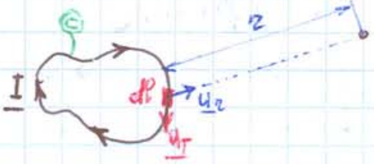
22 maggio 2007 martedì – FISICA 2 - prof. MORESCO MAURIZIO h 18:15 ÷ 19:45

Lezione n° 12 di 20

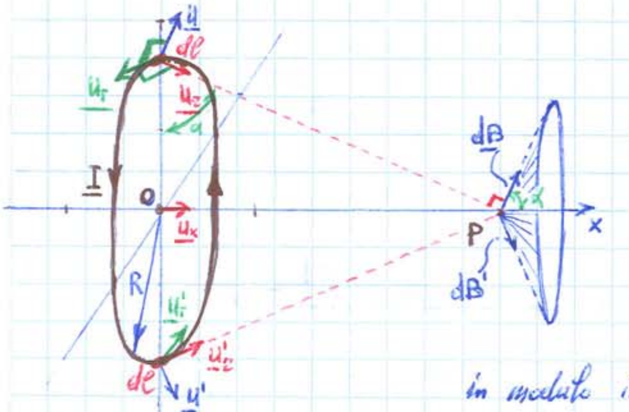
Attraverso la I^a legge di LAPLACE, con opportune ipotesi, abbiamo determinato che per un filo rettilineo indefinito, il campo magnetico $\underline{B}$ agisce sul punto distante R dallo stesso, con legge $\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\underline{u}_\theta$ detta di Biot-Savart; vediamo ora altri 3 importanti risultati

SPIRA TONDA



La I^a legge elementare di LAPLACE si applica a circuiti di conduttori elettrici ed assicura valga

$d\underline{B} = K_m I \frac{\underline{u}_T \times \underline{u}_z}{z^2} dl$ e sommando tutti gli infinitesimi contributi del circuito $\underline{B} = K_m I \oint_c \frac{\underline{u}_T \times \underline{u}_z}{z^2} dl$



Nel caso si prenda in esame una spira circolare di raggio R e percorsa dalla corrente $\underline{I}$, nel punto P distante x dal suo centro O l'elemento dl risulta avere versore $\underline{u}_T$ tangente la spira
avere versore $\underline{u}_z$ ortogonale alla spira

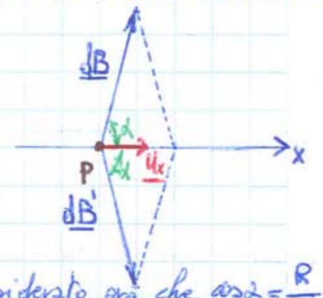
$\underline{u}_T \times \underline{u}_z = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot u = \underline{u}$ ove $\underline{u}$ è versore parallelo al campo magnetico infinitesimo prodotto da dl $\quad \underline{u} \parallel d\underline{B}$

in modulo il campo infinitesimo misura $d\underline{B} = K_m I \frac{\underline{u}_T \times \underline{u}_z}{z^2} dl = \frac{K_m I}{z^2}\underline{u}\, dl$

$$|d\underline{B}| = dB = \frac{K_m I}{z^2} dl \quad \text{e per simmetria circolare } dB = dB'$$

È interessante aver notato la simmetria circolare, perché se sommo una coppia di contributi infinitesimi otteniamo la seguente

$$d\underline{B} + d\underline{B}' = 2dB \cdot \cos\alpha\, \underline{u}_x$$



ciò significa che
- è possibile limitare l'integrazione per determinare $\underline{B}$ tra gli estremi $0 \div \pi$
- la risultante del campo magnetico $\underline{B}$ agirà lungo la direzione $\underline{u}_x$ dell'asse x

calcoliamo dunque il campo magnetico con Amper-Laplace

$$\underline{B} = \oint_c K_m I \frac{\underline{u}_T \times \underline{u}_z}{z^2} dl = K_m I \frac{1}{z^2}\underline{u} \oint_c dl = K_m I \frac{1}{z^2}\underline{u}_x 2\cos\alpha \int_0^\pi dl \quad \text{considerato ora che } \cos\alpha = \frac{R}{z}$$

$$= \frac{K_m I}{z^2} 2 \frac{R}{z}\underline{u}_x (R\pi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2IR^2\pi}{z^3}\underline{u}_x = \boxed{\underline{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}\underline{u}_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\underline{u}_x}$$

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE

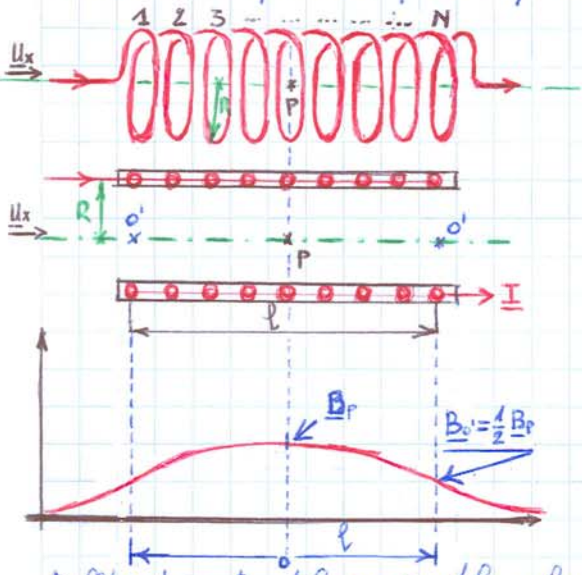
Nel caso in cui ci si ponga al centro della spira $x=0$ ed il campo assume il suo valore massimo

$$\underline{B}_{max} = \frac{\mu_0 I}{2R}\underline{u}_x$$

allontanandosi da o il valore di x inizia ad aumentare, ed essendo questo al denominatore, fa diminuire l'intensità di $\underline{B}$

SOLENOIDE RETTILINEO

Un solenoide rettilineo è costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo; se indichiamo con ℓ la lunghezza del solenoide, R il suo raggio ed N il numero di spire nel generico punto P posto SULL'ASSE il valore del campo magnetico è dato dalla somma degli infiniti contributi



$$d\underline{B} = K_m \frac{I}{r^2}\, \underline{u}\, d\ell \longrightarrow \boxed{\underline{B}_P = \mu_0 \frac{N}{\ell} I\, \underline{u}_x = \mu_0 n I\, \underline{u}_x}$$

dove il rapporto $n = \frac{N}{\ell}$ rende il numero di spire per unità di lunghezza, ossia se queste sono abbastanza fitte le possiamo considerare distribuite con continuità e nel tratto $d\ell$ vene sono $n \cdot d\ell$ spire.

Il risultato proposto va bene nel caso particolare in cui $\ell >> R$, e discende dal seguente

$$\underline{B}_P = \mu_0 n I \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + 4R^2}}\, \underline{u}_x$$

dal quale si può evincere l'andamento del campo magnetico lungo l'asse del solenoide è qui a fianco riportato come titolo esemplificativo.

Dell'andamento del campo del solenoide c'è da ricordare che nel centro O' delle spire terminali il campo magnetico assume un valore pari ad

$$\underline{B}_{O'} = \frac{1}{2}\underline{B}_P = \frac{1}{2}\mu_0 n I\, \underline{u}_x$$

FILI PARALLELI

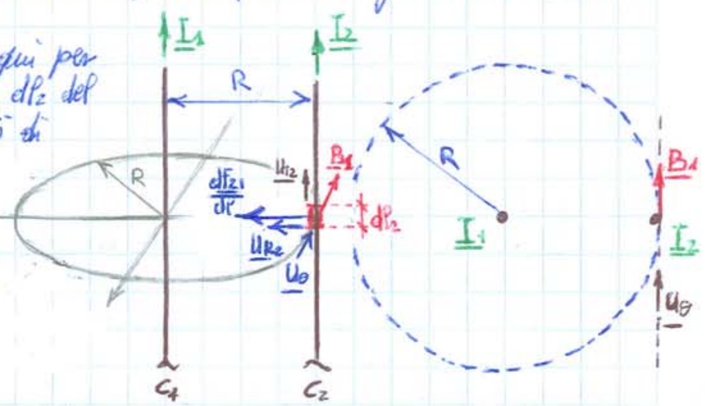
Consideriamo due fili rettilinei paralleli, molto lunghi ed abbastanza vicini da poter essere considerati indefiniti.

Siano questi percorsi dalle correnti I_1 ed I_2, che qui per comodità prendiamo equiverse; il tratto infinitesimo $d\ell_2$ del conduttore C_2 esercita sul conduttore C_1 la forza per unità di lunghezza

$$\frac{dF_{21}}{d\ell_2} = I_2\, \underline{u}_{\ell 2} \times \underline{B}_1$$

dedotta dalla II^a legge di LAPLACE

$$d\underline{F} = I\, \underline{u}_\ell \times \underline{B}\, d\ell$$



Del campo magnetico $\underline{B}_1$ so che è prodotto dal conduttore C_1, e che per un generico punto di C_2 a distanza R, per Biot-Savart vale

$$\underline{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\, \underline{u}_\theta$$

il versore $\underline{u}_\theta$ è tangente la circonferenza a raggio R e giace sul piano di questa, che a sua volta è ortogonale a C_1; in conclusione si può scrivere

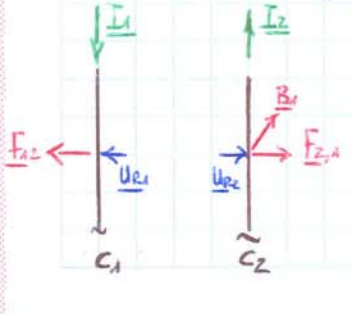
$$\frac{dF_{21}}{d\ell} = I_2\, \underline{u}_{\ell 2} \times \underline{B}_1 = I_2\, \underline{u}_{\ell 2} \times \underline{u}_\theta \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

ma nel prodotto esterno $\underline{u}_{\ell 2} \times \underline{u}_\theta = \underline{u}_{R2}$ ne risulta un versore perché $\underline{u}_{\ell 2} \perp \underline{u}_\theta$ con direzione ortogonale tra C_1 e C_2

$$= \frac{\mu_0}{2\pi R} I_1 I_2\, \underline{u}_{R2} \frac{2}{2} = \boxed{\frac{dF_{21}}{d\ell} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{2 I_1 I_2}{R}\, \underline{u}_R = K_m \frac{2 I_1 I_2}{R}\, \underline{u}_R}$$

In termini finiti per ogni unità di lunghezza la forza tra i due fili vale $F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I_1 I_2 = K_m \frac{2 I_1 I_2}{R}$ e risulta essere

- attrattiva se le correnti sono equiverse, come nel caso proposto
- repulsiva se le correnti sono contrarie



Un banale esempio di interazione tra due fili paralleli, lo si può fare considerando

$$\left.\begin{matrix} I_1 = I_2 = 10A \\ R = 2\,cm \end{matrix}\right\}$$ In questo caso per $I_1 = I_2 = I$ vale $\underbrace{\frac{F}{l} = K_m \frac{2I^2}{R}} = 10^{-7} \frac{2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-2}} = 10^{-7} \cdot 10^{4} = 10^{-3}\,N/m$

Come si può ben vedere $10^{-3}\,N/m$ è un valore estremamente piccolo, e l'azione mutua sarà:

- ATTRATTIVA se il verso della corrente I_1 è concorde con quello di I_2
- REPULSIVA se il verso della corrente I_1 è contrario con quello di I_2

in ogni caso l'azione è mutua $F_{12} = F_{21}$ e non vi è modo di capire quale conduttore emette il campo magnetico $\underline{B}$ che innesca l'interazione tra i due fili paralleli

ANALISI DIMENSIONALE K_m & K_e

- Il fattore K_e è stato introdotto con la legge di Coulomb, per dare una giusta forma alla misura della Forza elettrica esistente tra due cariche $\underbrace{F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}}$
- Il fattore K_m è stato introdotto con la I° legge elementare di Laplace per poi ritrovare la forza magnetica interagente tra due fili conduttori paralleli $\underbrace{\frac{F_{mag}}{l} = K_m \frac{2I_1 I_2}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}}$

Inoltre dalla $\underbrace{dB = K_m \frac{I}{r^2} dl}$ abbiamo dedotto $\rightarrow K_m = \frac{dB\,r^2}{I\,dl} = \frac{[T][m^2]}{[A][m]} = \underbrace{K_m = \frac{[H]}{[m]} = \frac{[T][m]}{[A]} = 10^{-7}\,H/m = 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}}$

la dimensione di K_m ed a questa attribuito il valore 10^{-7}

Ma perché un valore così perfetto e non un valore $\sim 9 \cdot 10^9$ come K_e?

La motivazione risiede nel fatto che i due parametri sono legati tra loro, infatti il parametro comune è l'intensità di corrente, esplicito nella K_m, implicito nella K_e perché bisogna ricordare che la definizione di corrente è $I = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = I\,dt$ ma le cariche q producono tra loro forze elettriche F_e che sono dipendenti dal parametro K_e .... !!!

Mentre la relazione matematica che pone in rapporto le due grandezze è $\boxed{\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = C^2}$ ove $\underline{C \cong 3 \cdot 10^8\,m/s}$ è la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Fate ora capire che fissato un parametro, K_m nel nostro caso, di conseguenza si ricava subito l'altro

$$K_e \cong K_m \cdot C^2 = 10^{-7} \cdot 3^2 \cdot 10^{16} = 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}$$

Ma ancora, perché fissare K_m e non K_e?

Fissare un valore "perfetto" per K_e significa ottenere valori delle F_e non irrazionali, mentre tutte le misure di corrente $I = [A]$ sarebbero derivate approssimate, infatti

AMPERE = corrente che deve correre tra due fili paralleli alla distanza di 1 metro per avere la forza di $1\,N/m$, ma $\rightarrow \frac{F}{l} = \frac{[N]}{[m]} = K_m \frac{I_1 \cdot I_2}{R} = K_m \frac{1 \cdot 1}{1} = 2 \cdot 10^{-7}\,N/m$

se K_e è valore "perfetto" $\rightarrow$ K_m ne risulta irrazionale $\rightarrow$ tutte le misure di corrente diventano irrazionali; viceversa K_m "perfetto" $\rightarrow$ misure di corrente finite $\rightarrow$ misure delle forze elettriche irrazionali.

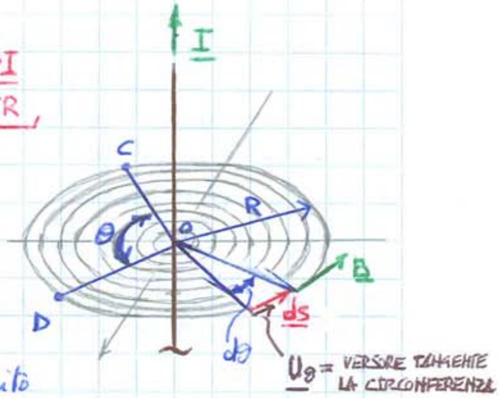
Delle due risulta più conveniente la II° opzione ai fini dei calcoli pratici e sulla base delle definizioni adottate dal NIST (National Institute For Standards and Tecnology), e così è stato fatto.

LEGGE di AMPERE

Ci proponiamo qui di determinare, come nel caso elettrostatico attraverso la legge di GAUSS $\underbrace{\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\, ds}$, un legame diretto tra sorgenti (le correnti I) ed il campo magnetico $\underline{B}$ -

Allo scopo consideriamo un conduttore 1) filiforme 2) rettilineo 3) indefinito percorso dalla corrente $\underline{I}$, sappiamo che un conduttore di questo tipo produce un campo magnetico le cui linee sono circonferenze concentriche di raggio R

$$\underbrace{\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\, u_\theta}_{\text{BIOT-SAVART}} \longrightarrow \underbrace{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$



Se ora considero lo spostamento

$\underline{ds} = \underline{u}_\theta\, ds$ elemento infinitesimo del tratto di circuito (circonferenza) e ne faccio il prodotto scalare

$$\underbrace{\underline{B}\cdot\underline{ds}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\underbrace{u_\theta \cdot u_\theta}_{1\cdot 1\cdot \cos 0 = 1} ds = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}\, ds$$

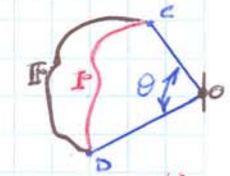
e pensare di farne l'integrazione sul circuito di raggio R

$$\oint_{\text{circonferenza}} \underline{B}\cdot\underline{ds} = \oint_{\text{circ.}} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\, ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint ds = \frac{\mu_0 I}{\cancel{2\pi R}}\cdot \cancel{2\pi R} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\oint \underline{B}\cdot\underline{ds} = \mu_0 I}$$

LEGGE DI AMPERE

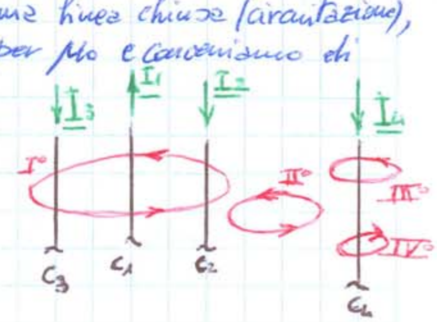
Le osservazioni che si possono fare sono:

- Se invece di calcolare l'integrale sull'intera circonferenza lo calcoliamo nel tratto sotteso dall'angolo θ, compreso tra i due segmenti $\overline{OC}$ ed $\overline{OD}$ otteniamo $\rightarrow \underbrace{\int_C^D \underline{B}\,\underline{ds} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\theta^{rad}}$
- Visto che $\underbrace{\int_C^D \underline{B}\,\underline{ds} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\theta^{rad}}$ dipende solo dall'angolo θ, si deduce che per qualsiasi percorso segua ($I^\circ, II^\circ, \ldots$) il risultato dell'integrale NON varia;



- il campo magnetico $\underline{B}$ sotto il segno di integrale è quello dovuto a tutte le correnti presenti
- l'integrale calcolato lungo una qualsiasi linea chiusa
  - → CONCATENA LA CORRENTE, cioè le gira attorno, in tal caso vi è il contributo al II° membro
  - → NON CONCATENA LA CORRENTE, cioè non le gira attorno, in tal caso non vi è il contributo al II° membro

dunque l'integrale di linea del campo magnetico $\underline{B}$ lungo una linea chiusa (circuitazione), è uguale alla somma delle correnti concatenate, moltiplicate per μ_0 e conveniamo di
- considerare positiva (+) la corrente che buca la superficie in accordo alla normale della stessa
- considerare negativa (-) la corrente che buca la superficie in verso contrario alla normale della stessa



$$\underbrace{\oint_{I^\circ} \underline{B}\,\underline{ds} = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3)} \qquad \underbrace{\oint_{II^\circ} \underline{B}\,\underline{ds} = 0}$$

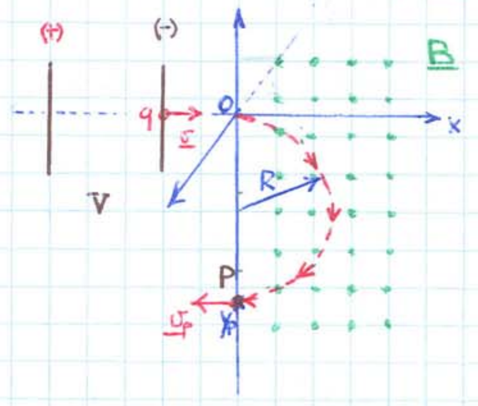
$$\underbrace{\oint_{III^\circ} \underline{B}\,\underline{ds} = (-)\,\mu_0 I_4} \qquad \underbrace{\oint_{IV^\circ} \underline{B}\,\underline{ds} = (+)\,\mu_0 I_4}$$

- considerato che è diverso da zero il risultato dell'integrale, e questo è calcolato su di un circuito, il campo magnetico $\underline{B}$ non è conservativo -
- Senza approfondire oltre, si dice qui che la legge di Ampere è valida SOLO con cariche a moto di regime STAZIONARIO, cioè solo per correnti di conduzione -

ESERCIZIO: da I^a prova accertamento FISICA 2 30 maggio 2005 PROBLEMA 2

Una particella con carica q e rapporto carica/massa $q/m = 10^8\ C/kg$, viene accelerata nella direzione x da una differenza di potenziale $V = 20000$ volt.
Successivamente, in $x=0$, essa entra in $O(0,0,0)$ in una zona $(x>0)$ dove esiste un campo magnetico uniforme $\underline{B}$, diretto lungo l'asse z -
Se nel suo moto, la particella va a colpire il punto $P(x=0;\ y_P;\ 0)$, calcolare:
a) il valore del campo magnetico $\underline{B}$ se la coordinata $y_P = (-)\,0{,}25\ m$
b) la velocità v_P con cui la particella arriva in P

RISOLVO



Si suppone che la particella abbia velocità nulla o comunque trascurabile, nella sua accelerazione deve essere

$$(+)\ W = qV = E_{kf} - E_{ki} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= qV = \frac{1}{2} m v^2 \ \rightarrow\ \boxed{v^2 = \frac{q}{m} 2V}$$

La velocità della particella all'uscita dell'acceleratore vale

$$v = \sqrt{\frac{q}{m} 2V} = \sqrt{10^8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^6\ m/s$$

e la si suppone costante fino a che non entra nell'influenza del campo magnetico $\underline{B}$

Quando la particella entra nel campo magnetico uniforme, essa si muove di moto circolare uniforme secondo l'equazione

$$R = \frac{m v_0}{q B}$$

ove R è il raggio del cerchio descritto dalla traiettoria; considerato che la carica q va a colpire il punto P risulterà $R = y_P/2$; ecco che nella precedente equazione l'unica incognita rimane proprio B

$$B = \frac{m}{q}\frac{v_0}{R} = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{q}{m}2V}\ \frac{1}{y_P/2} = \sqrt{\frac{m^2}{q^2}\frac{q}{m}2V}\ \frac{2}{y_P} = \sqrt{10^{-8} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^4}\ \frac{2}{25 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{2 \cdot 10^2}{25} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^2}{25} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = \underline{B = 0{,}16\ T = 1600\ G}$$ risposta al quesito (a)

Per la velocità v_P con cui la particella arriva in P, nelle condizioni in cui ci siamo posti sappiamo che il campo magnetico $\underline{B}$ modifica la traiettoria del moto ma non altera la velocità nel modulo, perciò la velocità in P è la stessa con cui la particella entra nel campo

$v_P = v = 2 \cdot 10^6\ m/s$ risposta al quesito (b)

Non richiesto ma di facile calcolo a questo punto

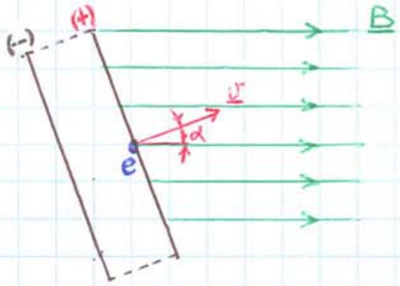
$$\omega^{rad} = \frac{q}{m} B = \frac{q}{m}\frac{m}{q}\frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{R} = \frac{2 v_0}{y_P} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^{-2}} = \frac{4}{25} \cdot 10^8 = \underline{16 \cdot 10^6\ rad/s = \omega^{rad}}$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{16 \cdot 10^6} \simeq 0{,}4 \cdot 10^{-6}\ s = \underline{t = 0{,}4\ \mu s}$$

ESERCIZIO n°6.9 pagina 165

Un fascetto di elettroni, dopo essere stato accelerato da una d.d.p. $V=10^3$ volt, entra in una regione in cui esiste un campo magnetico $B=0,2T$. La direzione degli elettroni forma un angolo di $\alpha=20°$ con $\underline{B}$. Calcolare
a) il raggio r della circonferenza della traiettoria elicoidale compiute dagli elettroni
b) di quanto avanzano gli elettroni lungo l'elica, in ciascun giro (passo dell'elica p)

RISOLVO



Trattandosi di una particella di $q=e=1,6022\cdot10^{-19}C$ $m_e=9,11\cdot10^{-31}Kg$ e nell'ipotesi che prima di essere accelerato $v_i\simeq0$

$$W=qV=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{\frac{q}{m}2V}=\sqrt{\frac{e}{m}2V}=\sqrt{\frac{1,6022\cdot10^{-19}}{9,11\cdot10^{-31}}2\cdot10^3}\simeq1,876\cdot10^7 m/s$$

Attenzione però perché quanto trovato è il modulo della velocità che entra con un angolo di 20° nel campo magnetico, quando si guarda alla forza magnetica che agisce sulle particelle posso pensare di scomporre $\underline{v}$ in due direzioni

- una componente $\underline{v_\parallel}$ parallela al campo $\underline{B}$
- una componente $\underline{v_\perp}$ perpendicolare al campo $\underline{B}$

$\underline{v_\parallel}+\underline{v_\perp}=\underline{v}$

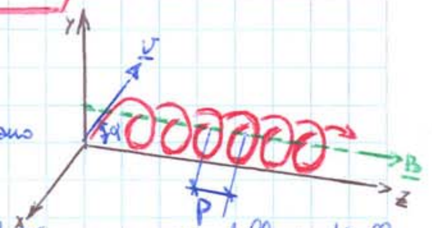
$$\underline{F_m}=q\,\underline{v}\times\underline{B}=q(\underline{v_\parallel}+\underline{v_\perp})\times\underline{B}=q\left[\cancel{(\underline{v_\parallel}\times\underline{B})}^{0}+(\underline{v_\perp}\times\underline{B})\right]=q\,\underline{v_\perp}\times\underline{B}$$

la forza magnetica è sensibile alla sola componente $\perp$ della velocità al campo magnetico $\underline{B}$

Ecco che il raggio r della circonferenza della traiettoria si calcola in

$$r=\frac{mv_\perp}{qB}=\frac{m\,v\sin\alpha}{e\,B}=\frac{m}{e}\sqrt{\frac{e}{m}2V}\,\frac{\sin\alpha}{B}=\sqrt{\frac{m^2}{e^2}\frac{e}{m}2V}\,\frac{\sin\alpha}{B}=\sqrt{\frac{m}{e}2V}\,\frac{\sin\alpha}{B}=$$

$$=\sqrt{5,69\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^3}\,\frac{0,342}{2\cdot10^{-1}}=r\simeq1,824\cdot10^{-4}m=0,1824\,mm$$



Per determinare il passo dell'elica ricapitoliamo:
- la componente $\underline{v_\perp}$ interagisce con il campo $\underline{B}$ ed insieme determinano un moto circolare
- la componente $\underline{v_\parallel}=\underline{v}\cos\alpha$ non interagisce con $\underline{B}$ ma è responsabile dell'avanzamento della particella lungo la direzione $Z\parallel\underline{B}$; nel tempo t la particella compie un giro completo del cerchio

$$t=\frac{2\pi}{\omega^{rad}}=\frac{2\pi}{q/m\,B}=\frac{2\pi}{B}\frac{m}{qe}=\underbrace{t=\frac{m}{e}\frac{2\pi}{B}}=\frac{9,11\cdot10^{-31}}{1,6022\cdot10^{-19}}\,\frac{2\pi}{2\cdot10^{-1}}=1,79\cdot10^{-10}s$$

e nel lasso di tempo t la particella in direzione z si sposta della misura di

$$p=v_\parallel t=v\cos\alpha\,\frac{m}{e}\,\frac{2\pi}{B}=1,876\cdot10^7\cos20°\cdot1,79\cdot10^{-10}=p=3,15\cdot10^{-3}m=3,15\,mm$$