

ONDE ARMONICHE PIANE

Terminiamo qui ad occuparci delle onde armoniche ma in modo più completo. Abbiamo visto che la legge che governa la propagazione in una corda è contenuta nella equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m\ell} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

sia che questa si propaghi nel verso positivo (+) che (-) negativo.



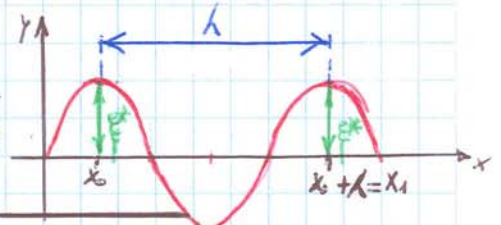
Le soluzioni all'equazione differenziale del 2° ordine omogenea ed a coefficienti costanti, sono tutte le combinazioni lineari delle due soluzioni particolari

$$\left. \begin{matrix} \xi_1(x-vt) \\ \xi_2(x+vt) \end{matrix} \right\} \text{ detta questa anche equazione d'onda } \xi(x,t) = \xi_0; \xi_1(x-vt) + \xi_2(x+vt)$$

Se le funzioni ξ_1 e ξ_2 sono rappresentate da seno e coseno

$$\left. \begin{matrix} \xi_1 = \xi_0 \sin(x-vt) \\ \xi_2 = \xi_0 \cos(x+vt) \end{matrix} \right\} \text{ abbiamo ciò che si definisce un'onda piana armonica}$$

Ma attenzione che l'argomento della funzione sin/cos è un "numero puro", mentre $x - vt$ ha le dimensioni di una lunghezza [m], ecco che il tutto va moltiplicato per K che porta le dimensioni di [m⁻¹]



$K = \text{periodicità spaziale} = \text{NUMERO DI ONDE}$

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_1 = \xi_0 \sin(Kx - Kvt) \\ \xi_2 = \xi_0 \cos(Kx + Kvt) \end{matrix} \right.$$

Capiamo meglio cos'è K :

Facciamo l'ipotesi semplificativa che l'equazione d'onda sia sinusoidale, cioè valga per un dato valore x_0 l'onda ha ampiezza ξ^* , la quale ampiezza si ripete nel punto x_1 per la periodicità della funzione seno, vale cioè

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_1 = \xi_0 \sin(Kx) \\ \xi_2 = \xi_0 \cos(Kx) = 0 \end{matrix} \right.$$

$\xi^* = \xi_0 \sin(Kx_0) = \xi_0 \sin(Kx_1)$ per soddisfare l'uguaglianza i due argomenti di seno devono essere identici perciò

$$K(x_0) = K(x_1) \text{ e se } x_0 \neq x_1 \text{ deve risultare } Kx_1 - Kx_0 = K(x_1 - x_0) = 2\pi$$

la distanza $(x_1 - x_0)$ rimane fissa ed invariabile lungo tutta l'onda ed è scrivibile in *

$$* \lambda = (x_1 - x_0) \rightarrow K\lambda = 2\pi$$

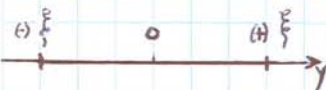
da cui si deduce che il parametro K rappresenta il numero di lunghezze di onda λ che stanno su di una distanza uguale a 2π

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\lambda = \text{LUNGHEZZA D'ONDA}$ è questa una lunghezza fisica misurabile, ed è perciò molto importante

$K = \text{numero di onde in un periodo } 2\pi$, è un parametro legato a λ della precedente, e forse un po' meno importante di quest'ultimo; ma nei calcoli lo si ritrova spesso -

Ritorniamo qui dalla "fisica classica" che l'equazione di un moto armonico semplice lungo un asse rettilineo ha equazione $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$; nel nostro caso $A = \xi_0$ e considerato che in $t=0$ $x(0) = A \sin \phi$ deve essere $\phi = 0$ in definitiva l'equazione che ci interessa si scrive come



$$y = y_0 \sin(\omega t)$$

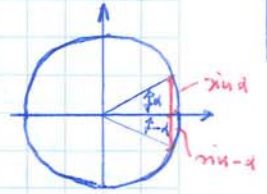
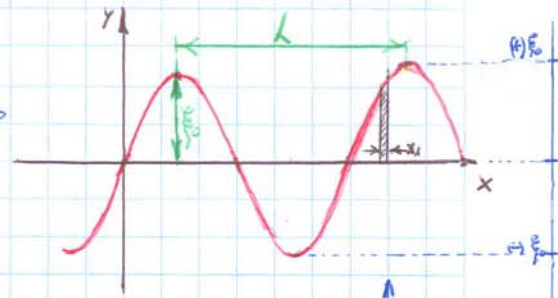
ed il moto si svolge in un segmento di lunghezza $2\xi_0$, con centro l'origine 0, periodo 2π di FASE INIZIALE $\phi = 0$ e pulsazione ω ; vediamo meglio cosa vale ω

Presso un generico punto x_1 sull'asse, l'equazione d'onda si può scrivere come

$$\xi(x_1, t) = \xi_0 \sin k(x_1 - vt) = \xi_0 \sin(kx_1 - \omega t)$$

se scegliamo ora che il punto sia origine del moto $\rightarrow x_1 = 0$
l'equazione diventa

$$\xi(0, t) = \xi_0 \sin(-\omega t) \quad \text{ma ricordo che vale} \\ \sin(-x) = -\sin x \\ \Rightarrow \xi(0, t) = -\xi_0 \sin(\omega t)$$



è questa ancora una volta l'equazione di un moto armonico semplice nell'asse y
tipo $y = y_0 \sin(\omega t)$, ove vale $y_0 = \xi_0$ che è l'ampiezza, la fase $\phi = 0$
e per far esattamente coincidere le due equazioni è necessario eguagliare
anche l'argomento della funzione seno

$$\omega t = kx$$

$$\boxed{\omega = k v} \quad \text{PULSAZIONE} \quad [s^{-1}]$$

La pulsazione ω del moto armonico NON va confusa con una velocità angolare ω^{rad}
e, la dimensione della pulsazione è $[s^{-1}]$ ricavabile da $\frac{1}{m} \frac{m}{s} = \frac{1}{s} = kv$

Altra cosa da osservare qui è la velocità v , non è questa la velocità di propagazione dell'onda
nel suo moto longitudinale lungo l'asse x , ma rappresenta la velocità del moto armonico e
diunque lungo l'asse y

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$\boxed{\omega = kv}$$

Ricapitolando i parametri che definiscono esattamente il moto armonico sono 4

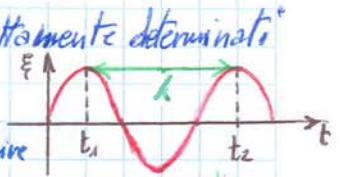
- k il numero di onde in un periodo 2π
- λ la lunghezza d'onda
- ω la pulsazione d'onda
- v la velocità (di oscillazione)

Peccati tra loro attraverso k

e otteniamo due seno metri, i restanti due rimangono esattamente determinati

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

Se ora considero due istanti successivi t_1 e t_2 tali che $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$, posso definire



$$t_2 - t_1 = T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{PERIODO dell'onda} \quad T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} v} = \frac{\lambda}{v} \rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v} \quad \lambda = vT}$$

$$v = \frac{1}{T} \quad \text{FREQUENZA dell'onda} \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda} v}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \rightarrow$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad f\lambda = v}$$

da fare attenzione alle dimensioni della frequenza $f = v$
che è nel SI riconosciuto come Hertz $[Hz]$, rimane dunque
fisicamente un $(tempo)^{-1}$, ma non è misurato in secondi.

Dimensioni dei parametri principali

$$k = [m^{-1}]$$

$$\omega = \frac{[rad]}{[s]} = [s^{-1}]$$

$$\lambda = [m]$$

$$T = [s]$$

$$v = \frac{[m]}{[s]}$$

$$f = \nu = [s^{-1}] = [Hz]$$

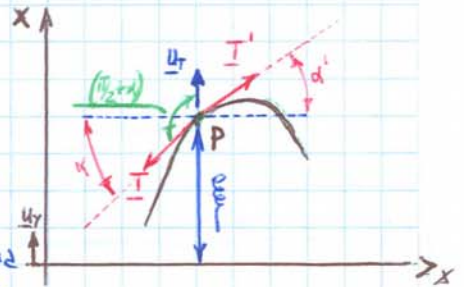
PROPAGAZIONE ENERGIA ONDE

La propagazione di un campo che descrive un'onda si accompagna sempre alla propagazione di energia; lo si può ben vedere considerando un piccolo tratto di corda ds di cui, per questo, si misura un'energia cinetica $dE_k = \frac{1}{2} dm v^2$ che se paragonata allo stato di quiete in cui $dE_k = \frac{1}{2} dm v_0^2 = 0$ giustifica quanto affermato. L'energia propagata perviene nel punto dai precedenti; vediamo come studiare il caso

Esaminiamo dunque l'intervallo infinitesimo ds di un punto P di una corda (caso specifico dunque, nelle ipotesi già viste in precedenza)

$$\alpha \neq \alpha' \text{ mentre } T + T' = 0$$

vale a dire che se taglio in P la corda per mantenere l'equilibrio alla forza T' ne devo sostituire una uguale e che deve essere al contempo uguale e contraria a T applicata immediatamente prima. La forza T abbia un certo essere legata allo spostamento ds della corda perciò forza \cdot spostamento = lavoro



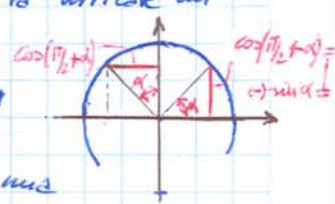
$$dW = \underline{F} ds = \underline{T} ds$$

$$= T d\xi u_y$$

$$= T d\xi u_r$$

$$= T d\xi \cos(\pi/2 + \alpha) =$$

nelle ipotesi di α piccolo $F \begin{cases} dF_x = 0 \\ dF_y = T(\frac{1}{2}\alpha' - \frac{1}{2}\alpha) \neq 0 \end{cases}$
 non vi è spostamento lungo asse x
 vi è solo spostamento lungo asse $y \rightarrow ds = d\xi u_y$ posto
 $u_r = u_y$ e considerato che T forma con la verticale un
 angolo pari ad $(\pi/2 + \alpha)$
 e ricordando che $\cos(\pi/2 + \alpha) = (-)\sin \alpha$



$$dW = (-) T \sin \alpha d\xi$$

Ma non è il lavoro la relazione interessante; ora cerchiamo una relazione diversa, guardiamo alla potenza che per definizione si scrive

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (-) T \sin \alpha d\xi$$

anche se α varia, qui lo possiamo assumere come costante

$$= (-) T \sin \alpha \left(\frac{d\xi}{dt} \right)$$

← velocità di spostamento dell'ampiezza lungo asse y

se ritorniamo qui alla ipotesi di α piccolo $\alpha \approx 0 \rightarrow \sin \alpha \approx \alpha$
 ma $\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ per quanto già visto perciò

$$P = (-) T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Ma la potenza così com'è ancora non riesce ad usarla nei calcoli operativi -
 Dov'è ricordare allora l'equazione di un'armonica sinusoidale (senza onda riflessa) e derivare

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = (-)\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = (-)\omega k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$P = (-) T (-)\omega k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

ecco qui riconoscibile nella funzione $\cos(kx - \omega t)$ un'armonica del tipo $f(x - vt)$ e, ciò significa che la potenza dell'onda si propaga con la stessa velocità v dell'onda stessa

Introducendo qui il concetto di valor medio, ossia anche se il \cos^2 oscilla tra 0 e 1 il suo valor medio è $1/2$, possiamo qui definire

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} T \omega k \xi_0^2$$

POTENZA MEDIA CORDA

Nella realtà la potenza oscilla come \cos^2 da zero ad uno, nei calcoli si considera il suo valor medio di $1/2$

La potenza di una corda non è proporzionale all'ampiezza ξ_0 massima dell'onda che la percorre ma al suo quadrato ξ_0^2 .
 Fare attenzione che introducendo il valor medio $1/2$ si fa riferimento ad un periodo dell'onda, ed è perciò a tale occasione che si riferisce la potenza media $\langle P \rangle$

Il risultato determinato per la potenza $\langle P \rangle = \frac{1}{2} T K \omega \xi_0^2$, seppur interessante, è limitato al caso dell'onda di una corda; per farlo dobbiamo riesaminare i parametri che caratterizzano l'equazione (T, K, ω, ξ) e notare che mentre (K, ω, ξ) sono legati al moto armonico, la tensione T unico tra tutti è caratteristico dell'onda di una corda; vediamo di "eliminarlo".

$$\sigma = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}} \rightarrow T = \mu_0 v^2 \rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 v^2 K \omega \xi_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \xi_0^2 v (K v) = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \xi_0^2 v$$

Se ora considero la corda e dico

\vec{S} = sezione ortogonale all'asse

l = lunghezza di 1 m



$$\mu_0 = \rho l = \rho S \cdot l = \rho S$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 \xi_0^2 v$$

è questa la potenza che si propaga in un mezzo a densità ρ attraverso la superficie S .

La relazione non è più legata intimamente al caso specifico della corda, ma vi è ancora il parametro S che ci riporta al caso specifico, allo scopo definiamo

$$\langle I \rangle = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 v$$

POTENZA (media) PER UNITÀ di AREA

Se facciamo qui un po' di analisi dimensionale si vede che $(\omega \cdot \xi_0) = m/s$ cioè una velocità infatti deve risultare

$$\rho (\omega \xi_0)^2 v = \frac{kg}{m^3} \frac{m^2}{s^2} \frac{m}{s} = \frac{(kg \cdot m)}{s^2} \frac{1}{m^2} = \frac{N \cdot m}{s^2} \frac{1}{m^2} = \frac{J}{s} \frac{1}{m^2} = \frac{W}{m^2} \text{ potenza per unità di area}$$

La conferma di ciò viene anche dalla generica equazione di un moto armonico $x = x_0 \sin(\omega t)$ e derivando ottengo una velocità $v = \frac{dx}{dt} = \underbrace{\omega x_0}_{\text{VELOCITÀ}} \cos(\omega t)$; tutto ciò per dire che:

se considero l'unità di volume $V = 1 m^3$ del mezzo a densità ρ la sua massa vale $m = \rho$ e pertanto

$$W = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 = \frac{1}{2} \rho v^2$$

ENERGIA CINETICA PER UNITÀ DI VOLUME

ecco che la potenza (media) per unità di area vale e dipende dalla densità di energia per unità di volume. Ricapitoliamo le due importanti proprietà, valide per qualsiasi tipo di onda armonica

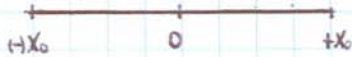
$$\langle I \rangle = W v$$

v = velocità propagazione onda

- l'intensità (media) di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo $I_{oc} \propto \xi_0^2$
- l'intensità (media) di un'onda si ottiene moltiplicando la densità di energia per unità di volume (W) per la velocità v di propagazione dell'onda $I = W \cdot v$

Accenniamo qui al caso del moto armonico di equazione

$$\begin{cases} x = x_0 \sin(\omega t) \\ v = (\omega x_0) \cos(\omega t) \end{cases}$$

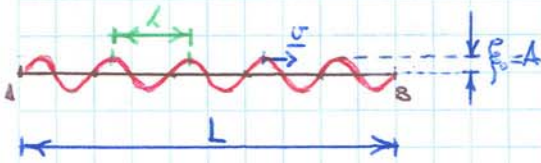


- se vale $(\omega t) = 0 \rightarrow \cos(\omega t) = 1 \rightarrow$ energia cinetica massima
- se vale $(\omega t) = \pi/2 \rightarrow \cos(\omega t) = 0 \rightarrow$ energia cinetica minima

ESERCIZIO n° 16.1 pagina 181

Un filo teso ha una massa $m = 0,24 \text{ kg}$ ed una lunghezza $L = 2,5 \text{ m}$. Si vogliono produrre onde armoniche che abbiano un'ampiezza $A = 0,05 \text{ m}$, lunghezza d'onda $\lambda = 0,5 \text{ m}$, che si propagano sul filo alla velocità $v = 20 \text{ m/s}$. Calcolare la potenza P_{gen} del generatore, trascurando gli attriti.

RISOLVO



L'ampiezza A del testo è ciò che noi abbiamo indicato con ξ_0 .

La potenza cercata vale $\langle P \rangle = \frac{1}{2} T k \omega \xi_0^2$ e per calcolarla è necessario

- risolvere il moto armonico dell'onda calcolando k ed ω
- determinare la tensione T applicata alla corda

MOTO DELL'ONDA

Ricorrendo ad $\omega = k v$ a mano $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5 \cdot 10^{-1}} = 4\pi \approx 12,57$

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^{-1}} = 80\pi \approx 251,3 \text{ rad/s} = \omega$$

TENSIONE CORDA

Ricorrendo alla nota $v = \sqrt{\frac{T}{m_c}}$ ove la massa lineare vale $m_c = \frac{m}{L} = \frac{0,24 \cdot 10^3}{2,5} = 0,096 \text{ kg/m}$

$$T = m_c v^2 = \frac{L}{m} v^2 = 0,096 \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 38,4 \text{ N} = T$$

la potenza cercata vale $\langle P \rangle = \frac{1}{2} T k \omega \xi_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 38,4 \cdot 12,57 \cdot 251,3 \cdot 0,05^2 = 151,6 \text{ W}$

$$\frac{1}{2} g (\omega \xi_0)^2 v = \frac{1}{2} \cdot 0,096 \cdot (251,3 \cdot 0,05)^2 \cdot 20 = 151,6 \text{ W}$$

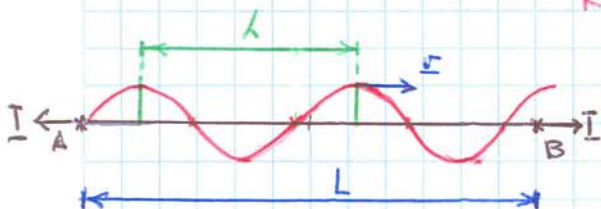
TRUCCHETTO !!!

È molto difficile ricordare $\omega = k v$, per il calcolo della velocità, però ricordando la frequenza come $\omega = 2\pi f \rightarrow 2\pi f = k v = \frac{2\pi}{\lambda} v \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \boxed{fk = v}$ più facile da ricordare che $\omega = kv$

ESERCIZIO n° 16.2 pagina 181

Un filo di massa $m = 0,24 \text{ kg}$ e lungo $L = 60 \text{ cm}$, è sottoposto ad una tensione $T = 80 \text{ N}$. Un oscillatore elettrico che funziona alla frequenza di $f = 50 \text{ Hz}$ genera onde meccaniche sul filo. La potenza dell'oscillatore è $P_{gen} = 350 \text{ W}$. Calcolare l'ampiezza A delle oscillazioni.

RISOLVO



Utilizziamo ancora la relazione $P = \frac{1}{2} m_c (\omega \xi_0)^2 v$ ma al contrario. Calcoliamo dunque

$$m_c = \frac{m}{L} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4 \text{ kg/m}$$

mentre per la velocità dalla nota $v = \sqrt{\frac{T}{m_c}}$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

abbiamo tutti gli elementi per calcolare l'ampiezza

$$v = \sqrt{\frac{T}{m_c}} = \sqrt{\frac{80}{0,4}} = \sqrt{200} \approx 14,1 \text{ m/s}$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2P}{v m_c}} = \frac{1}{314} \sqrt{\frac{2 \cdot 350}{14,1 \cdot 0,4}} = 0,0355 \text{ m} \approx 3,55 \text{ cm}$$

ONDE SONORE (fenni)

Delle onde sonore vale un solo insieme relazioni semplici: sono queste dovute alla perturbazione locale delle molecole dalla loro posizione di equilibrio. La perturbazione si propaga lungo 3 campi:

- ξ DI SPOSTAMENTO lungo la direzione di propagazione $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$
- p DI PRESSIONE $p - p_0 = p_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$
- ρ DI DENSITA' $\rho - \rho_0 = \Delta \rho \sin(kx - \omega t + \phi)$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

è questa la relazione che lega la velocità di propagazione dell'onda con il mezzo in cui si diffonde; $B = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$ **MODULO DI COMPRESSIBILITA' DEL GAS** ha dimensioni di una pressione $[B] = \frac{N}{m^2}$

La rapidità con cui avviene il fenomeno induce a ritenere ADIABATICI i processi di compressione ed espansione del gas, e a questo è considerato gas ideale ($PV = nRT$) attraverso la nota PV^γ , valevole appunto per processi adiabatici REVERSIBILI condotti alla

$\alpha = 20,055$ per l'aria, determinato sperimentalmente
 $T =$ in gradi Kelvin

$$v \propto \sqrt{T}$$

La velocità di propagazione di un'onda sonora in un gas dipende solo $\left\{ \begin{array}{l} \text{DALLA SUA TEMPERATURA ASSOLUTA } T \\ \text{DAL TIPO DI GAS IN CUI SI PROPAGA } \alpha \end{array} \right.$

ESERCIZIO n° 16.3 pagina 481

Un'onda sonora prima armonica di pulsazione $\omega = 2 \cdot 10^3$ rad/s ed intensità $I = 10^{-6}$ W/m², si può propagare in aria ed in acqua, per le quali la densità e velocità di propagazione sono rispettivamente $\rho_a = 1,29$ kg/m³; $v_a = 344$ m/s; $\rho_w = 10^3$ kg/m³; $v_w = 1493$ m/s. Calcolare:

- la lunghezza d'onda λ nei due mezzi
- l'ampiezza A_ξ dell'onda di spostamento
- l'ampiezza dell'onda di pressione Δp

RISOLVO

Con la disposizione l'intensità dell'onda possiamo usare $I = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi)^2 v$ però il primo quesito chiede il λ di onde

$$\omega = k v = \frac{2\pi}{\lambda} v \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega} v$$

$$\lambda_{AIR} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^3} 344 = 1,08 \text{ m}$$

$$\lambda_{H_2O} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^3} 1493 = 4,68 \text{ m}$$

$$\xi = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}}$$

$$\xi_{AIR} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{1,29 \cdot 344}} = 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-8}}{1,29 \cdot 344}} = 3,36 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\xi_{H_2O} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 1493}} = 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1,493}} = 5,74 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Il quesito (c) non è stato da noi studiato, ma viene risolto attraverso una semplice formula

$$(\Delta p)_{max} = \rho \omega \xi v$$

$$(\Delta p)_{max, AIR} = 1,29 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 3,36 \cdot 10^{-8} \cdot 344 = 0,03 \text{ Pa}$$

$$(\Delta p)_{max, H_2O} = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 5,74 \cdot 10^{-10} \cdot 1493 = 1,73 \text{ Pa}$$

FUORI TEMA

- temperatura dell'aria: dalla $v = \alpha \sqrt{T} \rightarrow T = \left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{344}{20,055}\right)^2 = 294,22 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}$
- frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi} = f_{AIR} = f_{H_2O} = 318 \text{ Hz}$
- periodo $T = \frac{1}{f} = 0,003 \text{ s} = 3 \text{ ms}$

• LIVELLO SONORO in dB; assunto che la soglia minima di udibilità $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ nell'aria

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow B = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 10^6 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ dB}$$