 tutti gli ioni indipendentemente dalla loro massa hanno uguale energia cinetica, che se hanno la stessa carica e considerando trascurabile la velocità iniziale si misura in

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = qV$$

con riferimento alla figura sopra, ove il campo magnetico B "entra nel foglio" indicando con i seguenti pedici
i = iniziale f = finale

per il principio di conservazione dell'energia si può scrivere che tra le due fenditure risulta

$$E_{Ki} + E_{pi} = E_{Kf} + E_{pf} \longrightarrow E_{pi} - E_{pf} = E_{Kf} - E_{Ki}$$

ma ricordando qui che $\underline{(+)W_{12} = E_{pi} - E_{pf} = (+)q(V_i - V_f) = (-)q(V_f - V_i) = qV}$ e che l'ipotesi di velocità iniziale trascurabile significa $v_i = 0$, possiamo scrivere

$$E_{pi} - E_{pf} = E_{Kf} - E_{Ki} = qV = \frac{1}{2} m v_f^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2} = \frac{1}{2} m v_f^2 = qV$$

$$v_f^2 = 2\frac{q}{m} V \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{2\frac{q}{m} V}}$$

VELOCITÀ DI UNA PARTICELLA IN TRANSITO SU DI UN CONDENSATORE PIANO OVE $v_i = 0$

Il risultato conseguito va ben tenuto a memoria perché sarà impiegato anche successivamente.

Nota la velocità di ingresso nel campo magnetico il calcolo del raggio di curvatura, descritto dalla traiettoria della particella si calcola in

$$R = \frac{m v}{qB} = \frac{m}{q}\sqrt{2\frac{q}{m}V}\,\frac{1}{B} = \sqrt{2\frac{m^2}{q^2}\frac{q}{m}V}\,\frac{1}{B} \longrightarrow \boxed{R = \sqrt{2\left(\frac{m}{q}\right)V}\,\frac{1}{B}}$$

RAGGIO DI CURVATURA DEL MOTO DI UNA CARICA IN UN C.M. B = COSTANTE

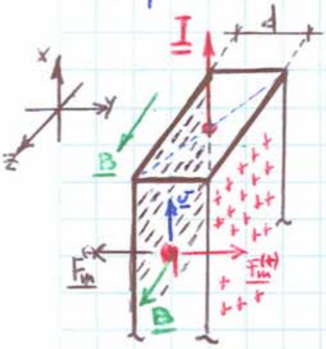
Si noti che nel caso in esame il raggio di curvatura è insensibile alla velocità v con cui la particella entra nel campo magnetico B, e se queste hanno stessa carica q il diverso raggio dipende unicamente dalla diversa massa = spettro di massa
Ecco così ottenuto che il fascetto di ioni isoenergetici sottile e collimato, dopo essere transitato dalla fenditura F_2 entra in una regione in cui agisce solo un campo magnetico B uniforme (ORTOGONALE AL DISEGNO ED ENTRANTE NEL FOGLIO), supposte le cariche positive (+), a parità di energia cinetica e di carica, a masse diverse corrispondono velocità v diverse e raggi R diversi

SPETTROMETRO DI BAINBRIDGE

Non daremo dimostrazione di come funziona tale spettrometro, però ai fini didattici solo per cultura si legga attentamente (non necessario studio) pagina 160÷161 del testo adottato, la sezione dedicata all'argomento

EFFETTO HALL

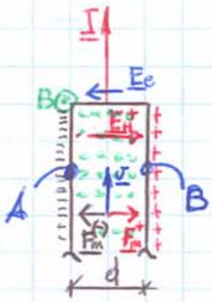
Il fenomeno si manifesta sia nei corpi conduttori che semiconduttori; allo scopo si consideri un corpo conduttore a sezione rettangolare ove d misura la distanza tra due facce opposte valgono le seguenti



$\underline{I}$ = intensità di corrente con direzione parallela all'asse conduttore
$\underline{B}$ = campo magnetico parallelo a due facce del conduttore uniforme
$\underline{v}$ = velocità delle cariche, supposte qui per semplicità costanti $q = cost.$
$\underline{F_m}$ = Forza magnetica calcolata come visto $\underline{F_m} = q\,\underline{v} \times \underline{B}$

accade che le cariche positive (+) si accumulano sulla parete di destra in quanto $\underline{F_m^+} = q\,\underline{v} \times \underline{B}$ ha direzione parallela ad y e verso ad essa concorde

accade che le cariche negative (-) si accumulano sulla parete di sinistra in quanto $\underline{F_m^-} = (-)q\,\underline{v} \times \underline{B} = -\underline{F_m^+}$ ha direzione parallela ad y e verso discorde



Se si genera un "doppio strato" viene a formarsi un campo elettrico che chiameró

$$\underline{E_H} = \frac{\underline{F_m}}{q} = \text{CAMPO ELETTROMOTORE} \longrightarrow \underline{F_m} = q\,\underline{E_H}$$

verso e direzione del campo elettromotore concordano con la forza magnetica F_m e considerato che $\underline{v} \perp \underline{B}$, dipende cioè dalla carica q se positiva (+) o negativa (-)

in modulo $\rightarrow F_m = \cancel{q}\,E_H = \cancel{q}\,v \cdot B \cdot \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1}$ $\quad \boxed{E_H = v\,B}$ in modulo $\quad \boxed{\underline{E_H} = \underline{v} \times \underline{B}}$ CAMPO DI HALL (Fisico - A3P9)

Il campo di Hall provoca una deflessione nel moto delle cariche, aggiungendo una componente perpendicolare $\perp$ alla velocità $\underline{v}$; dall'insorgere del campo di Hall si origina un campo ELETTROSTATICO E_e che si oppone all'ulteriore accumulo di cariche e all'equilibrio il dispositivo si comporta come un generatore G di FEM in cui non circola la corrente -

$$\boxed{\underline{E_H} + \underline{E_e} = 0}$$

Ricorrendo alla definizione di tensione, dal punto A al punto B in direzione ortogonale alle facce

$$V_A - V_B = V_H = \int_A^B \underline{E_H} \cdot \underline{ds} = \int_A^B E_H\,ds \cos\overset{1}{0} = E_H \int_A^B ds = E_H\,d \qquad \boxed{V_H = (\pm) E\,d = (\pm)\,v\,B\,d}$$

ove vale il segno (+) se le cariche q sono positive (+)
ove vale il segno (-) se le cariche q sono negative (-)

Guardiamo qui alle dimensioni del campo magnetico, esso viene espresso in

$B = [T] =$ tesla — è questa un'unità di misura considerevole, basti ricordare che il campo magnetico della terra vale $B_T \cong 0.5 \cdot 10^{-4}\,T$
Talvolta in sua vece si utilizza il GAUSS dove $\;1G = 10^{-4}T$
ritornando all'esempio della terra $B_T \simeq 1/2\,G$

un piccolo esempio pratico del campo di Hall si può fare considerando

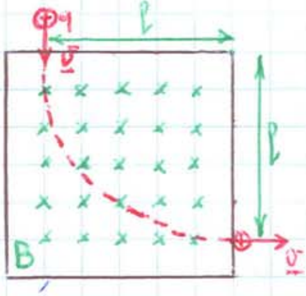
$$\left.\begin{aligned} B &= 0{,}01 = 10^{-2}\,T \\ v &\simeq 10^{-4}\,m/s \\ d &= 1\,cm = 10^{-2}\,m \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} V_H &= 10^{-4} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-8}\,V \\ E_H &= 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 10^{-6} \end{aligned}$$

Per concludere guardiamo al caso in cui le cariche siano negative (-) (elettroni); mantenendo costante il campo magnetico $\underline{B}$ la $\underline{v}$ cambia verso ed il prodotto
$\underline{F_m} = q\,\underline{v} \times \underline{B}$ dice che le cariche positive (+) si accumulano sulla faccia di sinistra
le cariche negative (-) si accumulano sulla faccia di destra
dunque $\underline{F_m}$ per cariche negative RIMANE ORIENTATO VERSO DX

ESERCIZIO 6.3 pagina 165

Un fascio di protoni, accelerato da una d.d.p. di $V = 7MV$, deve essere curvato di 90°. Se la curvatura deve avvenire in un tratto di lunghezza $\ell = 1,5\,m$, calcolare il valore del campo magnetico **B** necessario.

RISOLVO



Trattandosi di un protone $\left.\begin{array}{l} q = e = 1,6022 \cdot 10^{-19}\,C \\ m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\,Kg \end{array}\right\}$ $\quad \dfrac{q}{m} = \dfrac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 0,96 \cdot 10^{8} \simeq 10^{8}$

Dalla nota $\underbrace{R = \dfrac{mv}{qB}}$ se poniamo $R = \ell = 1,5\,m$ calcolata la velocità v possiamo determinare B.

Per la velocità supposto che $v_i = 0$ prima di subire l'accelerazione, scrivo

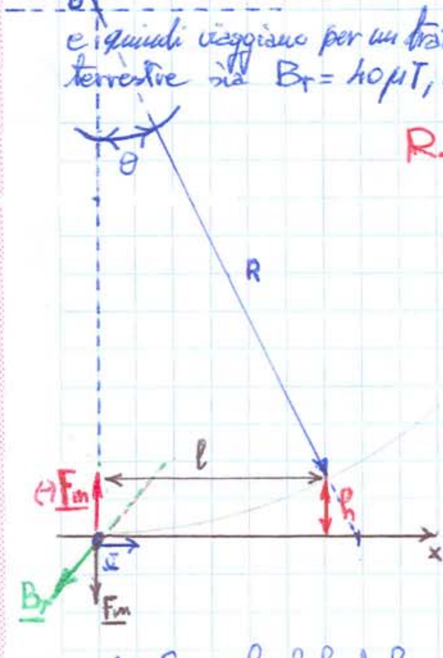
$W = qV = \frac{1}{2}mv^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2} = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \underline{v} = \sqrt{2\frac{q}{m}V} = \sqrt{2 \cdot 10^{8} \cdot 7 \cdot 10^{6}} \simeq \underline{3,74 \cdot 10^{7}\,m/s}$

$B = v\dfrac{m}{q} \cdot \dfrac{1}{R} = 10^{-8}\, 3,74 \cdot 10^{7}\, \dfrac{1}{1,5} = \underline{B \simeq 2,5 \cdot 10^{-1} = 0,25\,T = 2500\,G}$ pari alla metà del campo magnetico presente sulla terra

ESERCIZIO 6.4 pagina 165

Gli elettroni di un tubo televisivo vengono accelerati da una d.d.p. $V = 10\,KV$ e quindi viaggiano per un tratto $\ell = 30\,cm$ lungo il tubo. Nell'ipotesi che la componente del campo magnetico terrestre sia $B_T = 40\,\mu T$, calcolare la deviazione h subita dal fascio di elettroni alla fine del tratto ℓ.

RISOLVO



Con la nota $\underline{F_m} = q\underline{v} \times \underline{B}$ otteniamo direzione e verso di $\underline{F_m}$, attenzione però che $q = -e$ perciò guarderemo perciò al verso opposto ad $\underline{F_m}$

$-\underline{F_m} = (e)\underline{v} \times \underline{B}$

Per risolvere l'esercizio, supposta $\underline{v}$ = COSTANTE, cerchiamo il raggio R della traiettoria circolare percorsa dalla particella e il allo scopo, cerchiamo prima la velocità

$v = \sqrt{2\dfrac{q}{m}V} = \sqrt{2 \times 1,76 \cdot 10^{11} \times 10^{4}} \simeq 5,93 \times 10^{7}\,m/s \simeq \underline{6 \cdot 10^{7}\,m/s}$

Poi dalla nota $R = \dfrac{mv}{qB} = 1,76 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{7} \cdot 4 \cdot 10^{5} = \underline{R = 8,52\,m}$

ed infine il calcolo di h, che è un problema di tipo geometrico, vediamo come risolverlo

Con teorema di Pitagora $R^2 = \ell^2 + (R-h)^2 \rightarrow h = R - \sqrt{R^2 - \ell^2} = 8,52 - \sqrt{8,52^2 - 0,3^2} = \underline{h = 5,2\,mm}$