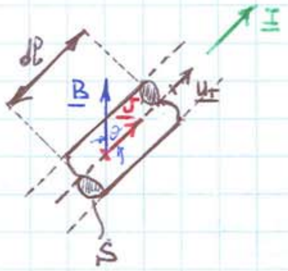
Fino ad ora abbiamo esposto alcune proprietà dell'interazione magnetica, e analizzato la Forza $\underline{F_m} = q\,\underline{v} \times \underline{B}$ (forza di Lorentz) dovuta all'interazione delle cariche elettriche in movimento interagenti con un campo magnetico.
Indaghiamo ora su quale legame vi sia tra il campo magnetico $\underline{B}$ e le correnti che lo generano, per renderlo in forma esplicita.

II^a LEGGE di LAPLACE (elementare)

Consideriamo un tronco infinitesimo dl di un conduttore filiforme e, percorso dalla corrente $\underline{I}$, ove le cariche si muovono con velocità $\underline{v}$.
Sia $\underline{u}_t$ un versore tangente la direzione del tronco dl e verso concorde alla intensità I (dunque alla velocità $\underline{v}$) ed S la sezione dello stesso



$\underline{u}_t \parallel \underline{v}$ $\quad |\underline{u}_t| = 1$ $\quad \underline{v} = \underline{u}_t\, v$

abbiamo visto che il numero $n = \frac{N_0 \rho}{A}$ = cariche $[m^{-3}]$ rappresenta il numero di portatori di carica per ogni m^3 di materiale conduttore da cui la densità di carica e l'intensità di corrente si misurano come segue

$$J = nqv \longrightarrow I = J \times S = nqvS$$

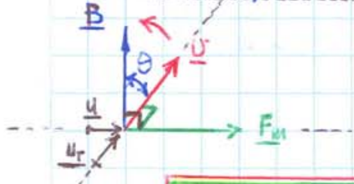
dove con $N = nvS$, possiamo indicare il numero delle cariche in transito attraverso la sezione S nell'unità di tempo.
Supposte qui le cariche tutte uguali e con medesima velocità di deriva $\underline{v}$, la forza magnetica espressa da queste è immaginabile come somma di tutti i singoli contributi come

$$\underline{F_m} = \sum_1^N{}_i\, \underline{F_{m_i}} = \sum_1^N{}_i \overbrace{(q\,\underline{v} \times \underline{B})}^{\text{FORZA di LORENTZ}} = N\,q\,\underline{v} \times \underline{B}$$

Se ora le cariche diventano infinitesime $N \to dN$ la loro forza magnetica diventa pure infinitesima $F \to dF$ ed anche l'unità di tempo tende a zero $t \to dt$, tale che

$$dN = n\,d\tau = n(vS\,dt) = nS(v\,dt) = nS\,dl$$

$$\underline{dF} = dN\,q\,\underline{v} \times \underline{B} = (nS\,dl)\,q\,\underline{v} \times \underline{B} = \underbrace{(n)S\,dl(q)(v)}_{J}\ \underline{u}_t \times \underline{B} = (JS)\ \underline{u}_t \times \underline{B}\,dl = I\,\underline{u}_t \times \underline{B}\,dl$$



ma il prodotto esterno di un versore per un vettore risulta essere

$\underline{u}_t \times \underline{B} = 1 \cdot B \sin\theta \cdot \underline{u} = B \sin\theta\, \underline{u}$ — ove $\underline{u}$ è un versore che indica direzione e verso della $\underline{F_m}$

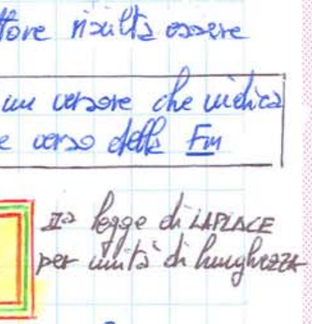
$$\boxed{\underline{dF_m} = IB \sin\theta\, dl\, \underline{u} = \underline{dF} = I \cdot \underline{u}_t \times \underline{B} \cdot dl}$$

II^a LEGGE di LAPLACE

$$\boxed{\frac{\underline{dF_m}}{dl} = IB \sin\theta\, \underline{u}}$$

II^a legge di LAPLACE per unità di lunghezza

Nel conduttore filiforme, soggetto alle condizioni sopra, e che va dal punto A al punto C, possiamo dire genericamente che la forza magnetica $\underline{F_{AC}}$ si calcola come

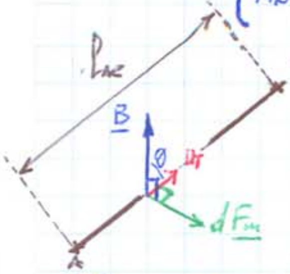


$$\underline{F_{AC}} = \int_A^C IB \sin\theta\, \underline{u}\, dl \;=\; \text{se dettiamo la condizione sia } I = \text{COSTANTE} \;=\; I \int_A^C B \sin\theta\, \underline{u}\, dl$$

ma questa è un'espressione matematica ancora poco "maneggevole" diamo dunque altre due condizioni semplificative

CONDIZIONI: intensità di corrente costante $\underline{I}$ = COSTANTE

{ campo magnetico costante $\underline{B}$ = COSTANTE
{ Filo con percorso RETTILINEO $\underline{u}_T$ ha direzione immutabile }

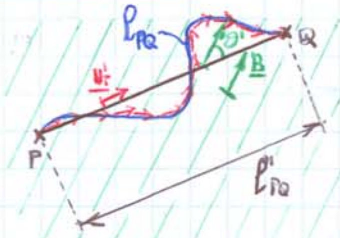


$$\underline{F}_{AC} = \int_A^C I\underline{u}_T \times \underline{B}\,dl = \int_A^C IB\sin\vartheta\,\underline{u}\,dl =$$ per $\underline{u}_T$ = direzione costante, $\sin\vartheta$ = cost.; $\underline{u}$ = dir. cost.

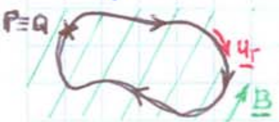
$$= IB\sin\vartheta\,\underline{u}\int_A^C dl = \boxed{\underline{F}_{AC} = IB\sin\vartheta\, l_{AC}\,\underline{u}}$$

II^a legge di LAPLACE per
- I = COSTANTE
- B = COSTANTE
- conduttore RETTILINEO

Nel caso in cui si rimuova l'ipotesi di un percorso rettilineo ma permanga una corrente $\underline{I}$ costante, ed anche un campo magnetico $\underline{B}$ costante, senza darne dimostrazione si ricordi che nel conduttore CURVILINEO che va dal punto P al punto Q (in un piano) la forza magnetica esercitata dalla corrente elettrica (in cui agisce il campo $\underline{B}$) non dipende dalla forma del filo ma solo dalla lunghezza del segmento che unisce i due estremi



$$\boxed{\underline{F}_{PQ} = IB\sin\vartheta'\, l_{PQ}'\,\underline{u}_T'}$$



E' evidente da quest'ultima relazione che la forza magnetica che agisce su di un CIRCUITO piano, e soggetto all'azione di un campo magnetico $\underline{B}$ = COSTANTE è nulla $\underline{F}_{P\equiv Q} = 0$

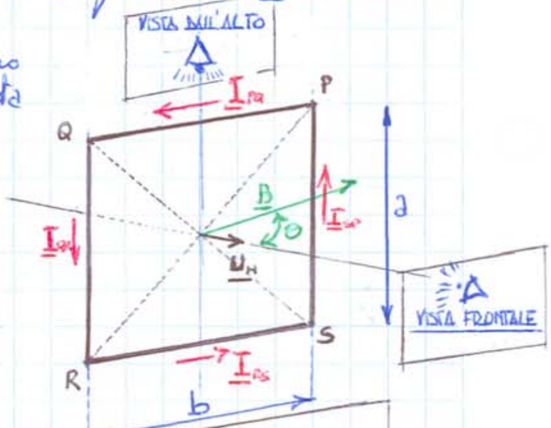
Ma l'ultima osservazione va approfondita: da un punto di vista meccanico la forza magnetica va considerata come LA RISULTANTE di un sistema di forze applicate in diversi punti del filo conduttore piano, $\underline{R} = \underline{F}_m = \sum$ forze esterne e, dalla meccanica classica $\underline{R}$ fisicamente si manifesta con il moto del centro di massa m del corpo

$$\boxed{\underline{R} = \underline{F}_m = m\,\underline{a} = \emptyset}$$

Dire qui R = 0 significa che un circuito piano non si sposta, ma non significa dire anche che NON ruota: la rotazione è prodotta dal momento risultante, quando questo non è nullo $\sum M_i \neq 0 \implies$ vi è rotazione -

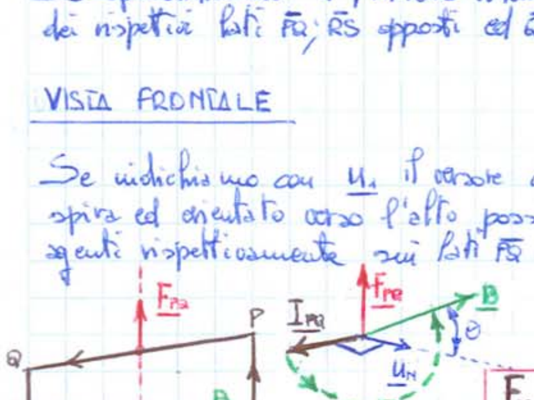
Vediamo un esempio concreto di una spira rettangolare di lati a x b ed angoli PQRS, sia questa percorsa dalla corrente $\underline{I}$, abbiamo $\underline{u}_N$ il versore della normale al piano della spira e, sia immersa nel campo magnetico $\underline{B}$ uniforme che forma l'angolo ϑ con $\underline{u}_N$

Se "spacchettiamo" il problema vedendo cosa accade su ciascuno dei rispettivi lati $\overline{PQ}, \overline{RS}$ opposti ed $\overline{QR}, \overline{PS}$ rispettivamente si nota



VISTA FRONTALE

Se indichiamo con $\underline{u}_A$ il versore che giace nel piano della spira ed orientato verso l'alto possiamo dire che le forze agenti rispettivamente sui lati $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ valgono



$$\underline{F}_{PQ} = I\overline{PQ}\,B\sin(\pi/2+\vartheta)\,\underline{u}_A = IbB\cos\vartheta\,\underline{u}_A$$

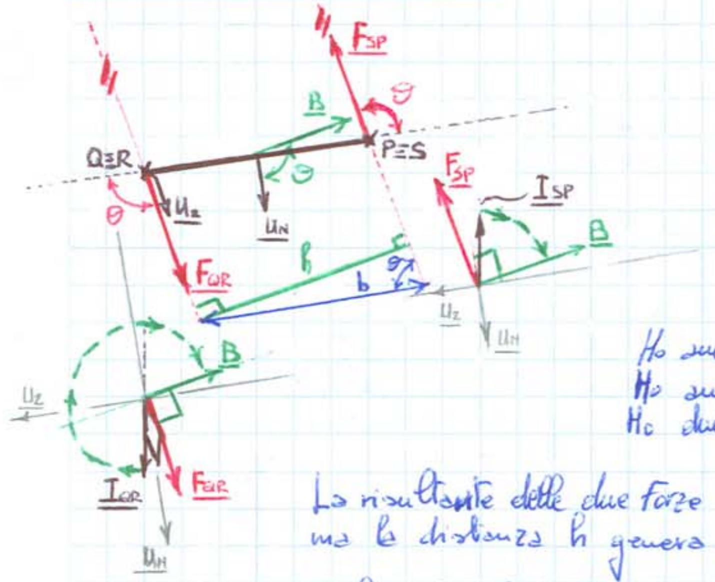
$$\underline{F}_{RS} = I\overline{RS}\,B\sin(\pi/2-\vartheta)(-)\underline{u}_A = IbB\cos\vartheta(-)\underline{u}_A$$

le forze agenti rispettivamente sui lati $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ risultano avere stessa intensità stessa direzione ma verso opposto, la loro risultante è nulla

$$\underline{F}_{PQ} + \underline{F}_{RS} = 0$$

E considerato che si possono considerare agenti nel punto medio del lato su cui agiscono NON generano momento $\implies$ per effetto di queste due forze la spira NON ruota

VISTA DALL'ALTO / BASSO



Per le "bracci verticali" $\overline{QR}$ ed $\overline{SP}$ della spira risulta che $\underline{B} \perp$ a questi cioè $\vartheta = \pi/2$ ed il calcolo delle forze magnetiche agenti su questi lati si calcola come

$$\underbrace{\underline{F_{QR}}} = I\overline{QR}\,B \sin\tfrac{\pi}{2}\, \underline{u_z} = \underbrace{I a B\, \underline{u_z}}$$

$$\underbrace{\underline{F_{SP}}} = I\overline{SP}\,B \sin\tfrac{\pi}{2}(-)\, u_z = \underbrace{I a B (-) \underline{u_z}}$$

Ho ancora una volta due forze in modulo uguali
Ho ancora una volta due forze agenti con verso opposto $\pm u_z$
Ho due forze agenti lungo direzioni parallele a distanza h

La risultante delle due forze è ancora nulla $\underbrace{\underline{F_{QR}} + \underline{F_{SP}} = 0}$
ma la distanza h genera un momento dovuto appunto alla coppia di forze

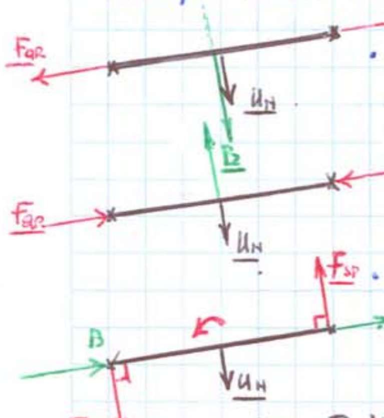
$$M = F_{QR} \cdot h = F_{SP} \cdot h = I B a\,(b \sin\vartheta) = I B\,(a \cdot b) \sin\vartheta \qquad \text{ma } \underbrace{(a \times b) = \text{area spira} = S}$$

$$\boxed{M = I S B \sin\vartheta}$$

momento magnetico SPIRA di superficie S

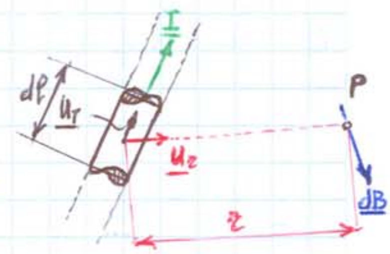
le forze magnetiche agenti sulle braccia verticali innescano una rotazione della spira

Ricapitolando: nella spira la risultante delle forze esterne è nulla $\underline{R} = \underline{F_m} = 0$



- se nella spira il campo magnetico è ortogonale al piano che la contiene
  $\vartheta = 0 \longrightarrow$ il momento M è nullo $M = 0 \longrightarrow$ EQUILIBRIO STABILE
  perchè le forze "estendono" la spira
  $\vartheta = \pi \longrightarrow$ il momento M è nullo $M = 0 \longrightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE
  perchè le forze "comprimono" la spira
- se nella spira il campo magnetico è parallelo al piano che la contiene
  $\vartheta = \pm\pi/2 \longrightarrow$ il momento è massimo $\underbrace{M = \max = ISB}$ e la sua azione fa ruotare la spira in modo tale da far risultare $\underline{u_N} \parallel \underline{B}$

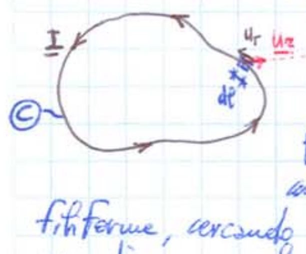
I^a LEGGE di LAPLACE (elementare)



Tornando ora allo studio del legame esistente tra il c.m. B e le correnti che lo generano, i risultati dei primi esperimenti sulle caratteristiche di $\underline{B}$, nel caso di conduttori filiformi, indussero LAPLACE a formulare una legge, la quale esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo dl di filo, percorso dalla corrente I, in un punto P distante r dall'elemento di filo come

$$\boxed{d\underline{B} = K_m I\, \frac{\underline{u_T} \times \underline{u_r}}{r^2}\, dl}$$

dove $\underbrace{K_m = 10^{-7} \left[\frac{T_m}{A}\right]} = 10^{-7}\left[\frac{H}{m}\right]$ = COSTANTE MAGNETICA di cui diremo più avanti.



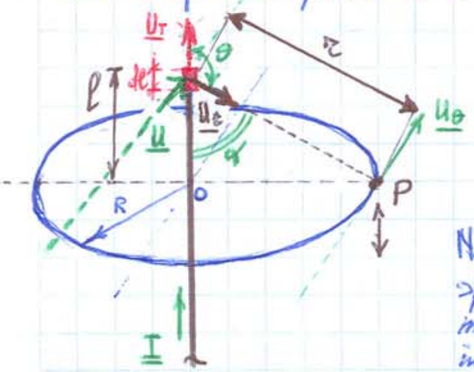
In termini finiti si scrive per un CIRCUITO CHIUSO

$$\boxed{\underline{B} = \oint_c K_m I\, \frac{\underline{u_T} \times \underline{u_r}}{r^2}\, dl}$$

Possiamo applicare ora la I^a legge elementare di LAPLACE a delle configurazioni semplici, in cui la corrente percorre un conduttore filiforme, cercando di ridurre l'integrale calcolato sul circuito © ad un integrale monodimensionale.

LEGGE di BIOT-SAVART

Poniamo il caso di avere un filo conduttore pari ad una spira circolare, ma ove il raggio è così ampio da poterlo immaginare rettilineo, almeno per un breve tratto lungo l.



Per il generico punto P posto a distanza r dall'elemento infinitesimo dl del circuito, il campo magnetico a cui è soggetto si misura con la I^a legge elementare di LAPLACE

$$\underline{dB} = K_m I \frac{u_T \times u_r}{r^2} dl = \frac{K_m I}{r^2} 1 \cdot 1 \cdot \sin\theta\, \underline{u}\, dl = \frac{K_m I \sin\theta}{r^2} dl\, \underline{u}$$

Nell'intorno di raggio R la interazione magnetica non varia, se però sposto verticalmente ↕ il punto P varia $\left\{\begin{array}{l}\text{LA DISTANZA } r\\ \text{L'ANGOLO } \theta\end{array}\right.$ ma in un qualche modo questi due parametri sono tra loro in relazione, infatti se ora calcolo la forza magnetica dell'intero circuito in P scrivo

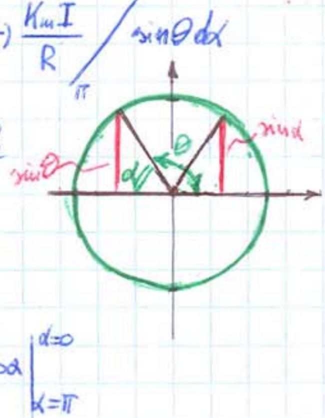
$$B = \oint_{-\infty}^{+\infty} K_m \frac{I \sin\theta}{r^2}\, dl =$$

gli estremi dell'integrale sono $+\infty$ e $-\infty$ per l'ipotesi di rettilineità del filo conduttore; con un cambio di variabile come a fianco, ed inserendo il risultato nell'integrale

$$= \oint_{\pi}^{0} K_m I \frac{\cancel{\sin^2\alpha}}{R^{\cancel{2}}} \sin\theta\, (-) R \frac{1}{\cancel{\sin^2\alpha}}\, d\alpha = (-) \frac{K_m I}{R} \int_{\pi}^{0} \sin\theta\, d\alpha$$

CONTRIBUTO FILO SUPERIORE

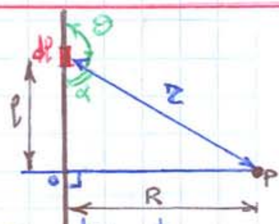
CONTRIBUTO FILO INFERIORE



$(\alpha + \theta =) \pi$

$R/l = \operatorname{tg}\alpha$

$R/r = \sin\alpha$



per porre r ed l in funzione di α noto

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin\alpha}{R} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{R^2}}$$

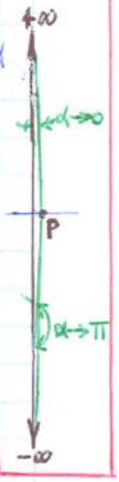
$$l = R/\operatorname{tg}\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \longrightarrow dl = R\frac{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} d\alpha$$

$$\boxed{dl = (-) R \frac{1}{\sin^2\alpha} d\alpha}$$

se $l \rightarrow +\infty$ risulta che $\alpha \rightarrow 0$

se $l \rightarrow -\infty$ risulta che $\alpha \rightarrow \pi$

PER CAMBIO VARIABILE



ma ricordiamo che per la funzione seno vale

$\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$$= (-) \frac{K_m I}{R} \int_{\pi}^{0} \sin\alpha\, d\alpha = (-) \frac{K_m I}{R} (-) \cos\alpha \Big|_{\alpha=\pi}^{\alpha=0}$$

$$= (+) \frac{K_m I}{R} (1 - (-1)) = \boxed{B = K_m \frac{I}{R} 2}$$

in termini vettoriali detto $\underline{u}_\theta$ il versore tangente la circonferenza di raggio R ed orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite destrorsa

$$\underline{B} = K_m \frac{I}{R} 2\, \underline{u}_\theta$$

se ora la costante magnetica, similmente a quanto già fatto con $K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ la si pone uguale ad $\boxed{K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}}$

$$\mu_0 = 4\pi K_m \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \simeq 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ H/m$$

$$= \frac{\mu_0}{{}_2\cancel{4}\pi} \frac{I}{R} \cancel{2}\, \underline{u}_\theta = \boxed{\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \underline{u}_\theta}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART FILO RETTILINEO

La legge di B-S ci dice che per un filo rettilineo indefinito il campo magnetico prodotto dalle cariche che generano un'intensità di corrente $\underline{I}$, è inversamente proporzionale alla distanza R del punto P dal filo stesso, le sue linee sono CIRCONFERENZE CONCENTRICHE e la sua direzione e verso è tangente alle circonferenze stesse (si applica la REGOLA MANO DESTRA)

È questo il legame tra campo magnetico $\underline{B}$ e corrente $\underline{I}$ che cercavamo, la relazione di BIOT-SAVART esplicita in modo diretto la relazione tra la corrente $\underline{I}$, sorgente del campo stesso, ed il campo magnetico $\underline{B}$, attraverso delle circonferenze concentriche di raggio R.