29 maggio 2007 martedì — FISICA 2 — prof. MORESCO MAURIZIO h 18:15 ÷ h 19:45

Lezione n° 14 di 20

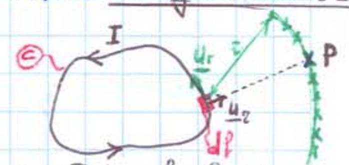
AUTOINDUZIONE L

È già stato osservato che la terra si comporta come un grosso magnete ove il nord magnetico è posizionato nell'emisfero australe (sud geografico) il sud magnetico è posizionato nell'emisfero boreale (nord geografico). Vogliamo qui studiare il caso se per tale forza esiste una qualche legge a carattere generale del tipo già proposto con la legge di Gauss

$$\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}\,\underline{u}_n\,ds = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$$ S = superficie CHIUSA

Consideriamo allora il campo magnetico $\underline{B}$, esso è legato al moto della corrente elettrica in regime stazionario dalla II^a legge elementare di LAPLACE-AMPERE $\underline{B} = K_m I \oint_C \frac{\underline{u}_t \times \underline{u}_r}{r^2} dl$

Ecco che il flusso del campo $\underline{B}$ si può scrivere

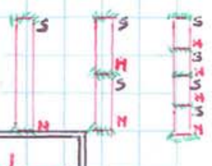


$$\Phi(\underline{B}) = \oint_S \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = \oint_S \left[K_m I \oint_C \frac{\underline{u}_t \times \underline{u}_r}{r^2} dl \right] \underline{u}_n\,ds$$ = AUTOFLUSSO

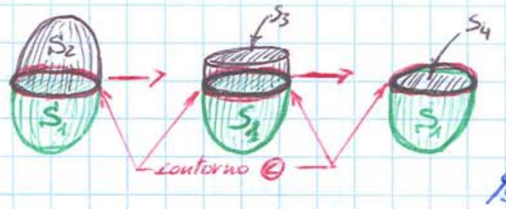
ove S è una qualunque superficie che ha come circuito la linea C CHIUSA

Vediamo di capire meglio il concetto di autoflusso.

- ci aspetteremmo che $\Phi(\underline{B}) = \frac{q_m}{\varepsilon}$ ove q_m è una carica magnetica, ma se una calamita viene "spezzata" in 2 parti, 4 parti, 8 parti eccetera, SI MANIFESTERÀ SEMPRE un dipolo magnetico senza riuscire MAI ad ottenere un polo magnetico isolato.
In definitiva NON SI TROVANO monopoli magnetici; attenzione che qui non si nega la loro esistenza, si ribadisce solo che non si sono mai visti.
Ecco che il flusso del campo magnetico essendo $q_m = 0$ vale $\boxed{\Phi(\underline{B}) = \oint_S \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = 0}$



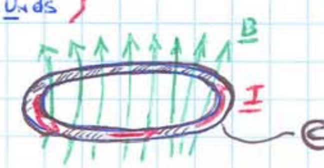
- Noto il risultato dell'integrale $\oint \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = 0$, prendo ora una superficie ovoidale $S = S_1 + S_2$ CHIUSA
se sostituiamo ad $S_2 \to S_3$ che combacia con S_1
e sostituiamo ad $S_3 \to S_4$ che combacia con S_1
le superfici S_1, S_2, S_3, S_4 hanno in comune il contorno C e dalla definizione di flusso del campo $\underline{B}$ scrivo



$$\oint_S \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = \oint_{S_1} \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds + \int_{S_2} \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds$$
$$= \oint_{S_1} \underline{B}\,\underline{u}_n ds + \oint_{S_3} \underline{B}\,\underline{u}_n ds$$
$$= \oint_{S_1} \underline{B}\,\underline{u}_n ds + \oint_{S_4} \underline{B}\,\underline{u}_n ds$$

Flusso del campo magnetico $\underline{B}$ attraverso superfici CHIUSE

Ricapitolando, abbiamo visto che due superfici seppur diverse ma con lo stesso circuito (contorno) hanno lo stesso flusso $\Phi(\underline{B})$; ma per la II^a legge LAPLACE $\underline{B}$ e quindi il flusso, sono proporzionali all'intensità di corrente $I \to \Phi(\underline{B}) \propto KI$
è quindi lecito parlare di flusso attraverso la linea chiusa C o FLUSSO CONCATENATO con la linea chiusa C e che il flusso del campo $\Phi(\underline{B})$ È LO STESSO ATTRAVERSO QUALUNQUE SUPERFICIE CHE POGGI SULLA LINEA C



l'integrale di linea C della superficie S, che rappresenta il flusso $\Phi(B)$ concatenato dal circuito C vale

$$\Phi(\underline{B}_c) = \oint_{S(c)} \underline{B}\,\underline{u}_n\,dS = LI \quad \begin{cases} \cdot \text{ se } \underline{B} = \text{COSTANTE} \\ \cdot \text{ se } \underline{B} \perp S \to \underline{B} \parallel \underline{u}_n \end{cases} \quad \boxed{\Phi(\underline{B}_c) = \int_{S(c)} \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = BS}$$

le dimensioni sono

$$\Phi(B) = \frac{[T\,m^2]}{[A]}$$

che conduce ad una DEFINIZIONE OPERATIVA di

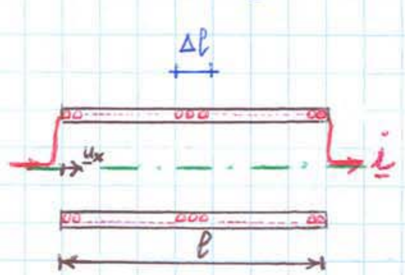
$$\boxed{L = \frac{\Phi_B(C)}{I}}$$ { COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE / INDUTTANZA DEL CIRCUITO }

ecco che l'induttanza —0000— (SIMBOLO GRAFICO) dipende solo dalla geometria del circuito nel caso particolare di circuito INDEFORMABILE → L = costante

le dimensioni dell'induttanza sono $L = \frac{[W]}{[A]} = \frac{[V\,s]}{[A]} = [\Omega\,s] = [H]$ Henry

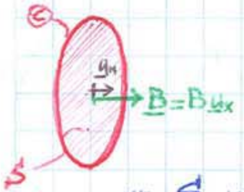
Vediamo subito un esempio pratico dell'utilizzo di questo nuovo strumento induttanza L, che nota la corrente i permette il calcolo del flusso magnetico concatenato da una linea chiusa ©; lo facciamo guardando ad un solenoide.

Se $\begin{cases} N = \text{numero di spire} \\ l = \text{lunghezza del solenoide} \\ n = N/l = \text{numero di spire per unità di lunghezza} \end{cases}$



si era stabilito che sull'asse del solenoide nella posizione $\frac{1}{2}l$

$B = \mu_0 n i \Rightarrow$ ritenuto costante nel tratto di lunghezza Δl e con direzione $\underline{u}_x$



Per una generica spira del tratto compreso nell'intervallo Δl, il flusso concatenato dalla spira stessa si misura in

$$\Phi_B(C) = \oint_{S(C)} \underline{B}\,\underline{u}_n\,dS = \oint_{S(C)} B\,\underline{u}_x \cdot \underline{u}_n\,dS = \oint_{S(C)} B\,dS = B\oint_{S(C)} dS = BS = \mu_0 n i S = \Phi_B(C)$$

ove S rappresenta la superficie (PIANA) racchiusa dalla spira ©

se ora cerco in tutto l'intervallo Δl ove sono contenute

$\Delta N = n\,\Delta l$ = numero di spire comprese nell'intervallo Δl

la variazione del flusso prodotto dal campo magnetico $\underline{B}$, e ritenuto qui costante, trovo

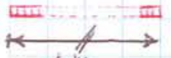
$$\Delta\phi = \Phi_B(C)\,\Delta N = \Phi_B(C)\,n\,\Delta l = \mu_0 n i S n \Delta l = \mu_0 n^2 i S \Delta l$$

Per tale lunghezza di solenoide l'induttanza vale

$$L = \frac{\Delta\phi}{i} = \frac{\mu_0 n^2 \cancel{i} S \Delta l}{\cancel{i}} = L = \mu_0 n^2 S \Delta l,$$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 S}$$ induttanza di un SOLENOIDE o TOROIDE per UNITÀ di lunghezza

Banale esempio numerico può essere: quanti [H] di induttanza vi sono in un solenoide della sezione $S = 10\ cm^2$ con spire a sezione quadrata di $\phi\ 1mm$



$$\left.\begin{aligned} &S = 10\ cm^2 = 0{,}0010\ m^2 = 10^{-3}\ m^2 \\ &\text{con } \phi = 1\ mm \text{ in } l = 1\ m \rightarrow n = 1000 = 10^{-3} \\ &K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \longrightarrow \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} \end{aligned}\right\} \text{ per l'unità di lunghezza } \frac{L}{\Delta l} = \mu_0 n^2 S$$

introducendo i valori numerici si determina $\frac{\Delta L}{l} = 4\pi\cdot 10^{-7}(10^3)^2\cdot 10^{-3} = 4\pi\cdot 10^{-4}$ $\quad L \simeq 1{,}25\cdot 10^{-3}\ H/m \simeq 1{,}25\ m(H/m)$

INDUZIONE MUTUA

Diamo ora un BREVE CENNO a quanto accade quando due circuiti percorsi da corrente sono posti nelle vicinanze

il flusso concatenato da C_2 sarà $\Phi_{12} = \oint_{S(2)} B_1\,u_{n2}\,dS = M_{12} i_1$

il flusso concatenato da C_1 sarà $\Phi_{21} = \oint_{S(1)} B_2\,u_{n1}\,dS = M_{21} i_2$

ove sono conglobati in M_{21} ed M_{12} tutti i FATTORI GEOMETRICI e le eventuali dipendenze dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti.

In base alle proprietà generali del campo magnetico è possibile dimostrare che vale $M_{12} = M_{21}$, definendo così M ⟶

$$\boxed{M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{21}}{i_2} = M_{21} = M}$$

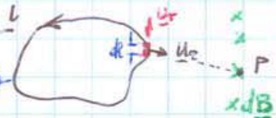
COEFFICIENTE di MUTUA INDUZIONE

I circuiti si dicono ACCOPPIATI se $M \neq 0$ e sono caratterizzati

- dalla loro resistenza R_1 ed R_2
- dalla loro induttanza L_1 ed L_2
- dal coefficiente di induzione mutua $M = M_{12} = M_{21}$

LEGGE DI FARADAY

Abbiamo visto che una corrente in regime di moto stazionario produce un campo magnetico, ricorda a proposito la 1ª legge elementare di LAPLACE



$$d\underline{B} = K_m i \frac{\underline{u}_t \times \underline{u}_r}{r^2} dl \quad \longrightarrow \quad \underline{B} = \oint_c K_m i \frac{\underline{u}_t \times \underline{u}_r}{r^2} dl$$

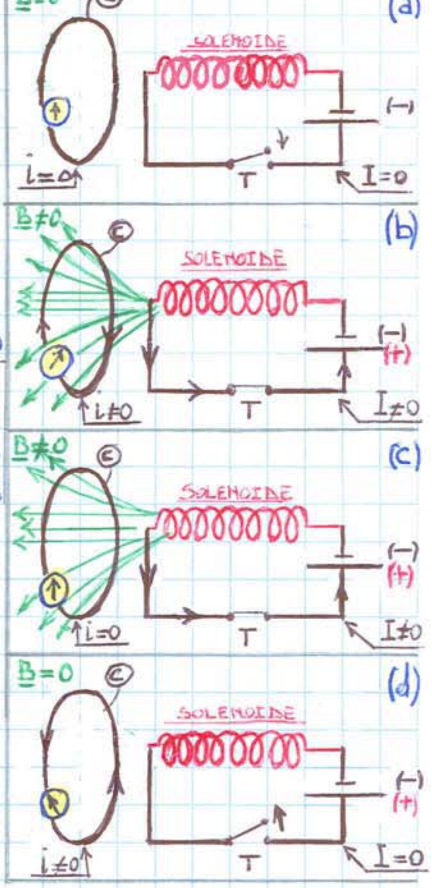
$\times d\underline{B}$ e si è pure trovato un parametro che ne esprime direttamente il rapporto: il coefficiente di autoinduzione o induttanza del circuito $L = \frac{\Phi_B(C)}{i}$

A questo punto è lecito chiedersi: ma un campo magnetico può generare della corrente elettrica?

La risposta viene ancora una volta dalla FISICA SPERIMENTALE: ESPERIENZA DI FARADAY

Si abbia una spira connessa ad un galvanometro che ne misura l'intensità di corrente i, sia questa posta nelle vicinanze di un solenoide a lunghezza l finita; il solenoide ha un nucleo di ferro, è collegato ad un generatore di FEM ed ad un interruttore T che permette di far passare/interrompere la corrente nel circuito.

La spira ha circuito © ed è ferma, anche il solenoide è fermo.



- Inizialmente, situazione (a), il circuito è aperto e nel galvanometro non si misura alcun passaggio di corrente $i=0$.
- Nel momento in cui T viene chiuso, situazione (b), il galvanometro si sposta in una certa direzione, qui si misura passaggio di corrente $i \neq 0$
- Immediatamente dopo la chiusura di T, situazione (c), il galvanometro torna a zero, e qui non si misura alcun passaggio di corrente sulla spira nonostante il solenoide sia percorso da corrente e generi un C.M. $\underline{B}$
- Al momento dell'apertura di T, situazione (d), il galvanometro si sposta nella direzione opposta alla precedente, qui si misura passaggio di corrente $i \neq 0$
- Immediatamente dopo l'apertura di T, situazione (a), il galvanometro torna a zero, e qui non si misura alcun passaggio di corrente sulla spira $i=0$

- Se variamo l'orientamento della spira e riconduciamo le prove come sopra registriamo esattamente lo stesso comportamento al galvanometro ma con valori diversi di corrente $i' \neq i$
- Se infine modifichiamo la superficie S del circuito © e riproponiamo esattamente la stessa esperienza, ancora una volta si registra il medesimo comportamento al galvanometro, ma ancora una volta varia l'indicazione di corrente $i'' \neq i' \neq i$

Dall'esperienza condotta si può affermare che un campo magnetico $\underline{B}$ genera corrente, ma dipende questa produzione ∇ dal ∇tempo (apertura, chiusura T) e dal flusso (orientamento, superficie spira). Vogliamo racchiudere tutto ciò in un'unica espressione analitica, che si scrive come segue

$$\boxed{V_\varepsilon = (-)\frac{d\Phi_B(C)}{dt}} \longrightarrow \boxed{V_\varepsilon = (-)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{S(C)} \underline{B}\, \underline{u}_n\, ds}$$

LEGGE di FARADAY

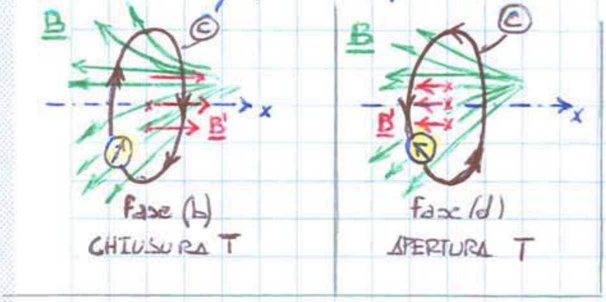
Il segno negativo (–) verrà appena oltre giustificato, ripetiamo qui che la superficie S è qualsiasi, e si "appoggia" sulla linea chiusa (leggi circuito) ©.

La linea chiusa può essere pensata sia come conduttore chiuso che, come linea geometrica senza alcun supporto materiale.

La legge di FARADAY ci dice: ogni qualvolta il flusso del campo magnetico $\Phi(B)$ concatenato con un circuito © varia nel tempo dt, si ha nel circuito una forza elettromotrice V_ε indotta, data dall'opposto (–) della derivata del flusso nel tempo

LEGGE di LENZ

La legge di Lenz ci spiega il perché del segno negativo (−) nella legge di Faraday; allo scopo ricordo che una spira percorsa da corrente i genera un proprio campo magnetico $\underline{B}'$ concatenato al circuito © e chiaramente un flusso $\Phi(\underline{B}')$



Diremo PRIMARIO il flusso $\Phi(\underline{B})$ generato dal SOLENOIDE
Diremo SECONDARIO il flusso $\Phi(\underline{B}')$ generato dalla SPIRA

L'osservazione del galvanometro già ci dice che: la corrente che circola nella spira al momento dell'apertura ha verso opposto a quella che circola in fase di chiusura mentre le osservazioni di LENZ si traducono nell'enunciata legge:
la forza elettromotrice V_E che si manifesta nel circuito © è tale da produrre una corrente indotta i i cui effetti magnetici (secondario $\Phi(\underline{B}')$) si oppongono alle variazioni di flusso $\Phi(\underline{B})$ (primario) concatenato con il circuito stesso.

Proviamo dunque a verificare, dopo tale enunciato, la correttezza del segno nella $V_E = -\frac{\Phi(B)}{dt}$

- $\Phi(B)$ AUMENTA

la sua derivata è positiva $\frac{d\Phi(B)}{dt} > 0$ la FEM indotta è negativa $\rightarrow V_E < 0$ ed i genera un flusso $\Phi(\underline{B}')$ secondario che si oppone all'aumento del primario, il flusso complessivo attraverso il circuito © cresce più lentamente $\rightarrow$ OK

- $\Phi(B)$ DIMINUISCE

la sua derivata è negativa $\frac{d\Phi(B)}{dt} < 0$, la FEM indotta è positiva $\rightarrow V_E > 0$ e la corrente ad essa dovuta i genera un flusso $\Phi(\underline{B}')$ secondario che è concorde al primario, il flusso complessivo attraverso il circuito © diminuisce più lentamente $\rightarrow$ OK

Il comportamento di opposizione alla causa che genera il fenomeno, è inoltre concorde al PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

La legge di Faraday assicura una stretta relazione tra il moto di cariche elettriche dovuto alla variazione di un campo magnetico, infatti possiamo qui vedere che se nella spira vi è passaggio di corrente, in quanto conduttore ohmico da luogo ad un effetto JOULE, ma l'effetto si è visto connesso ad un'energia in transito, vale dunque

$i \leftrightarrow dt$ attraverso la sezione $dq = i\,dt$

$dW = V_E\,dq$ mentre il calore prodotto $dQ = Ri^2dt = Ri(idt) = Ri\,dq$

eguagliando calore e lavoro $dW = dQ = V_E dq = Ri\,dq$ ricaviamo che $V_E = Ri$
che introdotto nella legge di FARADAY

$$\boxed{V_E = (-)\frac{\partial}{\partial t}\int_{S(c)} \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = R\cdot i}$$

la relazione così trovata ha un notevole interesse operativo, perché posso anche NON saper risolvere l'integrale il quale risulta analiticamente complesso, ma ho il suo risultato $(R\cdot i)$, se la resistenza R e la corrente i sono quelle della spira quale circuito secondario.
Ecco qui, come nel caso della legge di Ampere, un escamotage per raggiungere il risultato che descrive l'effetto senza entrare nella soluzione integrale ma attraverso una semplice moltiplicazione.

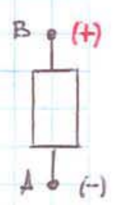
CAMPO ELETTRICO INDOTTO

Chiara l'evidenza del rapporto tra FEM generata e campo magnetico, nonché come risolvere l'equazione senza entrare nel merito dell'integrale, poniamo ora in evidenza la relazione tra campo magnetico e campo elettrico indotto.
Facciamo in prima istanza riferimento alla definizione di densità di corrente

$J = \dfrac{i}{S}$ = ricordiamo che se n è il numero di portatori di carica, v la loro velocità e che il moto delle cariche è dovuto ad una forza elettrica $\underline{F_e}$ e non da quella magnetica $\underline{F_m}$ $\rightarrow \underline{F_e = qE}$

$= \underline{J = nqv}$

Nel caso poi di corrente elettrica in regime di moto stazionario il lavoro prodotto per spostare le cariche dal punto A al punto B non è nullo,



$W_{AB} = q(V_A - V_B)$ posso ora con la legge di Faraday ridefinire il concetto di FORZA ELETTROMOTRICE come segue

$$V_{(+)} - V_{(-)} = V_\mathcal{E} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{1}{q}\int_{(-)}^{(+)} \underline{F_e}\cdot d\underline{s} \qquad V_\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint_{S(C)} \underline{F_e}\cdot d\underline{s} = \frac{1}{\cancel{q}}\oint_{S(C)} \cancel{q}\,\underline{E}\cdot d\underline{s} = \oint_{S(C)} \underline{E}\, d\underline{s}$$

$$** \quad \boxed{V_\mathcal{E} = \oint_{S(C)} \underline{E_i}\,d\underline{s} = (-)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{S(C)} \underline{B}\cdot\underline{u_N}\, dS}$$

relazione tra campo magnetico e campo elettrico indotto, anche in questo caso il segno negativo (-) all'ultimo membro si rende necessario altrimenti la convenzione della vite destrogira non è rispettata -

Attenzione dunque: la variazione di flusso magnetico nel tempo, esplicitamente in evidenza sopra dal simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ di derivata parziale rispetto al tempo, genera un campo elettrico indotto, è questo l'effetto PRINCIPALE -

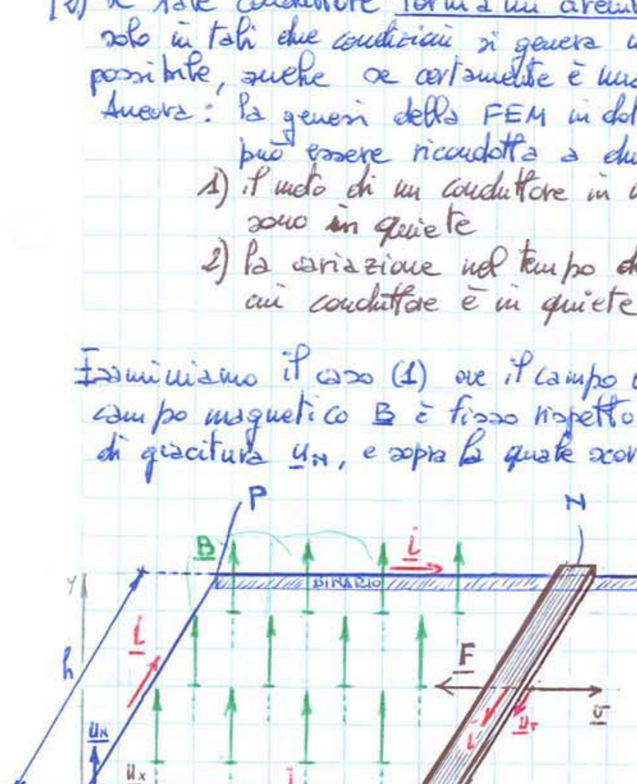
1) Se poi il campo elettrico indotto $\underline{E_i}$ agisce all'interno di un conduttore, e
2) se tale conduttore forma un circuito chiuso ©

solo in tali due condizioni si genera una corrente indotta i, ma non si tratta dell'unica situazione possibile, anche se certamente è una delle più importanti dal punto di vista applicativo -

Ancora: la genesi della FEM indotta $V_\mathcal{E}$, dall'analisi delle situazioni che danno luogo a **, può essere ricondotta a due cause distinte:

1) il moto di un conduttore in un sistema di riferimento ove le sorgenti del campo magnetico sono in quiete
2) la variazione nel tempo del campo magnetico in un sistema di riferimento il cui conduttore è in quiete

Esaminiamo il caso (1) ove il campo elettrico ha origine dal moto di un conduttore C ed il cui campo magnetico $\underline{B}$ è fisso rispetto al sistema di riferimento ed ortogonale alla superficie piana di giacitura $\underline{u_N}$, e sopra la quale scorre su due binari una sbarretta di larghezza h e velocità $\underline{v}$



Per costruzione $\underline{B} \parallel \underline{u_N} \rightarrow \underline{B}\cdot\underline{u_N} = B$

S = superficie che concatena $\underline{B}$

$= \underline{S = h\cdot x}$

$$V_\mathcal{E} = (-)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{MNPQ} B\, u_N\, dS = (-)\frac{d}{dt}\left(B\int_S dS\right) = (-)\frac{d}{dt}(BS)$$

$$= (-)\frac{d}{dt}(Bhx) = (-)Bh\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{VELOCITÀ } v} = \boxed{V_\mathcal{E} = (-)Bhv}$$

Il verso di $V_\mathcal{E}$ deve essere tale da opporsi alla causa che l'ha generato dunque $\underline{i}$ deve generare il campo $\underline{B'}$ in opposizione a $\underline{B}$ verifichiamo

$\underline{\frac{dF}{dl} = i\,\underline{u_T}\times\underline{B} = iB(-)\underline{u_x}}$ in opposizione al moto $\underline{v}$ ok va bene

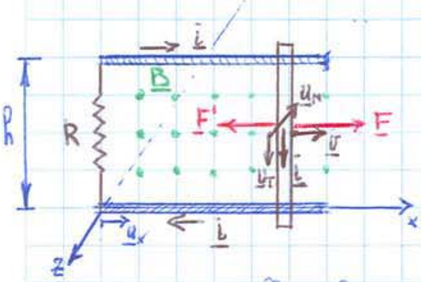
ESERCIZIO n° 8.3 pagina 230

Una sbarretta conduttrice di lunghezza h si muove senza attrito su due rotaie. Una forza $F = 1\,N$ mantiene in moto la sbarretta ad una velocità costante $\underline{v} = 2\,m/s$, in un campo magnetico $\underline{B}$ perpendicolare al foglio. Calcolare:

a) la corrente i che percorre il resistore $R = 8\,\Omega$ collegato tra le rotaie.

b) la potenza P dissipata dallo stesso.

RISOLVO



Per il calcolo della corrente i, considerato che la FEM prodotta dal sistema vale, in valore assoluto, $V_E = Bhv$ si ricorre alla legge di OHM $\rightarrow V = Ri$ da cui

$$i = \frac{V_E}{R} = \frac{Bhv}{R}$$

Per arrivare alla soluzione però ci manca il valore del campo B, allo scopo osservo che se vi è un moto costante nella velocità $R = F + F' = 0$ cioè la forza che mantiene il moto $\underline{F}$ è uguale e contraria alla forza $\underline{F}'$ dovuta alla corrente indotta

$$* \quad \underbrace{F = iBh}_{\text{da II}^a\text{ legge Laplace}} = \frac{Bhv}{R}Bh = (Bh)^2\frac{v}{R} \Rightarrow Bh = \sqrt{\frac{FR}{v}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 8}{2}} = \sqrt{4} = 2\,Tm$$

$$i = \frac{Bhv}{R} = \frac{2 \cdot 2}{8} = \underline{0{,}5\,A}$$

Per la potenza dissipata posso procedere in due modi

A) Come un elettricista proporrebbe

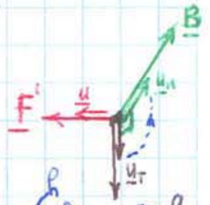
$$P = Ri^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = P = 2\,W$$

2) Dalla meccanica classica ricordo che, la definizione di potenza è

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(Fx) = F\frac{dx}{dt} \longrightarrow \underbrace{P = Fv}_{= 1 \cdot 2 = \; P = 2\,W}$$

Alcune precisazioni sulla forza $\underline{F}'$ vanno fatte:

- anche se la sbarretta nel suo movimento genera corrente i che per autoinduzione crea un flusso magnetico $\Phi(\underline{B}') = Li$ e dunque un campo $\underline{B}'$, ai fini dei calcoli questo viene trascurato
- la Forza $\underline{F}'$ è generata dall'interazione della corrente i indotta con il campo magnetico $\underline{B}$, trascurando il contributo di $\underline{B}'$ generato dalla spira
- il valore della Forza $\underline{F}'$ va calcolato attraverso la II^a legge elementare di



LAPLACE

$$d\underline{F} = i\,\underline{u}_T \times \underline{B}\,dl \quad \left\{\begin{matrix}\text{che per la lunghezza} \\ h \text{ si misura in}\end{matrix}\right\} \quad \underline{F} = \int_0^h i\,\underline{u}_T \times \underline{B}\,dl = iB\underline{u}\int_0^h dl = iBh\underline{u}$$

Nel nostro caso $\underline{u} = (-)\,\underline{u}_x$ mentre in valore assoluto la forza ha valore pari a *