Elettrotecnica

13 Doppi bipoli di ordine uno

Doppi bipoli ideali di ordine uno

- governati da due semplici equazioni funzionali

$$F_1[v_1(t),v_2(t),i_1(t),i_2(t)]=0$$
$$F_2[v_1(t),v_2(t),i_1(t),i_2(t)]=0$$

contenti derivate temporale prime o integrali.

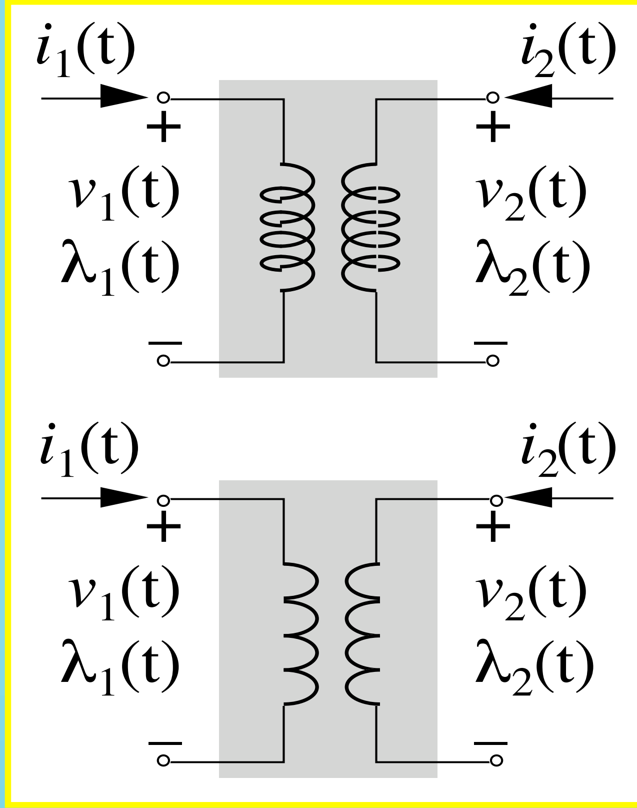
Il doppio bipolo di ordine uno più importante è il doppio bipolo induttivo: consideriamo solo lui.

Doppio bipolo induttivo ideale

E' il doppio bipolo di equazioni (convenzionato da utilizzatore a entrambe le porte):

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1\, i_1 + M\, i_2 \\ \lambda_2 = M\, i_1 + L_2\, i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_1\, \lambda_1 + \Gamma_M\, \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_M\, \lambda_1 + \Gamma_2\, \lambda_2 \end{cases}$$



L: autoinduttanze, M: mutua induttanza [H]

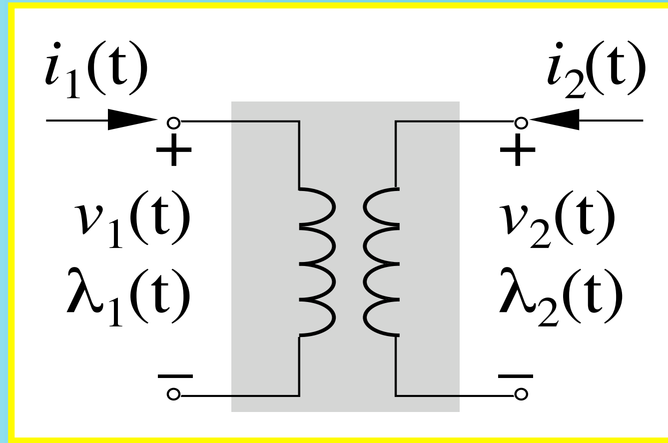
Γ: autoinertanze e mutua inertanza [H^{-1}]

Nel doppio bipolo induttivo ideale i parametri L, M e Γ sono costanti

Equazioni matriciali

Dalle precedenti:

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1\, i_1 + M\, i_2 \\ \lambda_2 = M\, i_1 + L_2\, i_2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} i_1 = \Gamma_1\, \lambda_1 + \Gamma_M\, \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_M\, \lambda_1 + \Gamma_2\, \lambda_2 \end{cases}$$



Si definiscono vettori e matrici

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_M \\ \Gamma_M & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}\, \boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{\Gamma}\, \boldsymbol{\lambda} \qquad \mathbf{L} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

Equazioni matriciali

Le relazioni tra parametri sono di tipo matriciale:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{\Delta L} \quad , \quad \Gamma_2 = \frac{L_1}{\Delta L} \quad , \quad \Gamma_M = -\frac{M}{\Delta L} \qquad \Delta L = L_1 L_2 - M^2$$

$$L_1 = \frac{\Gamma_2}{\Delta \Gamma} \quad , \quad L_2 = \frac{\Gamma_1}{\Delta \Gamma} \quad , \quad M = -\frac{\Gamma_M}{\Delta \Gamma} \qquad \Delta \Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 - {\Gamma_M}^2$$

Il doppio bipolo è reciproco

(=le matrici sono simmetriche)

Comportamento energetico -1

Lavoro elettrico infinitesimo entrante:

$$\mathrm{d}\mathsf{L} = p_1\,\mathrm{dt} + p_2\,\mathrm{dt} = i_1 v_1\,\mathrm{dt} + i_2 v_2\,\mathrm{dt} = i_1\,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2\,\mathrm{d}\lambda_2 =$$

$$= i_1\,\mathrm{d}\left(\mathrm{L}_1\, i_1 + \mathrm{M}\, i_2\right) + i_2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{M}\, i_1 + \mathrm{L}_2\, i_2\right) =$$

$$= i_1\left(\mathrm{L}_1\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{M}\,\mathrm{d}i_2\right) + i_2\left(\mathrm{M}\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{L}_2\,\mathrm{d}i_2\right) =$$

$$= \left(\mathrm{L}_1\, i_1\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{M}\, i_1\,\mathrm{d}i_2\right) + \left(\mathrm{M}\, i_2\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{L}_2\, i_2\,\mathrm{d}i_2\right) =$$

$$= \mathrm{L}_1\, i_1\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{M}\, i_1\,\mathrm{d}i_2 + \mathrm{M}\, i_2\,\mathrm{d}i_1 + \mathrm{L}_2\, i_2\,\mathrm{d}i_2$$

Comportamento energetico -2

Lavoro elettrico finito entrante (a partire da un istante t_o con correnti nulle: $i_1(t_o)=i_2(t_o)=0$):

$$\Delta L = \int_{t_o}^{t^*} p \, dt =$$

$$= \int_0^{i_1} L_1 \, i_1 \, d\, i_1 + \int_0^{i_2} L_2 \, i_2 \, d\, i_2 + \int_0^{i_1 \, i_2} M \, d(i_1 \, i_2) =$$

$$= \frac{L_1}{2} i_1^2 + \frac{L_2}{2} i_2^2 + M \, i_1 \, i_2$$

Comportamento energetico -3

ΔL è una funzione di stato di i_1 e i_2 (dei loro valori istantanei): nel processo opposto, quando i_1 e i_2 ritornano a 0, ΔL è reso (erogato)

⇨ il lavoro scambiato è conservativo

⇨ il lavoro elettrico assorbito dall'induttore immagazzinato in **energia induttiva** w_L

$$\Delta L = \Delta w_L$$

Comportamento energetico -4

$$\Delta L = \Delta w_L$$

n.b.: in Fisica la potenzialità di compiere lavoro è energia immagazzinata: lavoro erogato = decremento di energia immagazzinata; lavoro assorbito = incremento di energia immagazzinata.

n.b.: vale anche se L_1, L_2 e M non sono costanti (ma le espressioni di w_L risultano diverse), basta che sia

$i_1=i_1(\lambda_1,\lambda_2)$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 = \lambda_1(i_1,i_2)$

$i_2=i_2(\lambda_1,\lambda_2)$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = \lambda_2(i_1,i_2)$

Energia induttiva

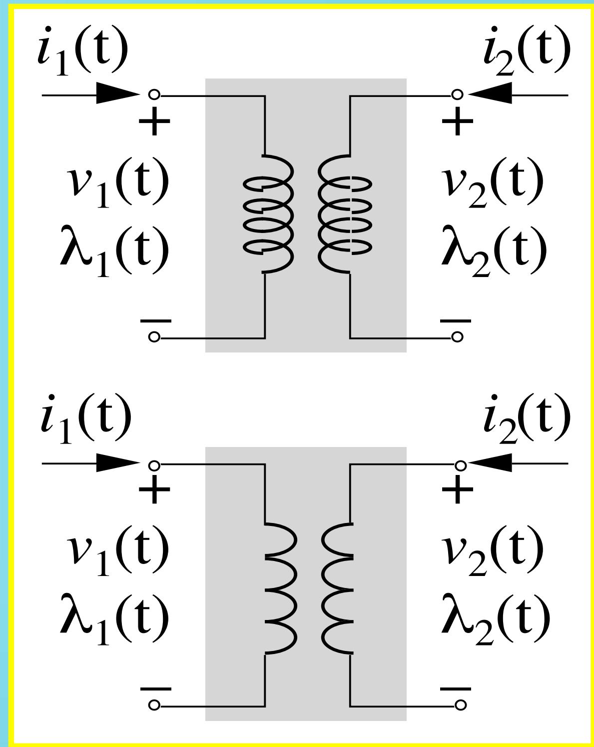
Per definizione è nulla quando $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$, quindi:

$$w_L = \Delta L = \frac{L_1}{2} i_1^2 + \frac{L_2}{2} i_2^2 + M\, i_1 i_2$$

Equazioni differenziali *v-i*

Derivando le relazioni del doppio bipolo induttivo ideale

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1\, i_1 + M\, i_2 \\ \lambda_2 = M\, i_1 + L_2\, i_2 \end{cases}$$



e ricordando che $v = d\lambda/dt$ si ottiene:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

relazioni differenziali lineari tra tensioni e correnti

Legami integrali

Inserendo le definizioni di λ in

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_1 \lambda_1 + \Gamma_M \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_M \lambda_1 + \Gamma_2 \lambda_2 \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} i_1(\mathrm{t}) = \Gamma_1 \int_{-\infty}^{t} v_1(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} + \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_2(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} \\ i_2(\mathrm{t}) = \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_1(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} + \Gamma_2 \int_{-\infty}^{t} v_2(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} \end{cases}$$

relazioni integrali lineari, ma scomode da usare

Legami integrali

Si preferisce iniziare da un istante t_o (in genere $t_o=0$) in cui $i_{10}=i_1(t_o)$ e $i_{20}=i_2(t_o)$ sono note. Spezzando gli integrali da -∞ a t in due parti, da -∞ a 0 e da 0 a t:

$$\begin{cases} i_1(\mathrm{t}) = i_1(0) + \Gamma_1 \int_0^{\mathrm{t}} v_1(\mathrm{t}')\,\mathrm{dt}' + \Gamma_\mathrm{M} \int_0^{\mathrm{t}} v_2(\mathrm{t}')\,\mathrm{dt}' \\ i_2(\mathrm{t}) = i_2(0) + \Gamma_\mathrm{M} \int_0^{\mathrm{t}} v_1(\mathrm{t}')\,\mathrm{dt}' + \Gamma_2 \int_0^{\mathrm{t}} v_2(\mathrm{t}')\,\mathrm{dt}' \end{cases}$$

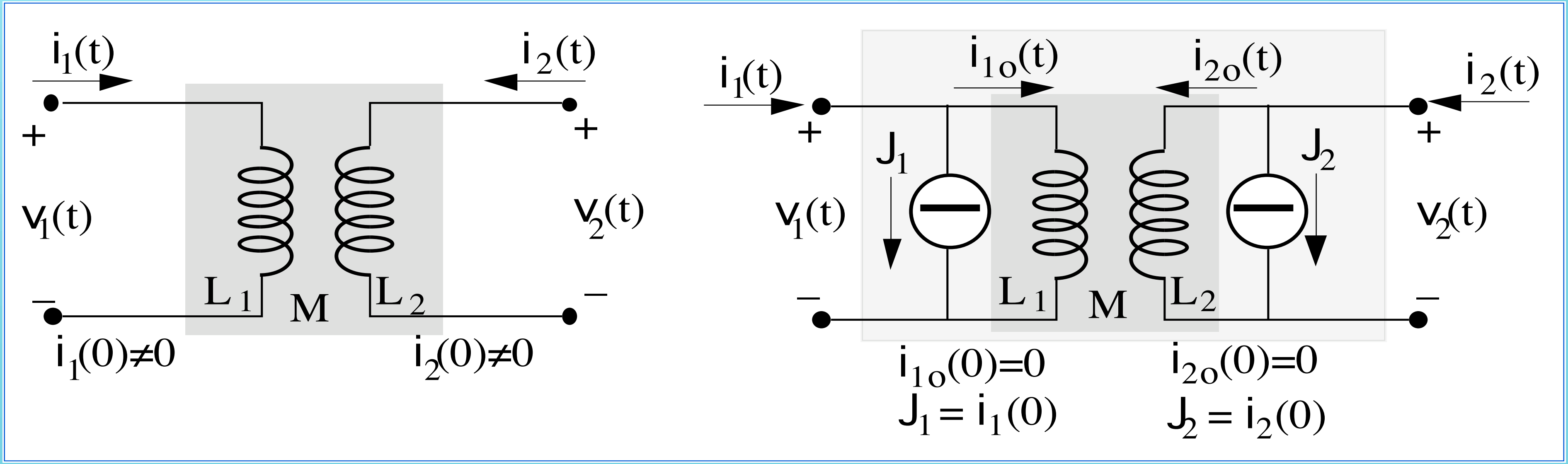
Tralasciamo per ora il caso che $i_1(\mathrm{t})$ e $i_2(\mathrm{t})$ siano discontinue in $t_o=0$.

$i_1(0)$ e $i_2(0)$ sono i dati o valori iniziali; se $i_1(0)\neq 0$ o $i_2(0)\neq 0$ le relazioni non sono lineari.

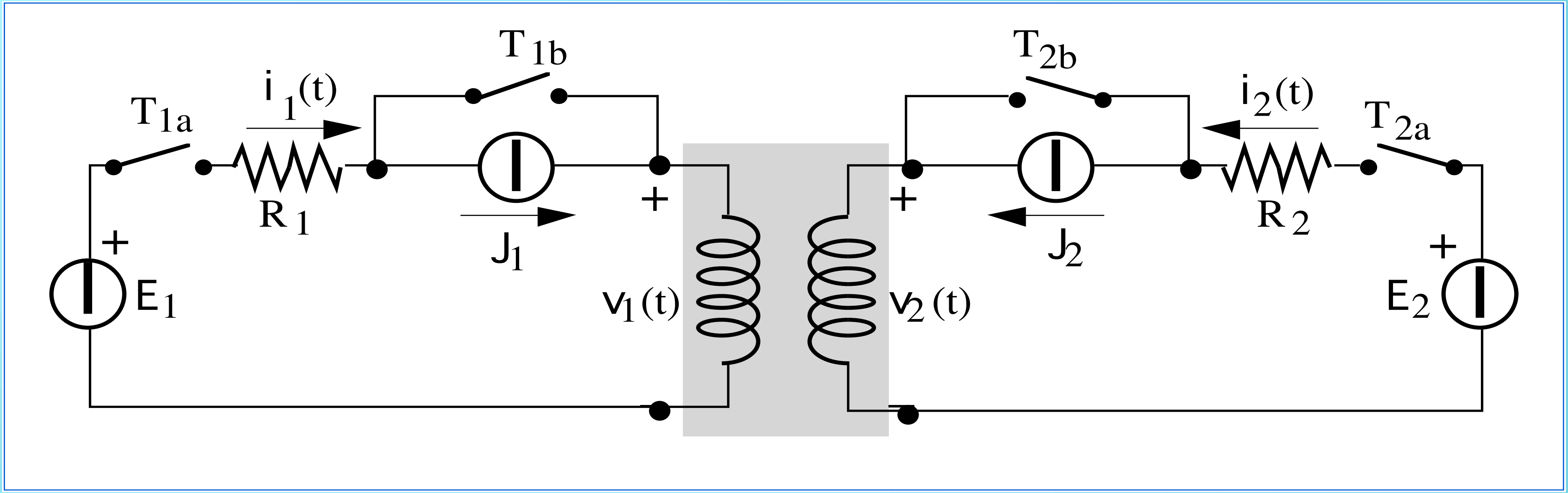
Circuito equivalente linearizzato

Quando servono relazioni lineari, può essere usato uno schema equivalente che linearizza le equazioni, come questo, ove il doppio bipolo induttivo è scarico

$$\begin{cases} i_{1o}(t) = \Gamma_1 \int_0^t v_1(t')dt' + \Gamma_M \int_0^t v_2(t')dt' \\ i_{2o}(t) = \Gamma_M \int_0^t v_1(t')dt' + \Gamma_2 \int_0^t v_2(t')dt' \end{cases}$$



Energia e reciprocità -1



$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} \qquad , \qquad J_2 = \frac{E_2}{R_2}$$

Ipotesi: M_{12} e M_{21} diversi. Inizialmente gli interruttori T_{1a} e T_{2a} sono aperti, T_{1b} e T_{2b} sono chiusi.

Energia e reciprocità -2

PRIMO PROCESSO DI CARICA

1) T_{1a} chiude; equazioni di rete:

$$i_2 = 0 \qquad \begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{d i_1}{dt} = E_1 - R_1 i_1 \\ v_2 = M_{21} \dfrac{d i_1}{dt} \end{cases}$$

Da cui

$$L_1 \frac{d i_1}{dt} + R_1 i_1 = E_1 \qquad \Rightarrow \qquad i_1(t) = \frac{E_1}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L_1}}\right)$$

$i_1(t)$ cresce da 0 fino al valore $I_1 = E_1/R_1 = J_1$

Energia e reciprocità -3

Lavoro assorbito nel processo 1):

$$L' = \int_{\Delta t_1} (i_1 v_1 + i_2 v_2)\, dt = \int_0^{I_1} L_1\, i_1\, d\, i_1 = \frac{1}{2} L_1\, I_1^{\,2}$$

2) T_{1b} apre ⇨ $i_1(t)$ resta costante: $i_1(t) = I_1 = J_1$

3) T_{2a} chiude; equazioni di rete:

$$i_1 = I_1 \qquad \begin{cases} v_1 = M_{12} \dfrac{d\, i_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{d\, i_2}{dt} = E_2 - R_2\, i_2 \end{cases}$$

Energia e reciprocità -4

Da cui

$$L_2 \frac{d i_2}{dt} + R_2 i_2 = E_2 \qquad \Rightarrow \qquad i_2(t) = \frac{E_2}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2 t}{L_2}}\right)$$

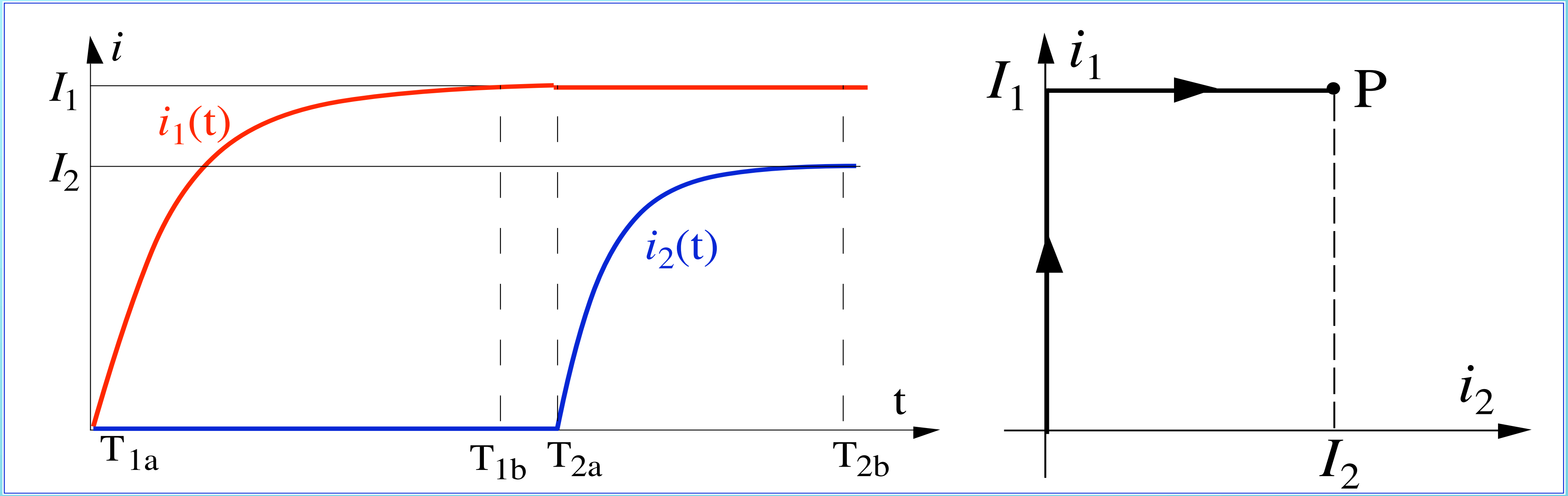
$i_2(t)$ cresce da 0 fino al valore $I_2 = E_2/R_2 = J_2$

Lavoro assorbito nel processo 3):

$$L'' = \int_{\Delta t_1} (i_1 v_1 + i_2 v_2)\, dt = \int_0^{I_2} (M_{12}\, I_1 + L_2 i_2)\, di_2 = M_{12}\, I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}$$

Energia e reciprocità -5

Evoluzioni temporali



Lavoro totale assorbito nel primo processo di carica = energia induttiva finale.

$$W_{La} = L = L' + L'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Energia e reciprocità -6

SECONDO PROCESSO DI CARICA

1) T_{2a} chiude; equazioni di rete:

$$i_1 = 0 \qquad \begin{cases} v_1 = M_{12}\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} = E_2 - R_2 i_2 \end{cases}$$

Da cui

$$L_2\frac{d\,i_2}{dt} + R_2\,i_2 = E_2 \qquad \Rightarrow \qquad i_2(t) = \frac{E_2}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2\,t}{L_2}}\right)$$

$i_2(t)$ cresce da 0 fino al valore $I_2 = E_2/R_2 = J_2$

Energia e reciprocità -7

Lavoro assorbito nel secondo processo 1):

$$\mathrm{L}' = \int_{\Delta t_1} (i_1 v_1 + i_2 v_2)\, \mathrm{dt} = \int_0^{I_2} \mathrm{L}_2\, i_2\, \mathrm{d}i_2 = \frac{1}{2} \mathrm{L}_2\, I_2^{\,2}$$

2) T_{2b} apre => $i_2(\mathrm{t})$ resta costante: $i_2(\mathrm{t}) = I_2 = J_2$

3) T_{1a} chiude; equazioni di rete:

$$i_2 = I_2 \qquad \begin{cases} v_1 = \mathrm{L}_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{dt}} = E_1 - \mathrm{R}_1\, i_1 \\[2ex] v_2 = \mathrm{M}_{21} \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{dt}} \end{cases}$$

Energia e reciprocità -8

Da cui

$$L_1 \frac{d i_1}{dt} + R_1 i_1 = E_1 \qquad \Rightarrow \qquad i_1(t) = \frac{E_1}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L_1}}\right)$$

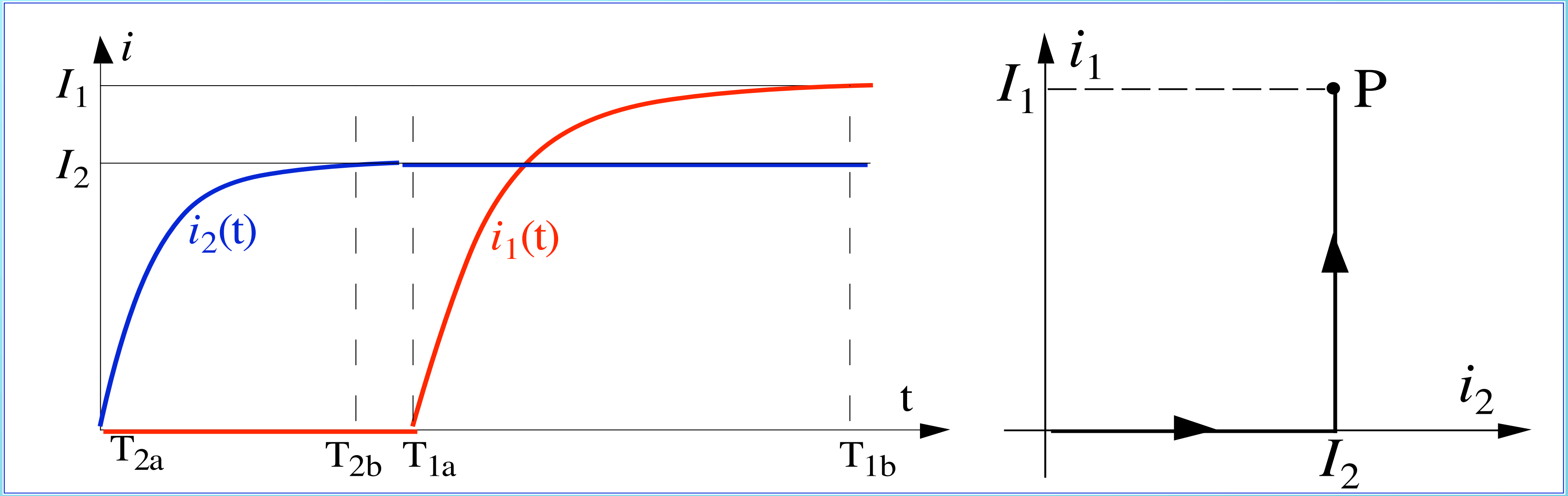
$i_1(t)$ cresce da 0 fino al valore $I_1 = E_1/R_1 = J_1$

Lavoro assorbito nel secondo processo 3):

$$L'' = \int_{\Delta t_1} (i_1 v_1 + i_2 v_2)\, dt = \int_0^{I_1} (L_1 i_1 + M_{21} I_2)\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_2 I_1$$

Energia e reciprocità -9

Evoluzioni temporali



Lavoro totale assorbito nel secondo processo di carica = energia induttiva finale:

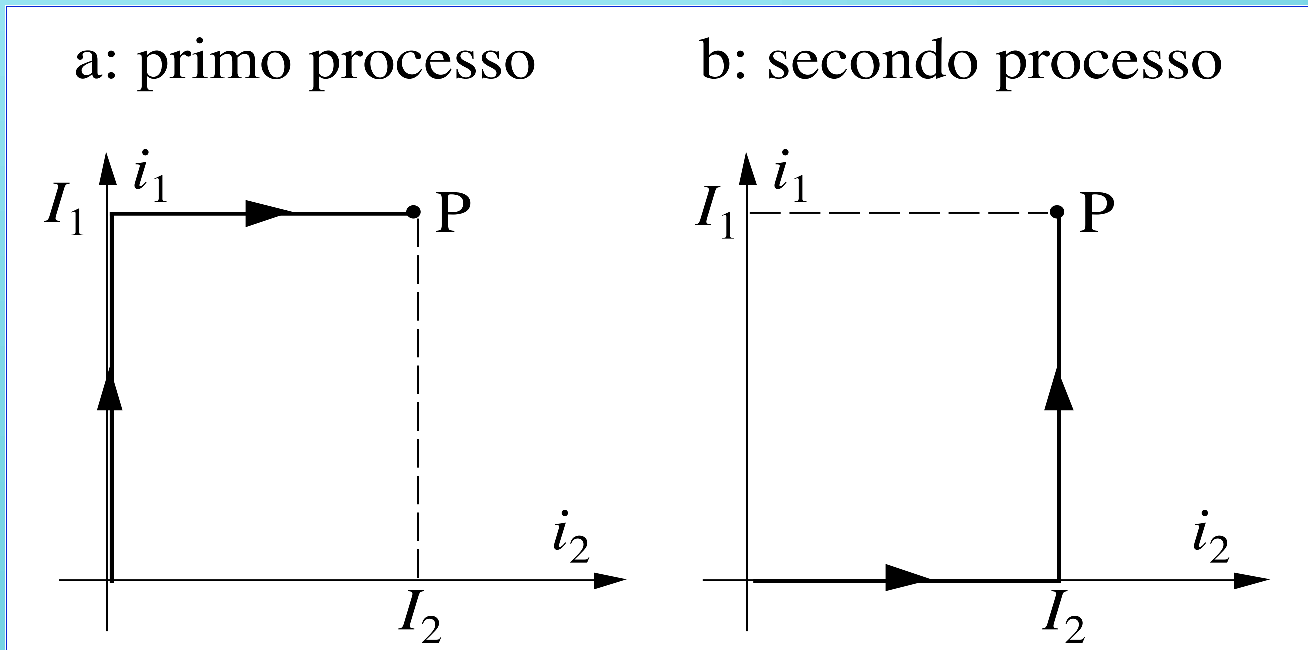
$$W_{Lb} = L = L' + L'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Energia e reciprocità -10

Quindi:

$$W_{La} = L = L' + L'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W_{Lb} = L = L' + L'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$



Energia e reciprocità -11

Ma l'energia induttiva deve essere funzione (di stato) dei valori finali delle correnti, indipendentemente dalla "strada" percorsa per arrivarvi:

$$W_{La}(I_1, I_2) = W_{Lb}(I_1, I_2)$$

quindi

$$M_{12} = M_{21}$$

il doppio bipolo induttivo, accumulatore perfetto di energia induttiva, è necessariamente reciproco.

Vincoli sui parametri -1

L'energia magnetica deve essere non negativa:

$$w_L = \frac{L_1}{2} i_1^2 + \frac{L_2}{2} i_2^2 + M\, i_1\, i_2 \geq 0$$

ne derivano vincoli sui 3 parametri L_1, L_2 e M:

1) Se $i_2 = 0$ => $L_1 \geq 0$
2) Se $i_1 = 0$ => $L_2 \geq 0$
3) Se $i_1 \neq 0$, $i_2 \neq 0$ => dividendo per i_2^2:

$$\frac{L_1}{2} x^2 + M\, x + \frac{L_2}{2} \geq 0$$

Vincoli sui parametri

È l'equazione di una parabola, ≥0 con discriminante ≤ 0

$$M^2 - 4\frac{L_1}{2}\frac{L_2}{2} \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{L_1 L_2} \ge |M|$$

Quindi ogni doppio bipolo induttivo verifica 3 condizioni:

1) $L_1 \ge 0$

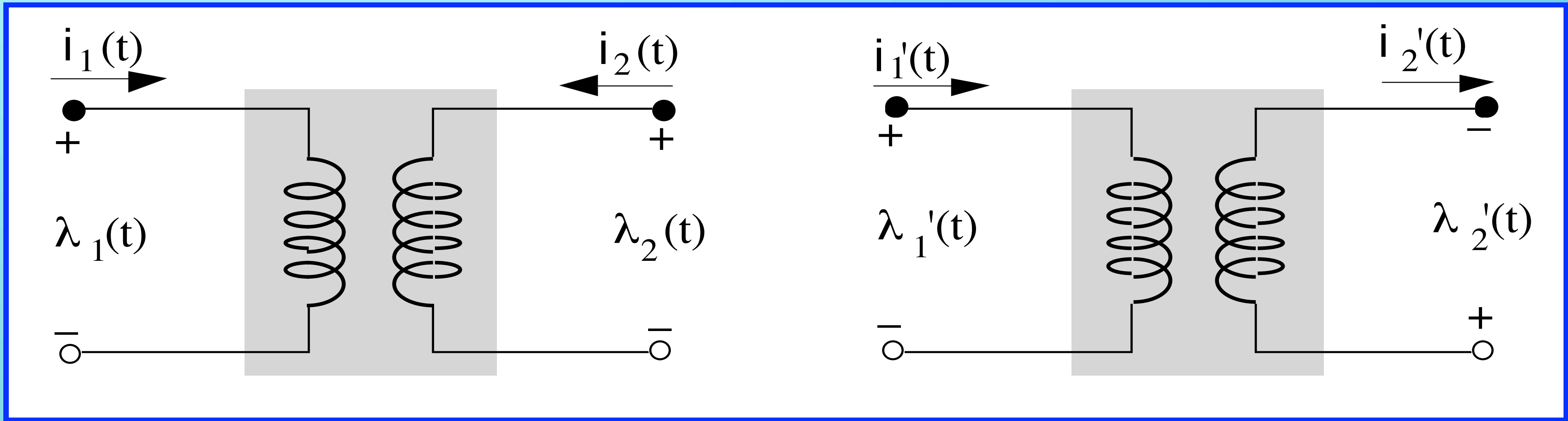
2) $L_2 \ge 0$

$\sqrt{L_1 L_2} \ge |M|$

3)

SEGNO DI M -1

M può essere >0 o <0 (o = 0):
cambiando i riferimenti di $v(\mathrm{t})$ e $i(\mathrm{t})$ di una stessa porta M inverte il segno.



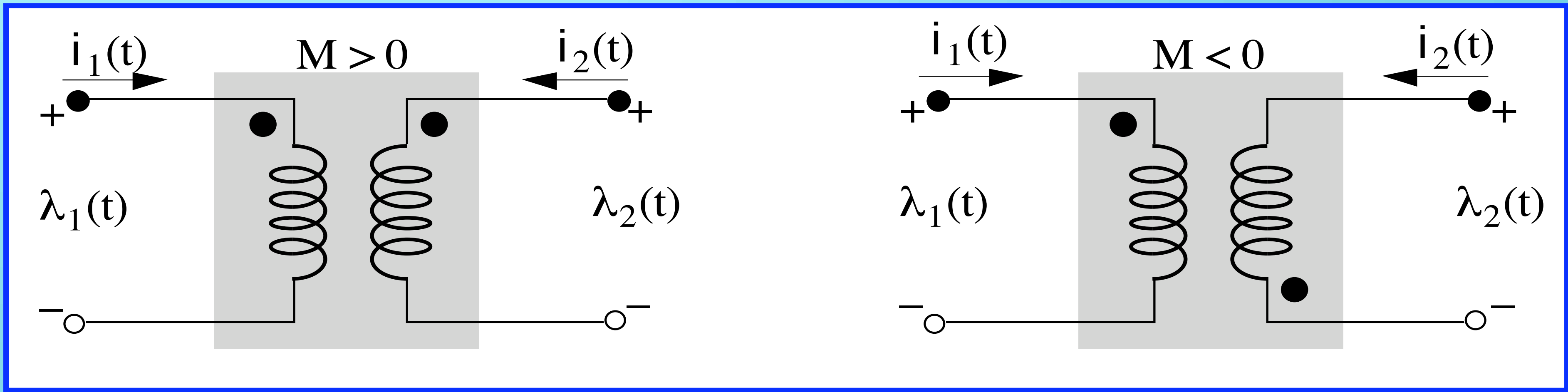
$$M > 0 \quad \Rightarrow \quad M < 0$$

o viceversa

SEGNO DI M -2

Per individuare il segno si usano due punti:

$M > 0$ se le frecce delle correnti sono entrambe entranti o entrambe uscenti dai morsetti coi punti (e viceversa)



Coefficiente di accoppiamento

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad \Rightarrow \qquad -1 \le k \le 1$$

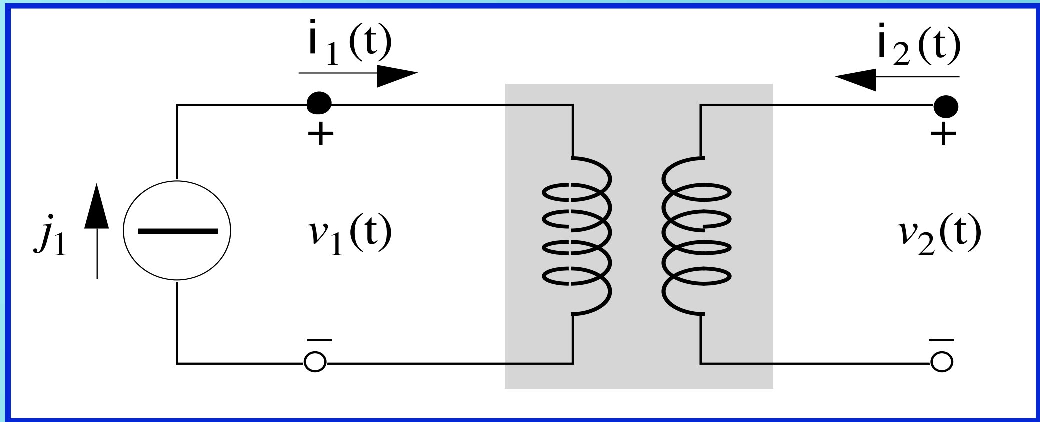
$k = \pm 1$: accoppiamento perfetto
(porte perfettamente accoppiate)

$k = 0$: accoppiamento nullo
(porte disaccoppiate)

Amplificazione -1

Alimentando una sola porta con generatore di corrente

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{dj}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{dj}{dt} \end{cases}$$



facendo il rapporto e prendendo il modulo:

$$|v_2| = \frac{|M|}{L_1} |v_1|$$

se $|M| > L_1$ ⇨ $|v_2| > |v_1|$

Amplificazione -2

se $|M| > L_1$ ⇨ $|v_2| > |v_1|$

Il bipolo che eroga non ha tensione massima in modulo

⇨ c'è amplificazione

⇨ i doppi bipoli induttivi possono amplificare

DOPPI BIPOLI INDUTTIVI CHE AMPLIFICANO:

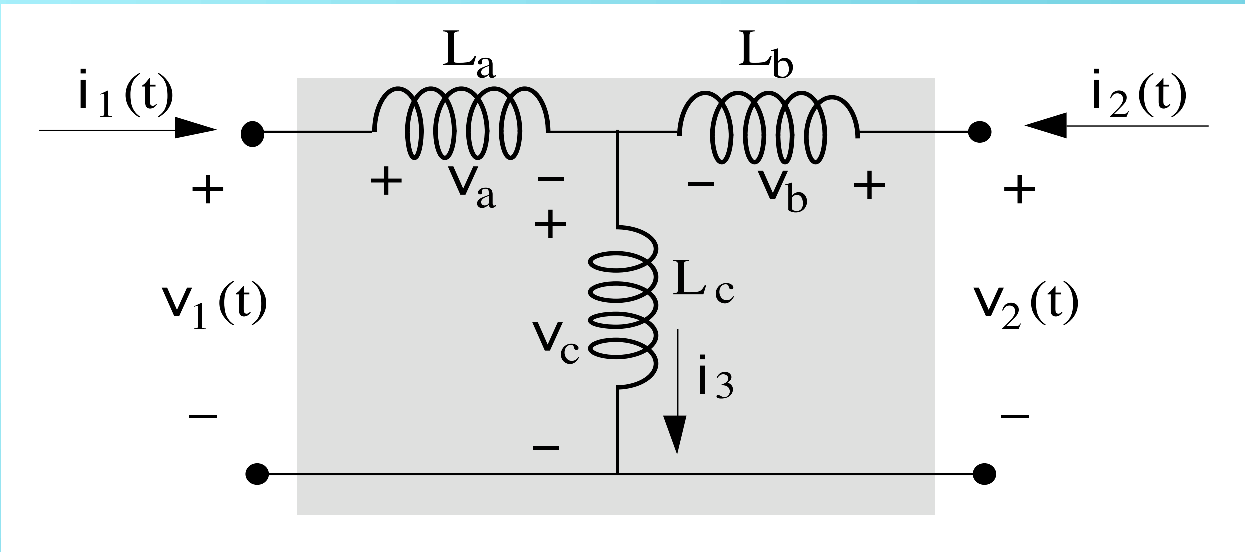
$L_1 < |M| < L_2$ oppure $L_2 < |M| < L_1$

DOPPI BIPOLI INDUTTIVI CHE NON AMPLIFICANO:

$|M| < L_2$ e $|M| < L_1$

Sintesi con induttori -1

SINTESI A T

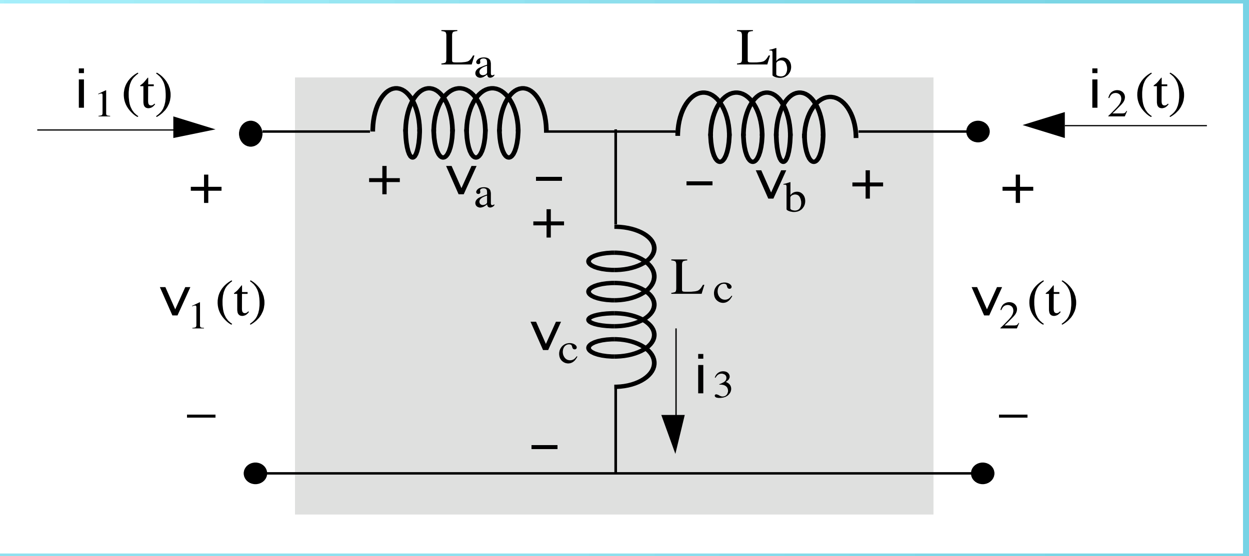


$M > 0$

$$\begin{cases} v_1(t) = L_a \dfrac{d i_1}{dt} + L_c \dfrac{d i_3}{dt} = (L_a + L_c)\dfrac{d i_1}{dt} + L_c \dfrac{d i_2}{dt} \\ v_2(t) = L_b \dfrac{d i_2}{dt} + L_c \dfrac{d i_3}{dt} = (L_b + L_c)\dfrac{d i_2}{dt} + L_c \dfrac{d i_1}{dt} \end{cases}$$

Sintesi con induttori -2

SINTESI A T



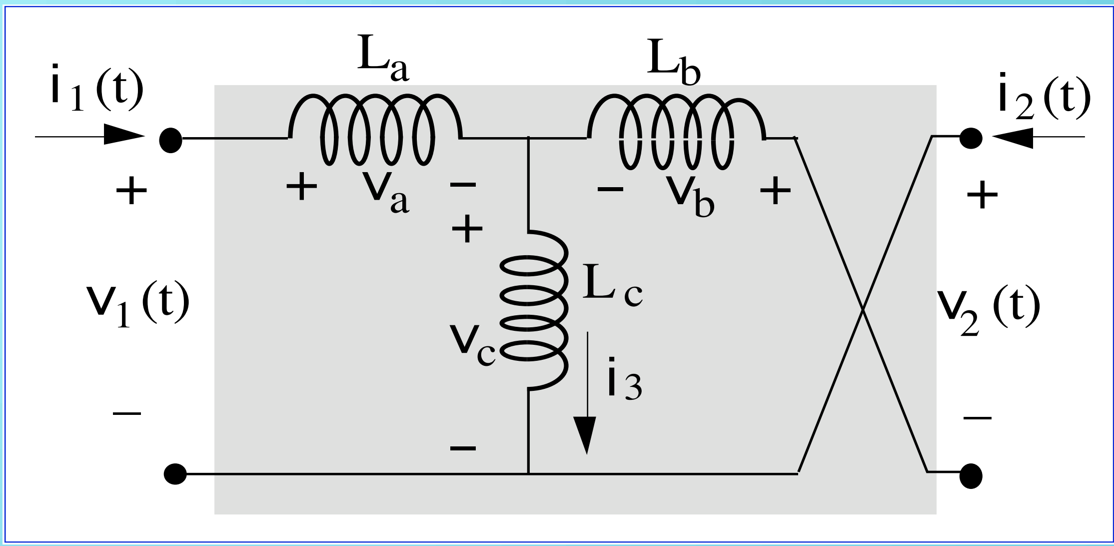
$M > 0$

$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_c \\ L_2 = L_b + L_c \\ M = L_c \end{cases} \qquad \begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

Sintesi con induttori -3

SINTESI A T

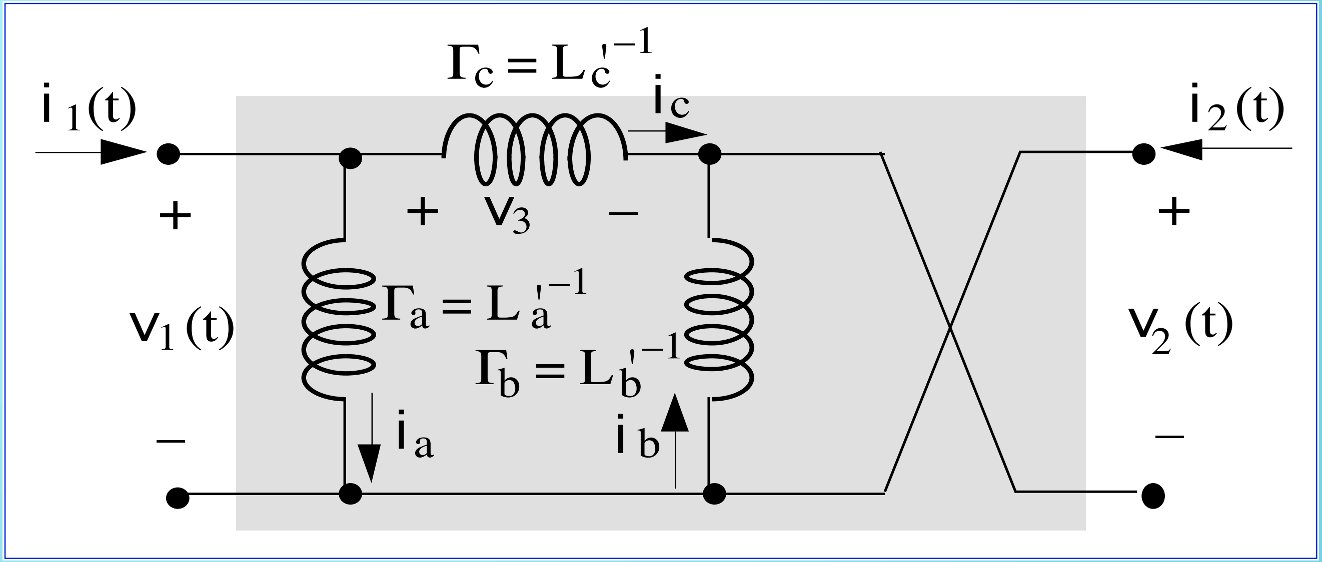
$M < 0$



$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_c \\ L_2 = L_b + L_c \\ M = L_c \end{cases} \qquad \begin{cases} L_a = L_1 + M \\ L_b = L_2 + M \\ L_c = -M \end{cases}$$

Sintesi con induttori -4

SINTESI A Π



$$M > 0 \quad (\Gamma_M < 0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{L_a'} = \Gamma_a = \Gamma_1 - \Gamma_M \\ \dfrac{1}{L_b'} = \Gamma_b = \Gamma_2 - \Gamma_M \\ \dfrac{1}{L_c'} = \Gamma_c = \Gamma_M \end{cases}$$

Sintesi con induttori -5

Funzionano se valgono le condizioni di non amplificazione: $|M| < L_2$ e $|M| < L_1$

Infatti una reti di induttori (= **bipoli** passivi) non può amplificare.

Sintesi con T.I. -1

ACCOPPIAMENTO PERFETTO

$$k = 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \pm\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

u = rapporto di trasformazione, da cui

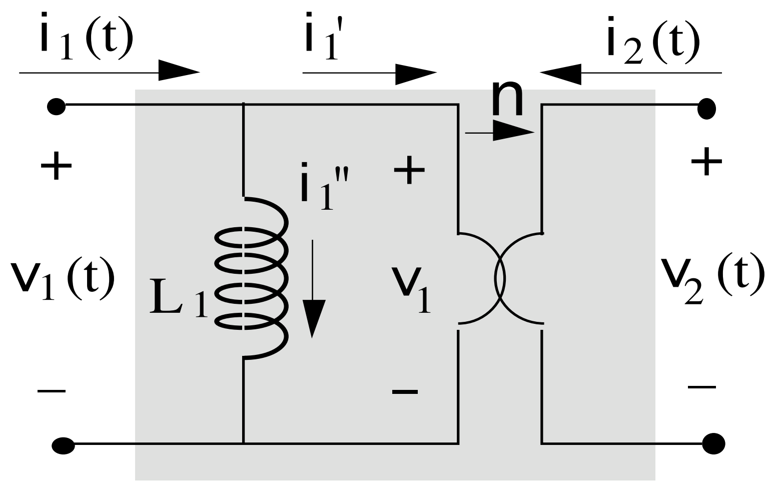
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} = L_1\left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{u}\dfrac{di_2}{dt}\right) \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} = M\left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{u}\dfrac{di_2}{dt}\right) \end{cases}$$

Sintesi con T.I. -2

Rapporto delle due e risoluzione in i_1 della prima:

$$\begin{cases} v_1(\mathrm{t}) = u\, v_2(\mathrm{t}) \\ i_1(\mathrm{t}) = -\dfrac{1}{u} i_2(\mathrm{t}) + \dfrac{1}{\mathrm{L}_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{t}} v_1(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} = i_1{'}(\mathrm{t}) + i_1{''}(\mathrm{t}) \end{cases}$$

$$\mathrm{n} = \mathrm{u} = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}_2}$$

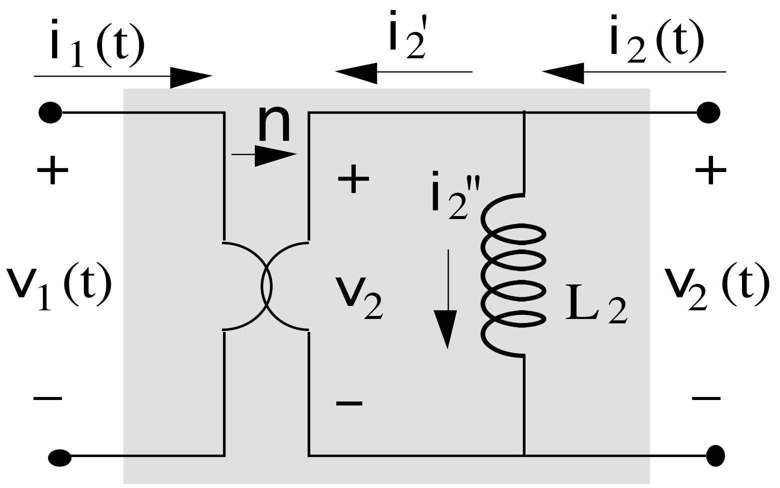


Sintesi con T.I. -3

Rapporto delle due e risoluzione in i_2 della prima:

$$\begin{cases} v_1(\mathrm{t}) = u\, v_2(\mathrm{t}) \\ i_2(\mathrm{t}) = -u i_1(\mathrm{t}) + \dfrac{1}{\mathrm{L}_2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{t}} v_2(\mathrm{t'})\,\mathrm{dt'} = i_2'(\mathrm{t}) + i_2''(\mathrm{t}) \end{cases}$$

$$\mathrm{n} = \mathrm{u} = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}_2}$$



Sintesi con T.I. -4

ACCOPPIAMENTO IMPERFETTO

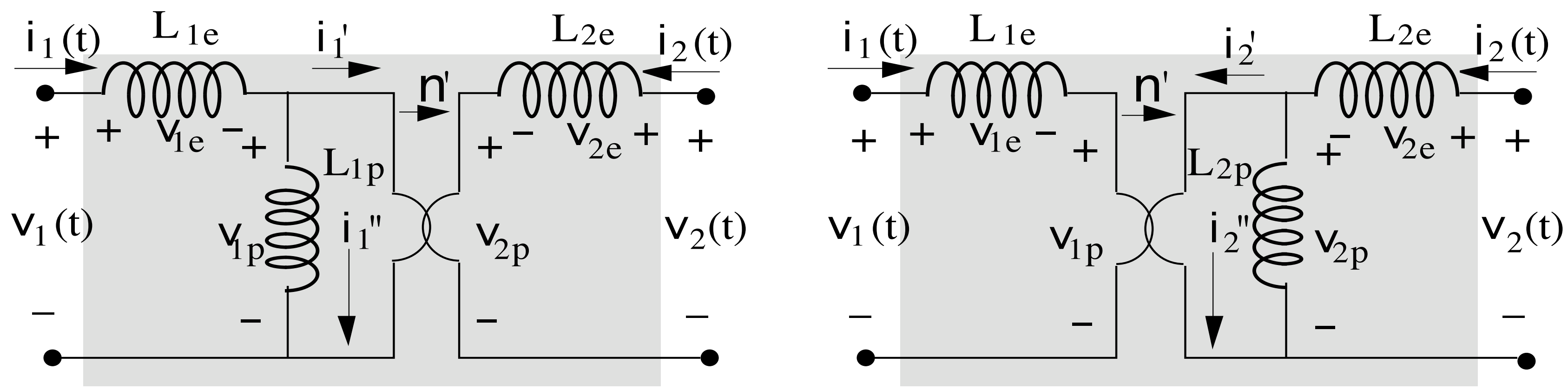
$$\begin{cases} L_1 = L_{1p} + L_{1e} \\ L_2 = L_{2p} + L_{2e} \\ M^2 = L_{1p} L_{2p} \end{cases}$$

L_{1e} e L_{2e} = induttanze eccedenti rispetto ai valori di accoppiamento perfetto L_{1p} e L_{2p} ; rapporto di trasformazione:

$$u' \stackrel{\Delta}{=} \frac{L_{1p}}{M} = \frac{M}{L_{2p}} = \pm\sqrt{\frac{L_{1p}}{L_{2p}}}$$

Sintesi con T.I. -5

$$\begin{cases} v_1 = (L_{1e} + L_{1p})\dfrac{d i_1}{dt} + M\dfrac{d i_2}{dt} = L_{1e}\dfrac{d i_1}{dt} + L_{1p}\left(\dfrac{d i_1}{dt} + \dfrac{1}{u'}\dfrac{d i_2}{dt}\right) \\ v_2 = M\dfrac{d i_1}{dt} + (L_{2e} + L_{2p})\dfrac{d i_2}{dt} = L_{2e}\dfrac{d i_2}{dt} + M\left(\dfrac{d i_1}{dt} + \dfrac{1}{u'}\dfrac{d i_2}{dt}\right) \end{cases}$$



$$n' = u' = \frac{L_{1p}}{M} = \frac{M}{L_{2p}}$$

Sintesi con T.I. -6

Negli schemi ci sono 4 parametri per verificare 3 vincoli (L_1, L_2 e M) ⇨ c'è 1 grado di libertà; si ottengono valori leciti per:

$$\frac{M}{L_2} \le u' \le \frac{L_1}{M}$$

$$u' = \frac{M}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L_{1p} = \dfrac{M^2}{L_2} = k^2 L_1 , & L_{1e} = L_1 - \dfrac{M^2}{L_2} = (1-k^2)L_1 \\ L_{2p} = L_2 , & L_{2e} = 0 \end{cases}$$

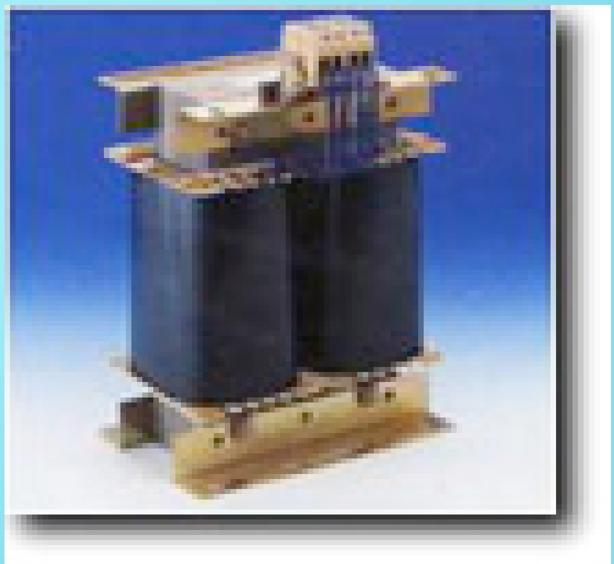
$$u' = \frac{L_1}{M} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L_{1p} = L_1 , & L_{1e} = 0 \\ L_{2p} = \dfrac{M^2}{L_1} = k^2 L_2 , & L_{2e} = L_2 - \dfrac{M^2}{L_1} = (1-k^2)L_2 \end{cases}$$

Sintesi con T.I. -7

Ma in genere si preferisce fissare u' uguale al rapporto spire (in modo che abbia senso fisico-sperimentale); così:

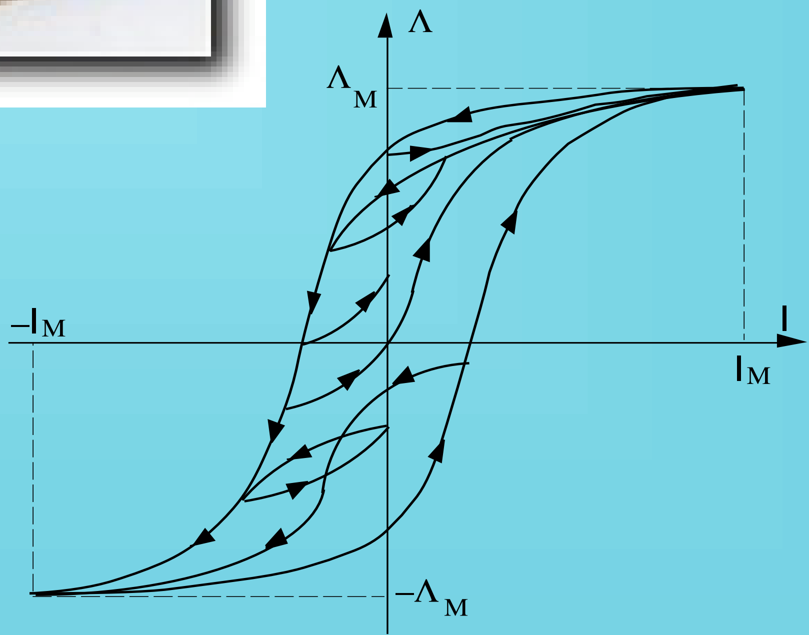
$$\begin{cases} L_{1p} = u'M, \qquad L_{1e} = L_1 - u'M \\ L_{2p} = \dfrac{M}{u'}, \qquad L_{2e} = L_2 - \dfrac{M}{u'} \end{cases}$$

Doppi bipoli induttivi reali trasformatori reali -1



Mutui induttori, trasformatori con nucleo ferromagnetico

Isteretici, non lineari, dissipativi



Doppi bipoli induttivi reali, trasformatori reali -2

Perdite: ohmiche negli avvolgimenti (descrivibili con 2 resistenze R_a e R_b in alle porte);

per isteresi e per correnti parassite nel nucleo (descrivibili con 1 resistenza R_o in parallelo all'induttanza "derivata").