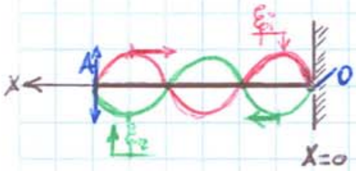
12 giugno 2007 martedì - FISICA 2 - prof. MORESCO MAURIZIO h 18:15 ÷ h 19:15

ONDE STAZIONARIE CORDA TESA

Lezione n° 18 di 20

Ritorniamo allo studio delle corde, abbiamo visto che l'equazione dell'onda, che diremo ONDA INCIDENTE i, è ben descritta dalla legge $\xi_i(x,t) = \xi_0 \sin(\omega t)$.
Tutto ciò va bene fino a quando l'onda viene emessa, si propaga e non trova vincoli od ostacoli; se ora ipotizziamo la corda abbia la estremità opposta alla sorgente fissata ad un muro, ciò costituisce un vincolo ove per forza di cose l'onda "si annulla"



$$\xi(x,t) \stackrel{?}{=} \xi_i(x,t) \rightarrow \xi(0,t) \stackrel{?}{=} \xi_i(0,t) = \xi_0 \sin(\omega t) = 0$$

e potrebbe non essere sufficiente la sola equazione $\xi_i(x,t)$ a descrivere esattamente la funzione d'onda $\xi(x,t)$; pensa al semplice caso in cui si pone come origine asse $x=0$ nel punto O ove per forza deve risultare $\xi(0,t)=0$

Ecco qui nasce la necessità di descrivere la funzione d'onda come combinazione lineare delle due funzioni armoniche

$\xi_i(x+vt)$ onda incidente, nel senso che si propaga "VERSO IL VINCOLO" (contraria ad x)
$\xi_2(x-vt)$ onda riflessa, nel senso che si propaga "ALLONTANANDOSI DAL VINCOLO"

$$\xi(x,t) = A\,\xi_i(x+vt) + B\,\xi_2(x-vt)$$

la presenza dell'armonica $\xi_2(x-vt)$ riflessa mi assicura di poter soddisfare la soluzione $\xi(0,t)=0$ mi serve

Continuando con l'esempio esposto si trova che onda incidente ed onda riflessa DEVONO avere stessa ampiezza, infatti sviluppando semplicemente i calcoli

$$\xi(0,t) = \xi_{0i} \sin(\omega t) + \xi_{02} \sin(-\omega t) = \xi_{0i} \sin(\omega t) - \xi_{02} \sin(\omega t) = (\xi_{0i} - \xi_{02}) \sin(\omega t) = 0$$

ma per aver certamente zero SEMPRE deve essere $\xi_{0i} - \xi_{02} = 0 \rightarrow$ $\xi_0 = \xi_{0i} = \xi_{02}$
Ecco che il risultato esteso,

$$\left.\begin{array}{l}\xi_i = \xi_0 \sin(Kx+\omega t) = \text{incidente} \\ \xi_2 = (+)\,\xi_0 \sin(Kx-\omega t) = \text{riflessa}\end{array}\right\} \quad \xi(x,t) = \xi_i + \xi_2 = \xi_0 \left[\sin(\underbrace{Kx+\omega t}_{\alpha}) + \sin(\underbrace{Kx-\omega t}_{\beta})\right]$$

nel punto $x=0$ le due onde si combinano ed assicurano $\xi(0,t)=0$ un'ampiezza nulla.

Ricorrendo ora alle formule di PROSTAFERESI già note come $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
ove si pone

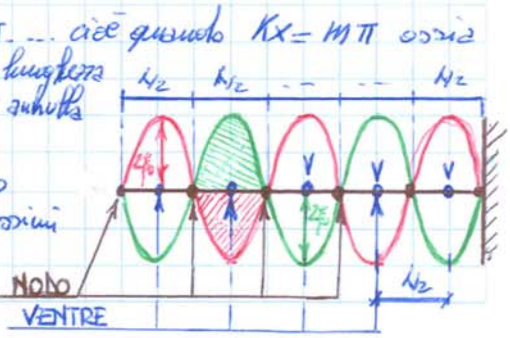
$$\alpha = Kx + \omega t$$
$$\beta = Kx - \omega t$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = 2Kx \\ \alpha-\beta = 2\omega t\end{array}\right\}$$

ricaviamo l'ulteriore passaggio $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin(Kx)\cos(\omega t)$ che non mi avvicina alle equazioni del tipo $f(x-vt)$ oppure $f(x+vt)$ ma pone in evidenza un fatto: detto $A(x) = 2\xi_0 \sin(Kx)$

$$\xi(x,t) = A(x)\cdot\cos(\omega t) \qquad \text{ONDA STAZIONARIA}$$

La funzione d'onda si propaga nel tempo in modo armonico e pulsazione costante ω
la funzione d'onda si propaga nello spazio non in modo armonico: l'ampiezza $A(x)$ dipende dalla posizione x

Accade che $A(x)=0$ se $x=0$ ma non solo anche in $2\pi, 3\pi, 4\pi \ldots$ cioè quando $Kx = m\pi$ ossia
$Kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = m\pi$ $\boxed{x = m\frac{\lambda}{2}}$ $m = 0,1,2,3\ldots$ NODI cioè ogni mezza lunghezza d'onda $\lambda/2$ l'onda si annulla

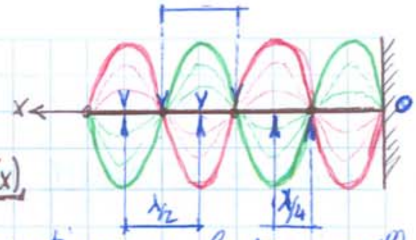


Accade che $\cos(\omega t)$ variando da $1 \rightarrow 0$ fa variare l'onda da $2\xi_0 \rightarrow 0$ mentre variando da $0 \rightarrow (-)1$ la fa variare da $0 \rightarrow (-)2\xi$, i massimi di oscillazione $\pm 2\xi_0$ si hanno per $Kx = 1$ e si dicono
$Kx = 1$ = VENTRE

Riassumendo

- la distanza tra due ventri adiacenti vale $\lambda/2$
- la distanza tra due nodi adiacenti vale $\lambda/2$
- la distanza tra un nodo ed un ventre vale $\lambda/4$

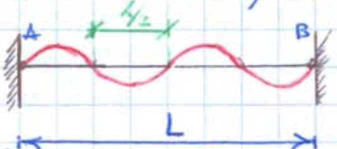
$$\left.\right\} \quad x = m\frac{\lambda}{2} \qquad A(x) = 2\xi_0 \sin(Kx)$$



$\xi(x,t) = A(x)\cos(\omega t)$ = ONDA STAZIONARIA la quale assicura che tutti i punti compiono la stessa oscillazione anche se in istanti diversi, e non c'è nessun punto sempre fermo

CORDA TESA CON ENTRAMBE GLI ESTREMI FISSI

È questa una configurazione realizzata in tutti gli strumenti musicali a corde e, se guardo al II° punto da fissare (non l'origine due $x=0$) e questo coincide con un nodo nulla cambia, diversamente se prendo altro punto le cose stanno come segue:



i due vincoli impongono che in essi l'equazione d'onda si annulli $\xi(A,t) = \xi(B,t) = 0$; ciò significa che lunghezza d'onda λ e lunghezza L del filo devono stare in un rapporto numerico intero e definito $\frac{L}{\lambda} \in \mathbb{N}$

Nel caso specifico ricordando che tra due nodi successivi passa una distanza di $\lambda/2$

$L = m\frac{\lambda}{2}$ cioè non tutte le lunghezze d'onda vanno bene, ma solo $\boxed{\lambda = \frac{2L}{m}}$ $m = 1, 2, 3, \ldots$

In termini matematici, questo problema è noto come ricerca degli autovalori di un sistema, le lunghezze d'onda λ sono gli autovalori del sistema e dunque la sua soluzione; per noi è qui necessario ritenere l'equazione rappresentata.

Chiaro che per $m = 1, 2, 3, \ldots$ ottengo una serie discreta di lunghezze d'onda, dirò che

- se $m=1 \rightarrow \lambda$ è la I^a armonica, o frequenza fondamentale
- se $m=2 \rightarrow \lambda$ è la II^a armonica
- ...
- se $m=4 \rightarrow \lambda$ è la IV^a armonica

e così via; nel caso delle corde poi è più interessante operare con le frequenze F piuttosto che con la lunghezza d'onda, si trova così

$$F = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{v}{F} = \frac{2L}{m} \rightarrow \boxed{F = m\frac{v}{2L}} = \boxed{m\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m_l}}} \qquad m = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

e trattandosi di una corda sola $v = \sqrt{\frac{T}{m_l}}$

Per la frequenza fondamentale scrivo

$$\boxed{F_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m_l}}}$$

e considerando come posso variare la frequenza f_1 dal II° membro vedo che lo posso fare se:

- modifico la lunghezza della corda L; esempio chitarra: con il dito blocco la corda in un punto intermedio
- modifico la massa m_l della corda; esempio chitarra: impiego delle corde con diverso diametro ϕ
- modifico la tensione T della corda; esempio chitarra: registro la tensione con la chiave di serraggio

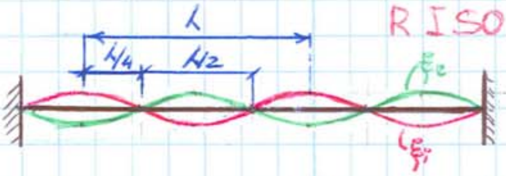
Porre bene attenzione al caso appena esposto delle corde con entrambe gli estremi fissati perchè nella II^a prova potrebbe esserci un esercizio sull'argomento

ESERCIZIO n° 16.14 pagina 481

In una corda tesa esiste un'onda stazionaria rappresentata dall'equazione $y(x,t) = 0{,}5 \sin(0{,}2x)\cos(300t)$, dove le lunghezze sono date in cm ed il tempo in secondi. Calcolare:

a) la lunghezza d'onda λ
b) la frequenza $\nu = f$
c) la velocità v delle onde trasversali sulla corda
d) la lunghezza L della corda se essa vibra nella IV^a armonica

RISOLVO



L'equazione d'onda di una corda tesa vale

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin(Kx)\cos(\omega t)$$

se "sovrapponiamo" l'equazione del testo $\doteq 0{,}5 \sin(0{,}2x)\cos(300t)$ si ricava subito

$2\xi_0 = 0{,}5$ $\qquad \xi_0 = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$ cm ← attenzione $= 2{,}5\cdot 10^{-3}$ m

$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}2$ $\qquad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi = 31.4$ cm $\rightarrow$ 0.314 m $\longrightarrow K = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20\ m^{-1}$

$\omega = 300$ rad/s

Con la pulsazione ω è immediato calcolare la frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\cancel{300}^{150}}{\cancel{2}\pi} \simeq 47.75$ Hz

Mentre per la velocità si possono seguire 2 modi

1) $\omega = Kv = \frac{2\pi}{\lambda} v \longrightarrow v = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega\, 2\pi}{2\pi\, 0{,}2} = 5\omega = 1500$ cm/s $=$

2) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{\lambda} v \frac{1}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \rightarrow v = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{0{,}2} = 5\,\omega = 1500$ cm/s $=$ $\boxed{v = 15\ m/s}$

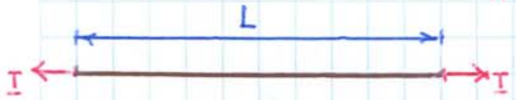
Se la corda vibra con la IV^a armonica λ ed L devono stare nel rapporto $\lambda = \frac{2L}{m}$ ove $m = 4$, cioè ho 4 nodi, 4 ventri distanti rispettivamente $\lambda/2$

$$L = \frac{m\lambda}{2} = \frac{\cancel{2}4\; 2\pi}{\cancel{2}\; 0{,}2} = \frac{4\pi}{0{,}2} = 20\pi = 62{,}83\ cm = 0{,}63\ m$$

ESERCIZIO n° 16.15 pagina 482

Una corda lunga $L = 50$ cm ha una massa per unità di lunghezza $\rho_\ell = 20\cdot 10^{-5}$ kg/m. Calcolare la tensione T a cui deve essere tesa la corda affinché la frequenza fondamentale sia rispettivamente $\nu_1 = 50$ Hz e $\nu_2 = 1000$ Hz

RISOLVO



La relazione che lega frequenza e tensione in una corda con gli estremi entrambe fissati si scrive come

$$f = m\frac{v}{2L} = \frac{m}{2L}\sqrt{\frac{T}{m_\ell}}$$

nel nostro caso $m = 1$ ed $\rho_\ell = m_\ell$, mentre f è la frequenza assegnata

$$T = m_\ell\,(f2L)^2 = \begin{cases} T_1 = 20\cdot 10^{-5}\,(50\times 2\times 0{,}5)^2 = \boxed{T_1 = 0.5\ N} \\ T_2 = 20\cdot 10^{-5}\,(1000\times 2\times 0{,}5)^2 = \boxed{T_2 = 200\ N} \end{cases}$$

aumentare di $\frac{f_2}{f_1} = 20$ volte la frequenza significa aumentare di $20^2 = 400 = \frac{200}{0{,}5}$ volte la tensione

Per casa fare fare i seguenti esercizi: pagina 481 n° 16.4 ÷ 16.8
" 482 n° 16.16 – 16.17 – 16.21 – 16.22 – 16.23

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Nel caso delle onde elettromagnetiche la sorgente è un sistema di cariche accelerate opportunamente, le quali producono $\begin{cases} \text{un campo elettrico } \underline{E} = (E_x, E_y, E_z) \\ \text{un campo magnetico } \underline{B} = (B_x, B_y, B_z) \end{cases}$

L'esistenza delle onde elettromagnetiche fu prevista da Maxwell il quale dimostrò come in effetti esse siano contenute nelle equazioni integrali, valide nello spazio vuoto senza cariche e senza correnti; dobbiamo dunque partire dalle 4 equazioni note

denominazione	Forma integrale	Forma locale o differenziale	SPAZIO VUOTO $\rho=0$ SENZA CARICHE CORRENTI $q=0 \rightarrow J=0$
LEGGE di GAUSS	$\oint_S \underline{E}\, \underline{u}_n\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\text{div}\, \underline{E} = \frac{q}{\varepsilon}$	$\text{div}\, \underline{E} = 0$
AUTOFLUSSO c.m	$\oint_S \underline{B}\, \underline{u}_n\, ds = 0$	$\text{div}\, \underline{B} = 0$	$\text{div}\, \underline{B} = 0$
LEGGE di FARADAY	$\oint_l \underline{E}\, d\underline{s} = (-)\frac{d}{dt}\int_{S(l)} \underline{B}\, \underline{u}_n\, ds$	$\text{rot}\, \underline{E} = (-)\frac{d\underline{B}}{dt}$	$\text{rot}\, \underline{E} = (-)\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$
LEGGE DI AMPERE-MAXWELL	$\oint_l \underline{B}\, d\underline{s} = \mu_0 \int_{S(l)} \left(\underline{J} + \varepsilon_0 \frac{d\underline{E}}{dt}\right) \underline{u}_n\, ds$	$\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\underline{E}}{dt}$	$\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\underline{E}}{dt}$

Ricordiamo qui, senza entrare nel dettaglio, che matematicamente parlando

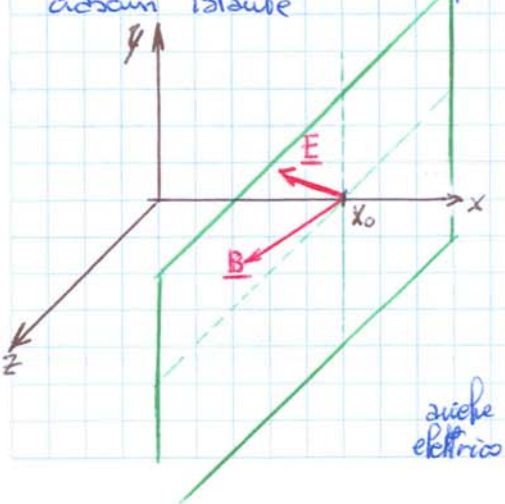
$$\text{div}\, \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \text{div}\, \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}\, \underline{E} = \begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \underline{u}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) (-)\, \underline{u}_y\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \underline{u}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\text{rot}\, \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underline{u}_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) (-)\, \underline{u}_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) + \underline{u}_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

Nello spazio vuoto non vi è densità di carica $\rho = 0$
Nello spazio senza cariche correnti $\underline{J} = 0$

Con tali premesse ci prefiggiamo di determinare un'equazione limitatamente al caso piano ossia fissata una certa direzione di propagazione orientata come x, il campo elettrico $\underline{E}(x,t)$ ed il campo magnetico $\underline{B}(x,t)$ risultano costanti nel piano yz in ciascun istante



Ecco subito che con tale ipotesi $E(x,0,0,t)$

$$\text{div}\, \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{\to 0} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

mentre per il campo magnetico $\underline{B}(x,0,0,t)$

$$\text{div}\, \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial z}}_{\to 0} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

anche se l'onda elettromagnetica si propaga lungo l'asse x, il campo elettrico $\underline{E}(x,t)$ e quello magnetico $\underline{B}(x,t)$ hanno qui componente nulla

I^a CARATTERISTICA: le onde elettromagnetiche piane sono **ONDE TRASVERSALI** rispetto alla direzione di propagazione -

$$\underline{E}(x,t) = E_y(x,t)\underline{u}_y + E_z(x,t)\underline{u}_z$$

$$\underline{B}(x,t) = B_y(x,t)\underline{u}_y + B_z(x,t)\underline{u}_z$$

Se ora applico la legge di FARADAY da $\text{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ si ottiene che

$$\begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = \underline{u}_x\cancel{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)} (-)\underline{u}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \underline{u}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = \cancel{(-)\frac{\partial B_x}{\partial t}} (-)\frac{\partial B_y}{\partial t}\underline{u}_y (-)\frac{\partial B_z}{\partial t}\underline{u}_z$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \; ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = (-)\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

LEGGE FARADAY

Infine applicando AMPERE-MAXWELL $\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\underline{E}}{dt}$

$$\begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underline{u}_x\cancel{\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)} (-)\underline{u}_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + \underline{u}_z \frac{\partial B_y}{\partial x} = \cancel{\mu_0\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt}\underline{u}_x} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}\underline{u}_y + \mu_0\varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}\underline{u}_z$$

$$\frac{dE_x}{dt} = 0 \; ; \quad (-)\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} \; ; \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}$$

LEGGE AMPERE - MAXWELL

Questo è ciò che accade nelle ipotesi in cui ci siamo posti, ora dobbiamo introdurre in qualche modo l'equazione d'onda secondo l'espressione di d'Alambert $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$
Allo scopo se prendo la II^a di FARADAY e derivo rispetto ad x
se prendo la III^a di AMPERE-MAXWELL e derivo rispetto a t

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} &= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned}\right\}$$

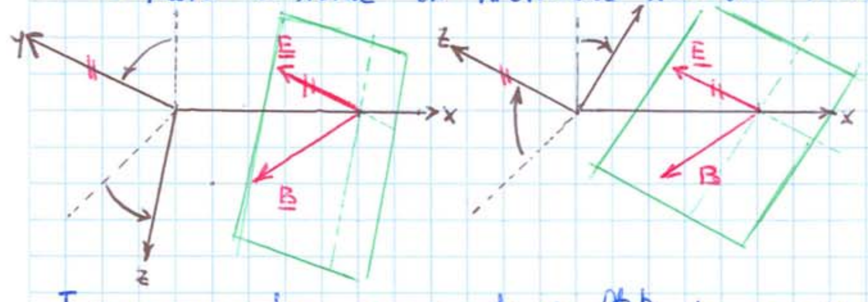
ricorrendo poi al teorema di Swartz per il quale

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}}$$

Ho così ritrovato effettivamente l'equazione di un'onda ove $v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ cioè l'onda elettromagnetica si propaga alla velocità della luce; il risultato portò MAXWELL ad ipotizzare che la luce stessa fosse un'onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico -

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}99792 \cdot 10^8 \, m/s}$$

Quanto detto è applicabile alla direzione di propagazione lungo l'asse x, se ora indaghiamo l'influenza di E_y ed E_z ma con un piccolo stratagemma
- ruoto la terna di riferimento tale che l'asse y = coincida con il campo elettrico $\underline{E}$
- ruoto la terna di riferimento tale che l'asse z = coincida con il campo elettrico $\underline{E}$



in tal modo trovo l'equazione d'onda rispettivamente lungo l'asse y e l'asse z con struttura uguale a quanto sopra e sempre che la sua velocità di propagazione è quella della luce c -

Torneremo a breve su questo risultato, per ora riconsideriamo i campi elettrici $\underline{E}(x,t)$ e magnetico $\underline{B}(x,t)$ che si propagano nel vuoto lungo l'asse x, nell'ipotesi che si tratti di onde armoniche con struttura del tipo $E_y = E_{0y} \sin(Kx - \omega t)$, dalla III^a componente della legge di FARADAY ricavo che

$$(-)\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = K E_{0y} \cos(Kx - \omega t) \longrightarrow \partial t \, (-)\frac{\partial B_z}{\partial t} = (-)\, dB_z = K E_{0y} \cos(Kx - \omega t)\, dt$$

$$B(z) = \int dB_z = (-) K E_{0y} \int \cos(Kx - \omega t)\, dt = (-) K_0 E_{0y} (-)\frac{1}{\omega} \sin(Kx - \omega t)$$

ecco che se $\boxed{\begin{array}{l} E_y = E_{0y}\sin(Kx-\omega t) \\ B_z = \left(\frac{K}{\omega}\right) E_{0y}\sin(Kx-\omega t)\end{array}}$ notiamo qui due cose che "legano" la propagazione del campo elettrico lungo la direzione y con la propagazione del campo elettrico lungo l'asse z

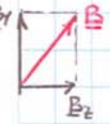
- le due onde <u>SONO IN FASE</u> perché hanno eguale E_{0y}
- dalla definizione di pulsazione $\omega = Kv \rightarrow v = K/\omega$

} perciò ne traiamo che

$B_z = \frac{1}{v}E_{0y}\sin(Kx-\omega t)$ $\qquad \frac{E_y}{v} = B_z \qquad (-)\frac{E_z}{v} = B_y$ $\qquad$ dove $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ è la velocità della luce nel vuoto

$B_y = (-)\frac{1}{v}E_{0z}\sin(Kx-\omega t)$

Come ci si poteva aspettare: campo elettrico e campo magnetico non sono indipendenti; se è noto uno dei due ed il mezzo in cui si propagano (quindi v) calcolo quello non noto; e ancora visto che



$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \left(-\frac{E_z}{v}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{v}\right)^2 = \frac{E_y^2+E_z^2}{v^2} = \frac{E^2}{v}$$

il modulo dei due vettori è uguale a meno del parametro v = velocità, ecco subito

$$\boxed{|\underline{B}| = \frac{|\underline{E}|}{v}}$$

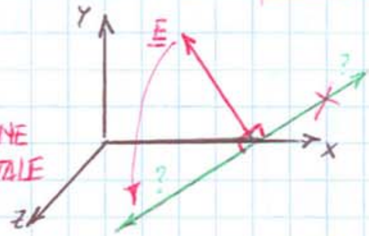
I^a RELAZIONE FONDAMENTALE "MODULO"

È questa la relazione che fornisce il modulo dei due vettori per la direzione se facciamo il loro prodotto scalare si ricava

$$\underline{E}\cdot\underline{B} = E_x \cdot B_x + E_y \cdot B_y + E_z \cdot B_z = 0\cdot 0 + E_y(-)\frac{E_z}{v} + E_z\frac{E_y}{v} = (-)\cancel{\frac{E_yE_z}{v}} + \cancel{\frac{E_yE_z}{v}} \longrightarrow \boxed{\underline{E}\cdot\underline{B} = 0}$$

II^a RELAZIONE FOND.^LE "ORTOGONALITÀ"

i due vettori sono tra loro ortogonali però dobbiamo ancora capire il verso in che rapporto stà_
Con il prodotto esterno risolviamo il problema



$$\underline{E}\times\underline{B} = EB\cos\frac{\pi}{2}\,\underline{u}_x \longrightarrow \boxed{\underline{E}\times\underline{B} = \frac{E^2}{v}\underline{u}_x}$$

III^a RELAZIONE FONDAMENTALE "VERSO"

Il prodotto esterno tra campo magnetico e campo elettrico ci dice che il risultato è parallelo all'asse di propagazione dell'onda elettromagnetica e vale la regola della vite destrorsa ove $\underline{E}$ si sovrappone a $\underline{B}$ ruotando in senso orario_