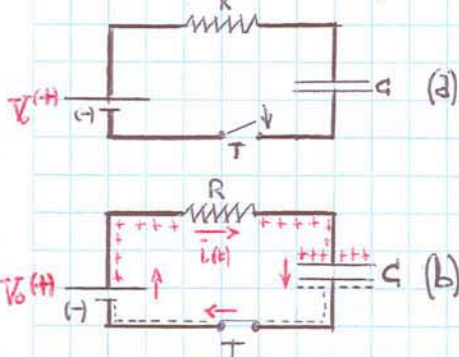


CARICA/SCARICA CONDENSATORE

Formiamo un circuito per un momento nel programma e ne esaminiamo il seguente circuito ora presente un generatore g di FEM che assicura una $V = \text{costante}$, un resistore R , un interruttore T inizialmente aperto, ed un condensatore C inizialmente scarico (situazione a).



Al tempo $t=0$ l'interruttore T viene chiuso (situazione b) ed il generatore preleva delle cariche dal polo negativo e le trasferisce al positivo (+), queste fluiscono nel circuito attraverso il resistore R ed arrivano al condensatore C , Al condensatore compaiono dunque delle cariche (+) q e (-) q , ed il processo continua sino a quando la carica del condensatore non raggiunge il valore massimo

$q_0 = CV_0$ massima carica del condensatore

Esaminiamo più attentamente quanto accade nel tempo dt .

Nel circuito carica e corrente sono legati dalla nota legge $dq = i(t)dt$, e, per la costruzione del sistema la variazione di carica al condensatore è pari a quella del circuito $dq_{\text{ciclo}} = dq_{\text{circ.}}$, di tempo stesso il generatore compie un lavoro che sappiamo calcolare

$dW = V dq$

lavoro che può essere messo in relazione alla corrente dal 1° principio della termodinamica $dW = dQ + dU$,

dove $dQ = Ri^2 dt$, = calore prodotto dall'effetto JOULE visto nella legge OHM
 dove $dU_e = q \frac{dq}{C}$ = variazione energia potenziale $U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2$

nella variazione di energia potenziale è opportuno considerare $\frac{q^2}{2}$ perché le $\Delta U_e = \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} C(V_0 - V)$ sono legati anche a variazioni di potenziale che si registrano $\frac{2q}{C}$ durante la carica del condensatore. Mettendo insieme il tutto si ottiene

$$dW = dQ + dU_e \Rightarrow V_0 dq = Ri^2 dt + q \frac{dq}{C} = Ri(i dt) + q \frac{dq}{C}$$

$$\downarrow$$

$$= Ri dq + q \frac{dq}{C}$$

$V_0 = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$

EQUAZIONE FONDAMENTALE NEL CIRCUITO

Attenzione che nella equazione data sia la corrente $i(t)$ che la carica $q(t)$ variano nel tempo sino a che il condensatore non è carico.

Devo ora trovare il modo di esplicitare la corrente partendo però la carica $q(t)$ non in funzione del tempo; i modi qui per risolvere il problema sono diversi, noi scegliamo di derivare la funzione rispetto al tempo, avendo cura però al termine di reintrodurre il parametro V_0 perché in $\frac{dV_0}{dt} = 0$ "sparisce"

$$\frac{dV_0}{dt} = 0 = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{dq(t)}{dt} \quad i(t) \nearrow \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{1}{RC} = 0$$

$$\frac{di(t)}{dt} = (-) i(t) \frac{1}{RC} \rightarrow \frac{di(t)}{i(t)} = (-) \frac{1}{RC} dt$$

oc basta integrare l'equazione tra l'istante $t=0$ ed un qualsiasi momento t

$$i(t) \frac{di}{i} = \int_{i(0)}^i \frac{1}{i} di = \int_0^t \frac{1}{RC} dt = \left(-\right) \frac{1}{RC} t$$

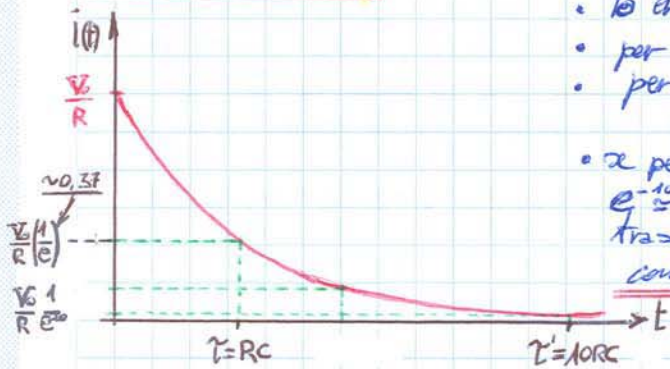
$$\frac{i(t)}{i(0)} = e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow i(t) = i(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

chiudendo tutto alla potenza e "scompare" il μ ,
 infatti è circuito aperto $i=0$ perché $V=0=Ri$ ma
 appena chiuso T in $i(0)$ prima ancora che le
 cariche fluiscano nel circuito, ho una frazione infinita
 terminale di tempo per cui $i(0) = \frac{V_0}{R}$,
 tale approssimazione permette di "recuperare" il parametro V_0 perso in fase iniziale
 del calcolo quando si è derivato $\frac{di}{dt} = 0$

Le considerazioni che si possono fare sono le seguenti:

- la dimensione di $RC = [s]$ secondi
- per $t=0 \Rightarrow i(0) = \frac{V_0}{R}$
- per $t \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \rightarrow 0$ la corrente non si annulla mai ed il processo di carica continua in finitima mente
- e per $t=RC \rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-1} \approx 0,37$ considerato $T=10RC$
 $e^{-10} = 4,5 \cdot 10^{-5}$ cioè la corrente anche se non nulla assume valori trascurabili cioè il processo PER APPROSSIMAZIONE può ritenersi concluso dopo un tempo di $T=10RC$.



Immediata è ora la soluzione del circuito; infatti introducendo il risultato ottenuto nella

$$V_0 = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = R \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{C} q(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$CV_0 - CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} = q(t) \rightarrow q(t) = CV_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow q(0)=0 \\ t=\infty \rightarrow q(\infty)=CV_0 \end{cases}$$

Mentre il potenziale misurato rispettivamente al condensatore vale

$$V_{cond} = \frac{q}{C} = \frac{CV_0}{C} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \rightarrow V_{cond}(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow V_c(0)=0 \\ t=\infty \rightarrow V_c(\infty)=V_0 \end{cases}$$

infine rimane da calcolare il potenziale del resistore, ricorrendo alle leggi di Ohm

$$V_R = Ri = R \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow V_R(0)=V_0 \\ t=\infty \rightarrow V_R(\infty)=0 \end{cases}$$

SCARICA

Analogamente a quanto visto sopra, se nel circuito vi è un condensatore C con carica iniziale q_0 , un resistore R ed un interruttore T, se

SITUAZIONE a l'interruttore T è APERTO nel circuito $i(0) = V_c(0) = 0$
 mentre al condensatore

$$V_c(0) = \frac{q_0}{C}$$

SITUAZIONE b

all'istante $t=0$ chiudo l'interruttore e le cariche si muovono dall'armatura a potenziale maggiore (+) a quella a potenziale minore (-) con legge

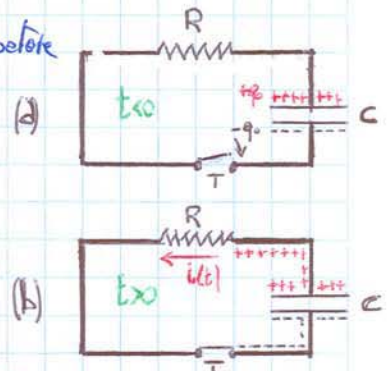
$$i = \left(-\right) \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{dq}{dt} = \left(-\right) \frac{V_R}{R} = \left(-\right) \frac{V_c}{R} = \left(-\right) \frac{q}{RC} \rightarrow$$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_c = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

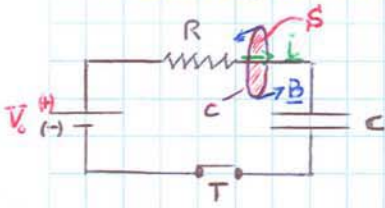
$$i(t) = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Notare che in questo caso vale $V_{condensatore} = V_{resistore}$



LEGGE AMPERE - MAXWELL

Consideriamo ora ancora il circuito con il generatore di FEM = V_0 , il resistore R, l'interruttore T chiuso, ed il condensatore C.



Supposto nel circuito transiti la corrente i il conduttore filiforme che congiunge i vari elementi (G, R, S, T) genera un campo magnetico B con intensità inversamente proporzionale alla distanza R dal filo indefinito e rettilineo stesso (legge BIOT-SAVART), le cui linee sono circonferenze concentriche.

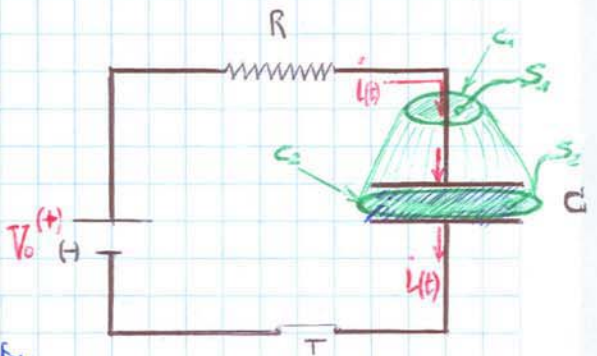
Se a tale situazione vogliamo applicare la legge di AMPERE, considerate la superficie S che poggia sul circuito chiuso C , vale

$\oint \underline{B} \cdot d\underline{s} = \mu_0 i_c$ ove i_c è la corrente di conduzione concatenata alla linea C su cui si calcola la circolazione del campo magnetico \underline{B} .
In regime di corrente stazionaria i_c è costante nelle varie sezioni, ma può variare da sezione a sezione, e per la S_1 generica sezione vale

$$i_c = \frac{dq}{dt} \rightarrow \underline{J} = \frac{di}{ds} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{ds} = \frac{i}{ds} \rightarrow \underline{J} ds = i \rightarrow i_{c1} = \int_{S_1} \underline{J} \cdot \underline{u}_N ds$$

Se calcoliamo l'integrale $\oint \underline{B} ds$ su qualsiasi superficie che si appoggi sul circuito chiuso C_1 il suo risultato non è nullo perché ci è l'intensità di corrente $i_c(t)$ variabile nel tempo che attraversa il filo e chiamiamo CORRENTE DI CONDUZIONE = i_{c1} .

Se calcoliamo l'integrale $\oint \underline{B} ds$ su qualsiasi superficie che si appoggi sul circuito chiuso C_2 il suo risultato è nullo perché non incontra alcun filo e interposta tra le armature del condensatore

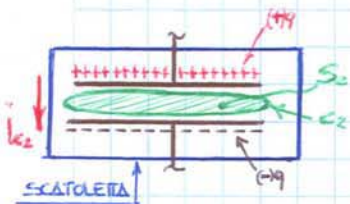


In realtà, su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica, sia in fase di carica che di scarica $\frac{dq}{dt}$ corrispondente ad una corrente i_c , che nel complesso sappiamo misurare come $V = \frac{q}{C}$, se pensiamo al condensatore inserito in una "scatoletta";

chiameremo CORRENTE DI SPOSTAMENTO = i_{c2}

La corrente di spostamento è legata alla variazione del campo elettrico E misurato tra le pareti del condensatore attraverso la seguente relazione

$$i_{c2} = \int_{S_2} \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \underline{u}_N ds$$



Per soddisfare il regime di stazionarietà vale

$$\underline{i}_c = i_{c1} + i_{c2} = \int_{S_1} \underline{J} \cdot \underline{u}_N ds + \int_{S_2} \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \underline{u}_N ds$$

CORRENTE DI CONDUZIONE CORRENTE DI SPOSTAMENTO

corrente lungo un tratto di circuito in regime stazionario

Esso allora che se in un sistema considero la superficie delimitata dalle basi S_1 ed S_2 , mi essa la condizione di stazionarietà è garantita dalla $i_c = i_{c1} + i_{c2}$ (tutta corrente in entrata e tutta ne esce) e l'integrale $\oint \underline{B} ds$ si calcola come

$$\oint \underline{B} ds = \mu_0 \left[\int_{S(c)} (\underline{J} + \epsilon_0 \frac{dE}{dt}) \underline{u}_N ds \right]$$

Legge di AMPERE-MAXWELL

La legge di Ampere-Maxwell stabilisce

i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzione che da variazioni temporali del campo elettrico.

EQUAZIONI DI MAXWELL

Se ripercorriamo lo studio sino a qui condotto possiamo riassumere il tutto nelle 4 seguenti equazioni:

EQUAZIONI MAXWELL

$$\oint_S \underline{E} \cdot \underline{u}_n ds = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

← LEGGE di GAUSS stabilisce un legame tra carica elettrica e campo elettrico

$$\oint_S \underline{B} \cdot \underline{u}_n ds = 0$$

← AUTOFUSSO cioè il campo magnetico è sempre solenoidale e non esistono cariche magnetiche libere

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} = (-) \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(C)} \underline{B} \cdot \underline{u}_n ds$$

← LEGGE di FARADAY un campo magnetico variabile nel tempo (-) $\frac{d\Phi(B)}{dt}$ è sorgente di un campo elettrico

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{s} = \mu_0 \int_{S(C)} \left(\underline{J} + \epsilon_0 \frac{d\underline{E}}{dt} \right) \cdot \underline{u}_n ds$$


← LEGGE di AMPERE-MAXWELL le sorgenti del campo magnetico sono:
 1) le correnti di conduzione (nei fili-fermi)
 2) le variazioni temporali del campo elettrico (nei condensatori)

DIVERGENZA del CAMPO ELETTRICO

Torniamo qui ad occuparci della legge di Gauss, ma facciamolo ora nella così detta forma locale; in via del tutto generale attraverso una superficie chiusa S vale

$$\oint_S \underline{E} \cdot \underline{u}_n ds = q_i$$

se però faccio tendere a zero la superficie $S \rightarrow 0$ arrivo al punto che nel suo interno non trovo più cariche (anche se puntiformi) e l'integrale si annulla, la fisica supera la matematica.



Fissato dunque un volumetto infinitesimo $d\tau$, la densità di carica vale

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \rightarrow dq = \rho d\tau$$

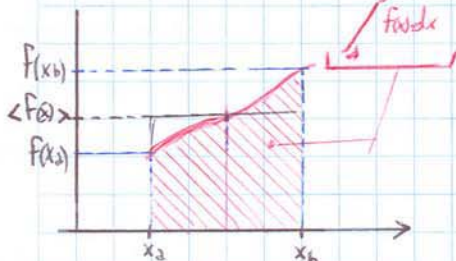
ecco che le cariche contenute in un generico volume τ di base S si misurano in

$$q_i = \int_{\tau(S)} dq = \int_{\tau(S)} \rho d\tau$$

Introducendo il tutto nella legge di Gauss risulta

$$\oint_S \underline{E} \cdot \underline{u}_n ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(S)} \rho d\tau$$

Sospendiamo per un momento lo sviluppo matematico in corso, e ricordiamo qui che l'interpretazione geometrica dell'integrale è la superficie del rettangolo compreso tra i punti x_a ed x_b , e che esiste un teorema che porta sotto il nome di valore medio per cui



$$AREA = \int_a^b f(x) dx = \langle f(x) \rangle \cdot (x_b - x_a) \quad \text{ovv } \langle f(x) \rangle = \text{valore medio}$$

ecco che l'integrale del volume τ si scrive $\int_{\tau(S)} \rho d\tau = \tau \cdot \langle \rho \rangle$

Riprendendo il calcolo sopra e dividendo tutto per τ si ottiene

$$\frac{1}{\tau} \int_S \underline{E} \cdot \underline{u}_n ds = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(S)} \rho d\tau = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\epsilon_0} \tau \langle \rho \rangle$$

ovv nell'ultimo membro scritto il volume τ non è più in gioco ed inoltre $\tau \rightarrow 0$ la densità media tende al valore locale $\langle \rho \rangle \rightarrow \rho$

Eguagliamo dunque un passaggio al limite ed otteniamo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int \underline{E} \cdot \underline{u}_r ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\langle q \rangle}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ora ci si pone la domanda se tale limite esista e se valga esattamente il risultato proposto !!!

La risposta è positiva, il limite esiste e vale proprio q/ϵ_0 ed assume il nome di

$$\text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

DIVERGENZA CAMPO ELETTRICO =
I^a EQUAZIONE di MAXWELL !

In analogo modo si perviene al calcolo di $\text{div } \underline{B} = 0$ e se infine facciamo riferimento ad un sistema cartesiano (x, y, z) vale (e non lo dimostreremo

$$\text{div } \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

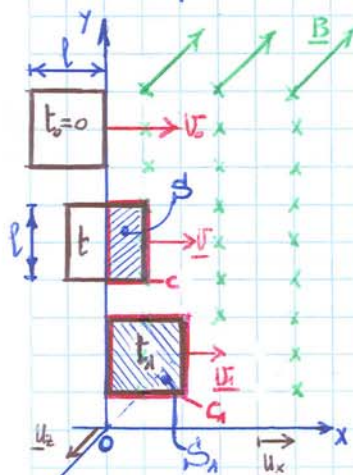
DIVERGENZA CAMPO MAGNETICO =
II^a EQUAZIONE di MAXWELL =

ESERCIZIO N° 8.4 pagina 230

Una spiria conduttrice quadrata, di lato $b = 20 \text{ cm}$, massa $m = 4 \text{ gr}$, resistenza $R = 25 \Omega$, si muove senza attrito sul piano x, y con velocità costante $v_0 = 0,04 \text{ m/s}$. Per $x > 0$ esiste un campo magnetico uniforme e costante di valore $B = 0,5 \text{ T}$ e la spiria entra in questa regione all'istante $t = 0$; il verso del campo \underline{B} è indicato nella figura sottostante. Calcolare

- la velocità v della spiria in funzione della distanza x
- la velocità v_1 della spiria quando è completamente entrata nel campo magnetico
- l'energia dissipata W nella spiria tra l'istante $t = 0$ e l'istante in cui è completamente entrata.

RISOLVO

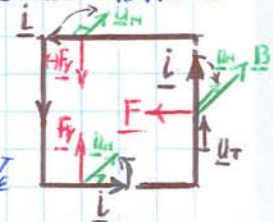


$l = 20 \text{ cm}$
 $m = 4 \text{ g}$
 $v_0 = 0,04 \text{ m/s}$
 $R = 25 \Omega$

Accade che quando la spiria entra nel campo magnetico inizia a concatenare un flusso di questo; la superficie $S = l \cdot x$ aumenta man mano che la spiria si immerge nel campo \underline{B} fino ad un massimo $S_1 = l^2$. L'equazione che pone in relazione la superficie S che attraversa concatenando il campo magnetico \underline{B} è quella dell'auto flusso

$$\Phi(\underline{B}) = \oint_S \underline{B} \cdot \underline{u}_n ds = \oint_S B \underline{u}_n \cdot \underline{u}_n ds = B \oint_S ds = B l x$$

Mentre l'equazione che relazione flusso $\Phi(\underline{B})$ con potenziale V_E



$$-1) \frac{d\Phi}{dt} = -1) \frac{d}{dt} (B l x) = -1) B l \frac{dx}{dt} = -1) B l v_x = V_E$$

considerato qui che all'avanzare della spiria nel campo \underline{B} è in aumento, per LENZ V_E si oppone dunque \underline{i} spiria = ANTICORRARIA per regola vite destrorsa

Ecco che la forza \underline{F} dovuta alle correnti \underline{i} , annullando si le componenti $(+)F_y$ e $(-)F_y$ da l i orizzontali per la II^a legge di LAPLACE si calcola come

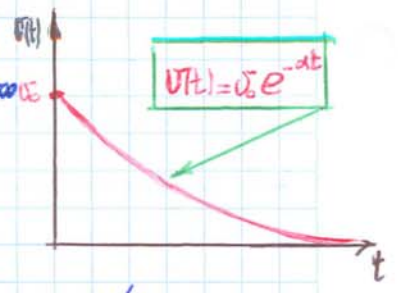
$$\underline{F} = i \underline{u}_r \times \underline{B} \cdot l = i l \underline{B} \cdot \underline{u}_x \quad \text{ma per la legge di OHM} \Rightarrow V_E = R i \rightarrow i = V_E / R = \frac{B l v_x}{R}$$

$$\underline{F}_x = (+) \underline{u}_x \frac{B l^2 v_x}{R}$$

ma dalla meccanica classica $\underline{F} = m \underline{a} = m \frac{dv}{dt}$ e considerato che forza e moto sono parziali ad x posso scrivere che

$$* F_x = -\frac{B^2 v_x}{R} = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2}{mR}\right) dt = -\alpha dt \rightarrow \int \frac{dv}{v} = (-\alpha) \int dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\alpha t$$

trovando tutto alla funzione esponenziale e^x si ottiene che la velocità varia nel tempo $v(t)/v_0 = e^{-\alpha t}$ con legge esponenziale come meglio rappresentato nel diagramma a fianco, si noti che $v=0$ solo per $t \rightarrow \infty$



Ma noi vogliamo v_x in funzione dello spazio perciò ripartendo dalla equazione della meccanica * posso scrivere



$$\rightarrow \frac{B^2 v_x}{R} = (-) \frac{B^2}{R} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = (-) \left(\frac{B^2}{mR}\right) dx = -\alpha dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = (-\alpha) \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$v(x) = v_0 - \frac{B^2}{mR} x$$

risposta quesito (a)

è questa l'equazione di una retta con v_0 e $x_0 = v_0 \frac{mR}{B^2}$

La spirale in $x=x_0$ raggiunge velocità $v(x_0)=0$, ma considerato che $v(x)=0$ solo per $t \rightarrow \infty$ tale punto NON sarà mai raggiunto, è questo il principio del freno ELETTRICO nel nostro caso

$$x_0 = \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

La spirale si fermerà dopo 40cm dal suo ingresso in B

Per avere la velocità in $x=l$ basta sostituire sopra i valori

$$v_1 = v(l) = v_0 - \frac{B^2 l}{mR} = v_0 - \frac{B^2 x_0}{2mR} = 4 \cdot 10^{-2} - \frac{25 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2} = v_1 = 0,02 \text{ m/s}$$

risposta quesito (b)

Qui va osservato che $x = l = \frac{1}{2} x_0$ e la velocità $v(x)$ ha legge lineare, giustamente $v_1 = \frac{1}{2} v_0$

Infine per l'energia dissipata non posso usare $W = \int (Ri) dt$ perché $t \rightarrow \infty$ non permette la soluzione dell'integrale, ma posso usare ΔE_k

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-2} (16 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}) = W_{diss} = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

risposta quesito (c)

LEGGI di FELICI

Dall'esercizio appena svolto, posso chiedermi quale è la carica totale q che ha percorso la spirale dall'istante $t=0$ all'istante $t=t_1$, noto è che è completamente dentro

$$q = \int dq = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

ma ricordando OHM $i = \frac{V_E}{R}$ e FARADAY $i = \frac{V_E}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi(t)}{dt}$ oè \ddot{r} è qui trascurato il R segno (-) perché non rilevante

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi(B) = \frac{1}{R} (\Phi_{finale} - \Phi_{iniziale}) \rightarrow$$

$$q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

LEGGI di FELICI

Nota che nella relazione conclusiva il segno (-) è stato reintrodotta -
Nell'esercizio proposto

$$\begin{cases} \Phi_i = 0 & \text{perché la spirale non è soggetta ad alcun campo magnetico in } t=0 \\ \Phi_f = BS = B l^2 = 0,5 \cdot 0,04 = 0,02 \text{ Tm}^2 = 0,02 \text{ Wb} & \text{perché } \begin{cases} B = \text{costante} \\ B \perp BS \end{cases} \end{cases}$$

introducendo i valori nella legge di FELICI si ottiene

$$q = \frac{0 - 0,02}{25} = (-) 8 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

quesito fuori esercizio

*** probabile domanda per I² prova scritta