5 giugno 2007 martedì – FISICA 2 – prof. MORESCO MAURIZIO h18:15 ÷ 19:15

ONDE

lezione n° 16 di 20

Iniziamo qui un nuovo argomento con delle definizioni basilari

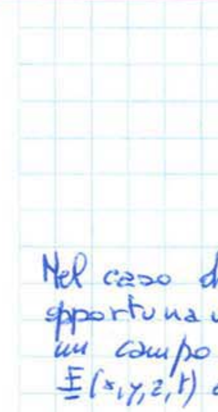
ONDA: qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che ha origine da una sorgente e si propaga in un mezzo con una velocità ben definita; la presenza di un mezzo materiale è essenziale per la propagazione delle onde meccaniche, mentre le onde elettromagnetiche possono propagarsi anche nel vuoto

CAMPO: indica una qualsiasi grandezza fisica che può essere definita in ogni istante in ogni punto dello spazio; possiamo distinguere tra
CAMPI SCALARI che sono definiti da una sola quantità numerica (pressione, temper.)
CAMPI VETTORIALE sono espressi da un vettore (direzione, verso, modulo) esempio $\underline{v}$; $\underline{B}$

FUNZIONE D'ONDA: indicata generalmente con il simbolo ξ rappresenta la funzione $\xi(x,y,z,t)$ che descrive la perturbazione del campo, ad opera della sorgente d'onda; la perturbazione può essere
- lo spostamento s di un elemento del sistema dalla posizione di equilibrio
- la variazione di pressione Δp
- la variazione di densità $\Delta \rho$ di una sostanza
- la variazione di una forza $\underline{F}$; di una potenza P ....

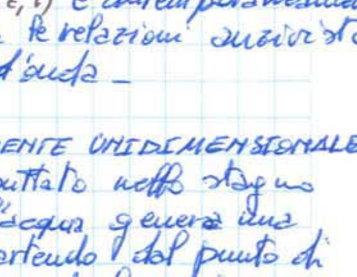
Nel caso di onde ELETTROMAGNETICHE la sorgente è un sistema di cariche accelerate opportunamente che producono un campo elettrico $\underline{E}(x,y,z,t)$ e contemporaneamente un campo magnetico $\underline{B}(x,y,z,t)$ correlati tra loro da tutte le relazioni suindicate; $\underline{E}(x,y,z,t)$ ed $\underline{B}(x,y,z,t)$ costituiscono appunto le funzioni d'onda –

ONDE PIANE: sono onde la cui funzione d'onda è "SPAZIALMENTE UNIDIMENSIONALE" $\xi(x,t)$; un esempio è dato da un sasso buttato nello stagno sulla superficie in quiete, l'impatto con l'acqua genera una serie di cerchi CONCENTRICI, i quali partendo dal punto di caduta O si allarga sempre più in senso radiale; qui si usa dire anche che è stata generata un'onda SUPERFICIALE, ed il campo è lo spostamento s del liquido che si allontana dalla posizione di equilibrio: l'esperimento fatto con un sughero ci fa vedere che le molecole di H_2O non si muovono in senso radiale, ma oscillano su e giù in senso VERTICALE –



ONDE PIANE ARMONICHE

Sono onde la cui funzione d'onda è seno o coseno



$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(Kx - vt)$$
$$\xi'(x,t) = \xi_0' \cos(Kx - \omega t)$$

$\boxed{\xi_0 = \text{AMPIEZZA D'ONDA}}$: il massimo valore della funzione d'onda

$\boxed{K = \text{NUMERO D'ONDE} = 2\pi/\lambda}$

$\boxed{\omega = Kv = \text{PULSAZIONE}}$

$\boxed{\lambda = 2\pi/K = \text{LUNGHEZZA D'ONDA}}$: distanza percorsa da un'onda armonica in un tempo pari al periodo T

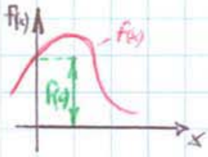
$\boxed{T = 2\pi/\omega = \text{PERIODO DELL'ONDA}}$: tempo impiegato per coprire una lunghezza d'onda λ

$\boxed{\nu = 1/T = \text{FREQUENZA}}$: inverso del periodo, rappresenta il numero di oscillazioni nell'unità di tempo

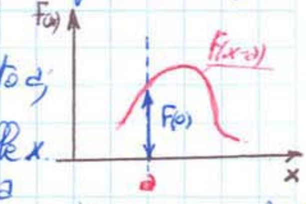
v = velocità di avanzamento dell'onda → $\underline{v \cdot T = \lambda}$

Le dimensioni del periodo sono secondi $T = [s]$
Le dimensioni della frequenza sono hertz $\nu = \frac{1}{T} = [Hz] = \frac{1}{[s]}$
L'argomento della funzione $\xi(x,t) = \xi_0 \cos(Kx - \omega t)$ si chiama
$\underline{\Phi(x,t) = Kx - \omega t}$ = FASE DELL'ONDA ARMONICA

Se guardiamo ora sempre ad un'onda piana, non necessariamente armonica che descrive dunque un campo scalare attraverso la funzione $F(x)$, nel momento $x=0$ assume il valore $F(0)$.



Se alla stessa funzione d'onda F invece di x impiego come argomento $(x-a)$ ottengo una traslazione rigida nel senso che la funzione non cambia di forma ma il valore $F(0)$ prima ottenuto in $x=0$ ora si registra nel punto a;
detto altrimenti: $F(x-a)$ rappresenta la stessa funzione $F(x)$ traslata della quantità a nel verso positivo (+) delle x.



Se invece di considerare lo scalare a = COSTANTE considero una sua variazione ad opera della velocità v nel tempo $t \rightarrow a = vt$ la funzione si muove con velocità v:

$F(x-vt)$ è una funzione che nel tempo t si sposta nel verso positivo (+) delle x con velocità v
$F(x+vt)$ è una funzione che nel tempo t si sposta nel verso negativo (-) delle x con velocità v

Ora se si è in presenza di un dato sistema fisico, esempio una corda tesa, una sbarra di acciaio, un volume d'aria, una massa d'acqua, al quale si possa associare un campo scalare, come possiamo sapere se in esso si possano propagare delle onde? ed in caso affermativo con quale velocità v?
Senza dare dimostrazione alcuna, si può dire che: nel caso in cui nel sistema un qualche campo ξ (spostamento s, densità ρ, pressione p) obbedisca alla seguente legge

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

EQUAZIONE D'ONDA
EQUAZIONE di D'ALAMBERT I

ove v = VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA dimostreremo inoltre che $\underbrace{v = \frac{T}{m_c}}$ ← forza agente ← massa corpo

Le soluzioni all'equazione differenziale del II° ordine di d'Alambert sono tutte quelle ricavabili come combinazione lineare di due soluzioni particolari

$$\left.\begin{matrix}\xi_1(x-vt)\\ \xi_2(x+vt)\end{matrix}\right\} \text{SOLUZIONI PARTICOLARI} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{\xi(x,t) = A\,\xi_1(x-vt) + B\,\xi_2(x+vt)}}_{\text{integrale generale all'equazione d'onda}}$$

La dimostrazione che $\xi_1(x-vt)$ e $\xi_2(x+vt)$ è soluzione particolare si sviluppa per semplice sostituzione; vediamo il caso per ξ_1 essendo quello per ξ_2 del tutto analogo

$$\frac{\partial \xi_1(x-vt)}{\partial t} = \frac{\partial \xi_1}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v\frac{\partial \xi_1}{\partial(x-vt)} \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -v\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial(x-vt)^2}\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}}_{-v} = \underbrace{\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial(x-vt)}}$$

$$\frac{\partial \xi_1(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial(x-vt)} \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial(x-vt)^2}\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}}_{1} = \underbrace{\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial(x-vt)}}$$

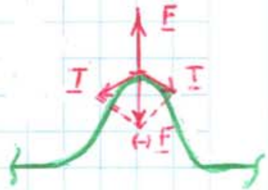
componendo ora i due risultati si ottiene quanto desiderato $\boxed{\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}}$

Dire che l'equazione differenziale del II° ordine, omogenea, a coefficienti costanti $(1, v^2)$ e lineare nell'incognita ξ, ove ξ è combinazione lineare di due funzioni $\xi = A\xi_1 + B\xi_2$, significa affermare che anche per le onde VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE cioè la sovrapposizione di due o più onde è ancora un'onda che si ottiene in ogni istante ed in ciascun punto effettuando l'operazione di SOMMA

ONDE DI UNA CORDA TESA

Vediamo subito un esempio concreto di come impiegare l'equazione di d'Alembert. Si supponga avere una corda tesa tra due punti lontani; si produca su questa una perturbazione (onda) che si propaga lungo la corda, e visualizzata da una "gobba" che si sposta progressivamente con velocità v.

A titolo di esempio si pensi la gobba generata da una forza $\underline{F}$, a questa la corda reagirà con delle forze di risultante $(-)\underline{F}$ uguali e contrarie



Indichiamo con $\underline{T}$ le componenti della risultante $(-)F$ ed analizziamo cosa avviene ad un piccolo tratto di corda infinitesimo di lunghezza dl

- Sia $\alpha \neq \alpha' \simeq 0$ gli angoli che dl forma con l'orizzontale
- Sia $\underline{T}+\underline{T}'=0$ cioè $|\underline{T}| = |\underline{T}'|$ perché supposta la corda inestensibile
- Sia dF_x la risultante delle forze agenti su dl e parallele all'asse x
- Sia dF_y " " " " " " dl e " " y

Sulla base di tali presupposti si può scrivere che

$\underline{R}$ risultante forze agenti su dl $\begin{cases} \text{lungo asse } x \to dF_x = T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = \underline{T(\cos\alpha' - \cos\alpha)} \\ \text{lungo asse } y \to dF_y = T'\sin\alpha' - T\sin\alpha = \underline{T(\sin\alpha' - \sin\alpha)} \end{cases}$

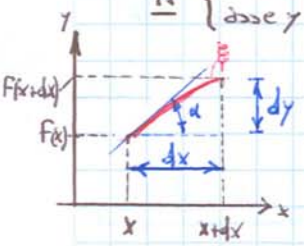
Esprimendo l'angolo $\underline{\alpha \text{ in radianti}}$, sulla base dell'ipotesi $\alpha \simeq 0$ notiamo che se poniamo

$\alpha' \to \sin 5° = 0,0871$	$\cos 5° = 0,9962$	$tg\, 5° = 0,0875$	$\alpha° = 5° \to \alpha^{rad} = \alpha° \frac{\pi}{180} = 0,0873^{rad}$
$\alpha \to \sin 6° = 0,1045$	$\cos 6° = 0,9945$	$tg\, 6° = 0,1051$	$\alpha° = 6° \to \alpha^{rad} = \alpha° \frac{\pi}{180} = 0,1047$

$\left.\begin{matrix} \sin\alpha' \simeq tg\alpha' \simeq \alpha'^{rad} & \cos\alpha' \simeq 1 \\ \sin\alpha \simeq tg\alpha \simeq \alpha^{rad} & \cos\alpha \simeq 1 \end{matrix}\right\}$ in prima approssimazione per piccoli angoli si può pensare di fare l'ulteriore semplificazione

$$\underline{R} \begin{cases} \text{asse } x \to dF_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) \simeq 0 \\ \text{asse } y \to dF_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) \simeq \boxed{T(tg\alpha' - tg\alpha)} \end{cases}$$

sulla corda non agisce alcuna forza parallela all'asse x
sulla corda agisce solo una forza parallela all'asse y
ci aspettiamo un'equazione d'onda monodimensionale



Ricordando inoltre la definizione di differenziale $\longrightarrow$ $\boxed{\xi(x+dx) - \xi(x) = dx \frac{\partial \xi}{\partial x} = dx \cdot \xi'(x)}$

e che l'interpretazione geometrica di derivata è $\longrightarrow$ $\boxed{\lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = tg\,\alpha = \xi'(x)}$

$$\underline{R} \simeq dF_y \simeq T(tg\alpha' - tg\alpha) = T\,dx\,\frac{\partial(tg\alpha)}{\partial x}$$

sempre con riferimento alla fisica classica $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ ed in termini infinitesimali

$$dF_y = dm\, a_y \to dF_y = dm \frac{d^2 y}{dt^2} = \underbrace{dF_y = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \equiv T\,dx \frac{\partial(tg\alpha)}{\partial x}}$$

ma è questa proprio un'equazione d'onda ma, per l'interpretazione geometrica della $tg\alpha$ che sappiamo essere derivata di una funzione $tg\,\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{dy}{dx}$

$$T \frac{\partial(tg\alpha)}{\partial x} dx = T \frac{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cancel{dx} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m_l \cancel{dx} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

la m_l è massa lineica della corda = massa per unità l
$dm = m_l\, dl \simeq m_l\, dl \cos\alpha = m_l\, dx$

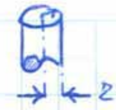
Ecco che ricaviamo

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \overbrace{\left(\frac{T}{m_l}\right)}^{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

equazione di d'Alembert (in I^a approssimazione)

Per tale perturbazione (onda) la velocità di propagazione risulta $\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{m_l}}}$

Se a titolo di esempio consideriamo un filo di acciaio di raggio 1 mm la cui densità $\rho = 7860 \, Kg/m^3$ e sottoposto ad una forza $T = 10N$, ne ricaviamo

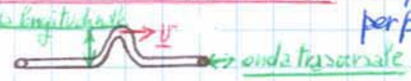


$$M_\ell = \rho_\ell = \pi r^2 \rho = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}86 \cdot 10^{-3} = 24{,}7 \cdot 10^{-3} \simeq \underline{2{,}5 \cdot 10^{-2} \, Kg/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{M_\ell}} = \sqrt{\frac{10}{2{,}5 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{10}{2{,}5} \cdot 10^2} = \sqrt{4 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10 = \underline{20 \, m/s}$$

È chiaro poi che se α non è piccolo $(\cos\alpha' - \cos\alpha) \neq 0$ perciò vi è anche componente dF_x che genera un'onda trasversale, non più trascurabile e che per il principio della sovrapposizione degli effetti va sommata a quella longitudinale

ONDA TRASVERSALE: le particelle del mezzo attraversato subiscono spostamenti in direzione perpendicolare alla direzione in cui si propaga l'onda

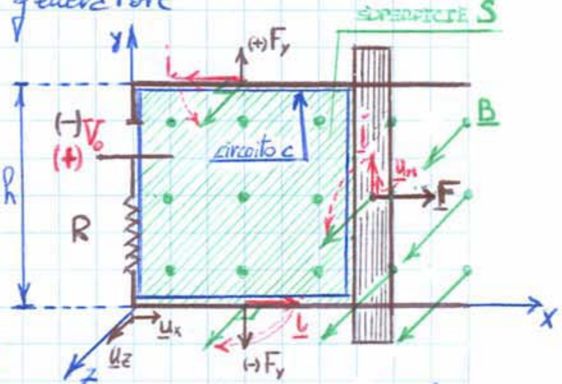


Torniamo ora al programma dell'elettromagnetismo e vediamo un'ulteriore applicazione della legge di FARADAY, che conduce a ciò che è noto come un

MOTORE LINEARE

Consideriamo un conduttore alimentato da un generatore di FEM ed attraversato da un campo magnetico $\underline{B}$ costante ed ortogonale alla superficie S su cui giace il conduttore stesso.

Nel sistema ipotizziamo inserito anche un resistore R e, che vi sia un elemento mobile (sbarretta) che si muova sotto l'effetto della FEM del generatore



La I^a legge elementare di LAPLACE mi fornisce la forza $\underline{F}$ che assicura il moto alla sbarra

$$\underbrace{\underline{F} = i \, \underline{u}_r \times \underline{B} \, h = i B h \, \underline{u}_x} \rightarrow F = iBh$$

allo stesso tempo dalla meccanica $\quad F = ma = m \dfrac{dv}{dt}$

ove m è la massa della sbarretta.

Ma nel suo moto la sbarra soggetta al campo magnetico $\underline{B}$, concatena un flusso $\Phi(B)$ attraverso il circuito © che risponde alla legge di FARADAY e che per la legge di LENZ si oppone alla causa che lo genera e dunque in opposizione alla FEM del generatore

$$V_E = (-)\frac{d\Phi(B)}{dt} \longrightarrow \text{per le ipotesi di } \begin{cases} B = \text{COSTANTE} \\ \underline{B} \parallel \underline{u}_z \end{cases} \qquad \Phi(B_c) = \int_{S(c)} \underline{B}\,\underline{u}_n^{(u_z)} \, ds = BS = \underline{Bhx = \Phi(B_c)}$$

$$= (-)\frac{d}{dt}(Bhx) = (-) Bh \frac{dx}{dt} = \underline{V_E = (-) Bhv}$$

il flusso concatenato, per effetto dello spostamento lungo l'asse x della sbarretta, AUMENTA e di conseguenza aumenta V_E

Il potenziale totale che circola nel sistema, è soggetto alla legge di OHM e vale

$$\underline{V = V_0 - V_E = V_0 - Bhv = Ri}$$

Riepiloghiamo: vi è la forza $\underline{F}$ che genera il moto che però non è unica in quanto per autoinduzione si genera corrente i' (in opposizione alla causa che la genera) a sua volta produce $\underline{F}'$ con stessa direzione ma verso opposto ad $\underline{F}$; si può arrivare così ad un punto in cui $\underline{F} + \underline{F}' = 0$

ove vale $\quad V_0 - Bhv_{lim} = 0 \longrightarrow \boxed{v_{lim} = \dfrac{V_0}{Bh}}$

ma allora $V_0 - Bhv_{lim} = 0 = Ri$ cioè $i = 0$

ma se $i = 0 \rightarrow F = iBh = 0$ non vi è più una forza che produce il moto

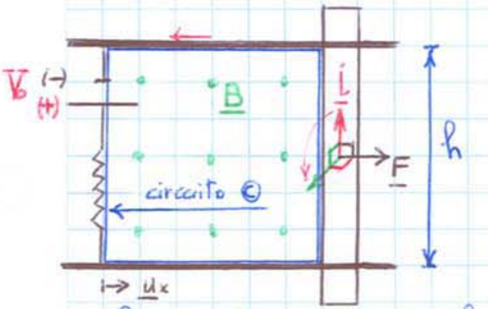
Se non vi è più $\underline{F}$ che produce il moto, questo non varia e dunque $\underline{v_{lim} = \text{COSTANTE}}$

ho così costruito un MOTORE LINEARE, ossia un motore che non va oltre una certa velocità di rotazione

ESERCIZIO n° 8.10 pagina 231

Una sbarretta conduttrice di massa $m = 20\,g$ è appoggiata su due rotaie distanti $h = 20$ cm collegate ad un generatore di FEM $V_0 = 1\,V$; il circuito che si forma ha resistenza $R = 0{,}5\,\Omega$ ed è immerso in un campo magnetico $B = 0{,}5\,T$ uniforme, ortogonale al piano delle rotaie.
All'istante $t=0$ in cui comincia a circolare corrente la sbarretta è ferma.
A regime si muove con velocità v_∞. Calcolare:
a) l'intensità di corrente all'istante $t=0$ ed a regime per $t \to \infty$
b) la velocità di regime v_∞
c) l'energia cinetica E_K della sbarretta a regime

RISOLVO



$m = 20\,g$
$h = 20\,cm$

$R = 0{,}5\,\Omega$
$V_0 = 1\,V$
$B = 0{,}5\,T$
per $\begin{cases} t=0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$

Con la legge di OHM posso calcolare all'istante $t=0$ la corrente che circola nel circuito

$$i(0) = \frac{V_0}{R} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,A$$

mentre la corrente i_∞ abbiamo, visto che quando la sbarretta raggiunge la velocità limite $v_\infty = v_{lim}$ vale quanto segue

$$V_0 - Bh\,v_{lim} = Ri = 0 \;\rightarrow\; i(\infty) = 0$$

Per la $v_{lim} = v_\infty$, nelle ipotesi di campo magnetico costante ed ortogonale al piano delle rotaie

$$\Phi(B_c) = \int_{S(c)} \underline{B}\,\underline{u}_n\,ds = Bhx \;\rightarrow\; V_\varepsilon = (-)\frac{d\Phi}{dt} = (-)Bh\frac{dx}{dt} = (-)Bh\,v = V_\varepsilon$$

$$V = V_0 - V_\varepsilon = V_0 - Bhv \;\rightarrow\; V_0 - Bh\,v_{lim} = 0 \;\rightarrow\; v_{lim} = \frac{V_0}{Bh} = \frac{1}{5\cdot10^{-1}\cdot2\cdot10^{-1}} = \frac{10^2}{\cancel{10}} = 10\,m/s$$

Banalmente l'energia cinetica a regime vale

$$E_K = \frac{1}{2}m\,v_{lim}^2 = 5\cdot10^{-1}\cdot2\cdot\cancel{10^{-2}}\cdot\cancel{10^2} = \cancel{10}\cdot\cancel{10^{-1}} = 1\,J$$

Possiamo di seguito ricercare la legge temporale del moto della sbarretta, anche se non richiesto dal testo.
Partendo sempre dall'equazione meccanica classica $F = ma$ e combinandola con la II^a legge elementare di LAPLACE

$$\underline{F} = i\,\underline{u}_T \times \underline{B}\,h = ihB\,\underline{u}_x \;\longrightarrow\; F = ma = m\frac{dv}{dt} = iBh$$

Ma per la legge di OHM $V = V_0 - V_E = V_0 - Bhv = Ri \longrightarrow \boxed{i = \frac{V_0 - Bhv}{R}}$
da cui possiamo scrivere

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\frac{dv}{dt} = iBh = (V_0 - Bhv)\frac{Bh}{\cancel{R}} = \left(\frac{V_0}{Bh} - v\right)\left(\frac{B^2h^2}{Rm}\right)$$

← termine già "conosciuto" in esercizio simile 8.3

$$\frac{dv}{dt} = (-)\left[v - \frac{V_0}{Bh}\right]\frac{B^2h^2}{Rm}$$

ma se considero la funzione $\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)$ il suo differenziale si calcola come

$$\frac{d\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)}{dv} = 1 \longrightarrow d\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right) = dv$$

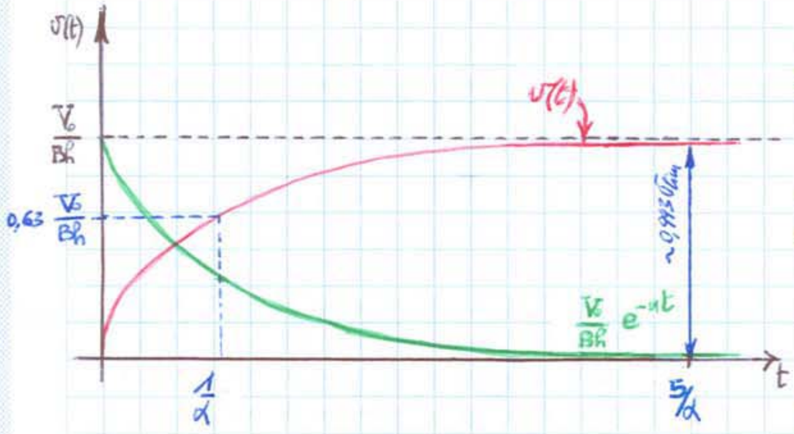
$$\frac{dv}{\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)} = \frac{d\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)}{\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)} = (-)\overbrace{\left(\frac{B^2h^2}{mR}\right)}^{\alpha}dt = (-)\alpha\, dt$$

passando all'integrazione si ottiene

$$\int_{v_0}^{v} \frac{d\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)}{\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)} = \underbrace{\ln\frac{\left(v - \frac{V_0}{Bh}\right)}{\left(v_0 - \frac{V_0}{Bh}\right)}}_{} = (-)\alpha t = \int_0^t (-)\alpha\, dt$$

elevando tutto alla potenza e ne segue che, considerato $v_0 = 0$

$$\frac{v - \frac{V_0}{Bh}}{(-)\frac{V_0}{Bh}} = e^{-\alpha t} \longrightarrow v(t) - \frac{V_0}{Bh} = (-)\frac{V_0}{Bh}e^{-\alpha t} \longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{V_0}{Bh}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$



cioè il potenziale $v(t)$ ha un asintoto orizzontale V_0/Bh al quale tende con legge $e^{-\alpha t}$ senza raggiungerlo mai

- se $t = 0 \longrightarrow v(0) = 0$
- se $t \to \infty \longrightarrow v(\infty) \longrightarrow \frac{V_0}{Bh}$ come già visto

in teoria $v_\infty = v_{lim}$ non viene mai raggiunto ma si osserva che

- per $t = 1/\alpha \to v\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cong 0{,}63\, v_{lim}$
- per $t = 5/\alpha \to v(5/\alpha) \simeq 0{,}993\, v_{lim}$

cioè a dire che già dopo un tempo di

$$\frac{5}{\alpha} = 5\frac{1}{\frac{B^2h^2}{mR}} = 5\frac{mR}{B^2h^2} = \cancel{5}\,\frac{8\cdot10^{-2}\cdot5\cdot10^{-1}}{5^2\cdot10^{-2}\cdot2^2\cdot10^{-2}} = \frac{10}{2} = \underline{5 \text{ secondi}}$$

il processo può dirsi concluso al 99,5%

Esclusa la ricerca della legge di variazione nel tempo della velocità $v(t)$, la definizione della velocità limite v_{lim} può essere una domanda per il II° compitino