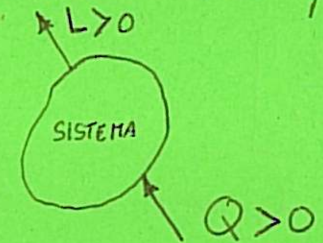
BRESSANONE 1 AGOSTO 2005 Trasmissione del calore

dalla definizione del calore Q definita come una energia la cui unità di misura è [J]. Prima di essere espresso in [J] era espresso in [Kcal]; ovvero preso un Kg di H_2O la Kcal è la quantità di calore che la portava dal 14,5 °C a 15,5 °C cioè per aumentare di un grado la temperatura della massa di un Kg di acqua. L'esperienza di Joule definisce che il calore come il lavoro sono una forma di energia. Non equivalenti dal punto di vista operativo ma metrologicamente sì. Il Lavoro è una energia più pregiata.

$$\boxed{1\,\text{Kcal} = 4186,7\ \text{J}}$$

Il primo principio della termodinamica non è altro che un principio di conservazione dell'energia.

Con L indico il lavoro e con Q la quantità di calore



Primo principio della termodinamica

tutta l'energia che il sistema acquisisce

$$\boxed{Q - L = E_2 - E_1}$$

Dentro all'energia E compaiono (mgz) potenziale E_p, $E_k = \left(\frac{1}{2} m V^2\right)_{\text{cinetica}}$

e inoltre vi è l'energia interna U

Quindi $E = E_p + E_k + U$

gas ideali $\boxed{dU = m\, c_v\, dT}$ c_v = calore specifico a volume costante

tutti i simboli scritti in minuscolo sono specifici, cioè la grandezza diviso la massa.

$$\boxed{du = c_v\, dT}$$

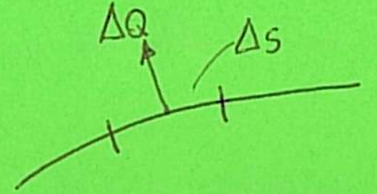
Dal punto di vista termometrico il calore è qualcosa che si scambia a causa di una diversità di temperatura. si scambia Q fino all'equilibrio termodinamico. Dove c'è una differenza di temperatura t c'è sempre uno scambio di Q e lo scambio viaggia dai punti a T maggiore ai punti a T minore.

Di solito si ha a che fare con la potenza

$$\boxed{q = \text{energia scambiata sull'unità di tempo}}$$

$$q = \frac{\partial Q}{\partial \tau} \qquad \left[\frac{J}{sec}\right] \overset{\text{che è}}{\Rightarrow} [W]$$

di solito abbiamo un sistema su cui si identifica una superficie ΔS



La potenza termica specifica $\bar{q} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta \tau \to 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau}$

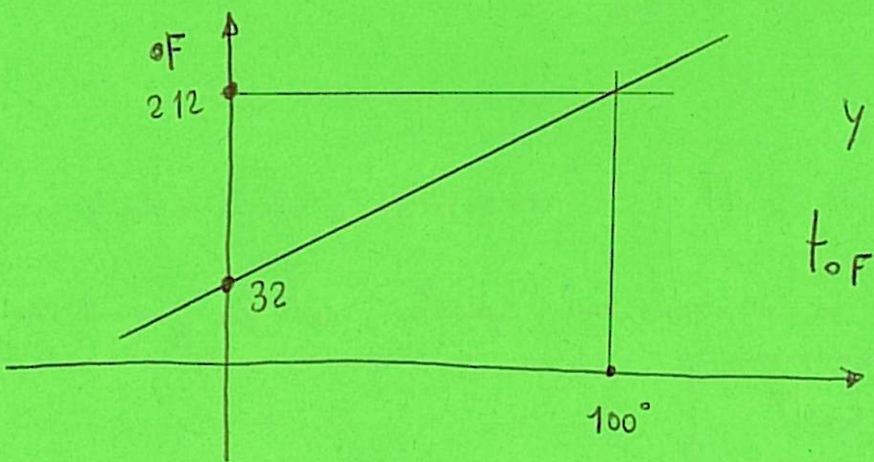
da cui $\bar{q} = \frac{\partial^2 Q}{\partial S \partial \tau} = \left[\frac{W}{m^2}\right]$

Se responsabile della variazione di calore sono le variazioni di temperatura allora si usa: La scala Celsius = °C e la scala Kelvin = 273,15+°C

$$\boxed{t_K = 273{,}15 + t_{°C}}$$

Alla temperatura in Kelvi t_K di solito si assegna alla lettera T maiuscola.

La scala anglosassone in $°F_R$ è: (Farenaiht)



$y = mx + q$

$t_{°F} = 32 + 1{,}8 \cdot t_{°C}$

i 100° F dovevano per gli inglesi essere pari alla temperatura del corpo umano 37.7 (un po di febbre)

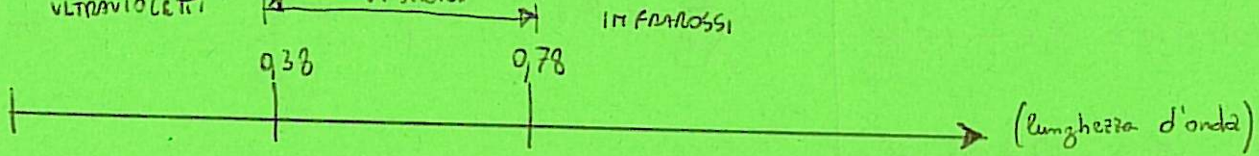
1) Scambio per irraggiamento

2) Scambio per conduzione

3) convezione

<u>TIPI DI SCAMBIO TERMICO</u>

<u>L'irraggiamento</u> avviene più efficacemente nel vuoto. gli altri necessitano di un mezzo. Per irraggiamento la trasmissione avviene sempre per emissione di onde elettromagnetiche. Come complicazione vi è la disposizione geometrica dei due corpi. Si tiene conto della distribuzione spaziale delle onde e della distribuzione spettrale delle onde, infatti alcuni corpi possono assorbire o emettere meglio certe frequenze piuttosto che altre.



λ [in metri]

La legge di plank dice che il quanto energetico trasportato è proporzionale alla frequenza

$$E = h \cdot f \qquad c = \lambda \cdot f \qquad f = \frac{1}{T}$$

h: costante di Plankt

λ: spazio, lunghezza d'onda

per irraggiamento il calore e il flusso termico (la potenza) dipende da T alla 4ª potenza

$$\dot{E} = \sigma_n T^4 \cdot A \quad \text{Stefan-Boltzman} \qquad \sigma_n = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$$

$\dot{E}$: Potenza termica

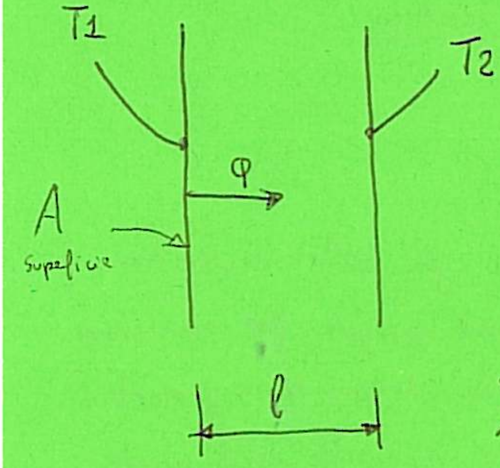
T: [K]

<u>Per conduzione</u> quando in un mezzo vi sono punti a diversa temperatura, non vi è movimento macroscopico di massa.

Nel caso di non metalli il movimento avviene solo attorno alla posizione nel reticolo, i conduttori invece mettono in gioco il movimento elettronico.

I metalli avranno una attitudine maggiore a trasferire il calore dei non metalli. Il rame mette in gioco una componente di movimento elettronico oltre di oscillazione attorno alle posizione nel reticolo degl. atomi o molecole.

Legge di Fourier (fenomenologica)



Conduzione

$$\boxed{q = \lambda \frac{(T_1 - T_2) \cdot A}{L}}$$

CONDUZIONE

se $T_1 > T_2$

λ è la conduttività termica propria del materiale.

λ = quanto più facilmente il materiale trasmette calore per conduzione.

$\lambda = \left[\frac{W}{mK}\right]$

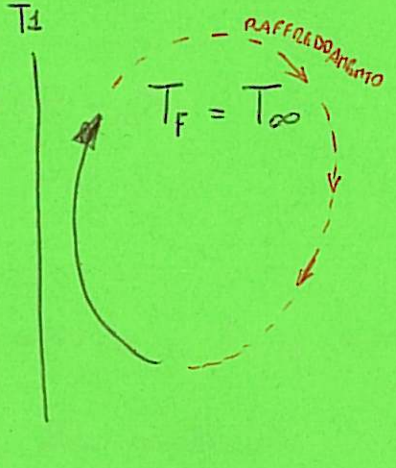
Watt

metro · Kelvin

materiale		λ = conduttività
Rame	=	$400 \frac{W}{mK}$
Calcestruzzo	=	$1,4 \div 1,5 \frac{W}{mK}$
acciai	=	$30 \div 35 \frac{W}{mK}$
aria	=	$0,026 \frac{W}{mK}$

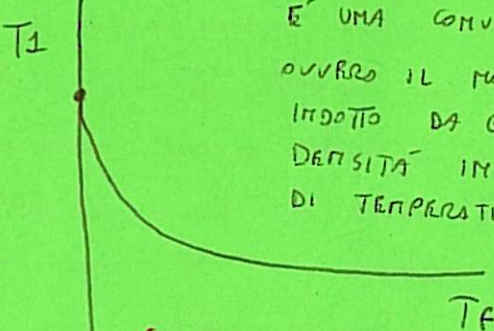
$$\frac{L}{\lambda S} = R_T \qquad q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{\lambda A}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_T}$$

Convezione vi è movimento macroscopico di materia: ci sono due sistemi a contatto tra loro di cui almeno uno dei due sia un fluido in movimento.



Se il fluido è a $T_F < T_1$ allora a contatto con la parete si scalda e quindi a contatto tende a salire

Il profilo termico diventa



È UNA CONVEZIONE NATURALE OVVERO IL MOVIMENTO È INDOTTO DA GRADIENTI DI DENSITÀ INDOTTI DA GRADIENTI DI TEMPERATURA.

La convezione presuppone un movimento che può essere naturale o forzato.

CONVEZIONE → FORZATA
→ NATURALE

CONVEZIONE

$$\boxed{q = h \cdot S \cdot (T_p - T_f)}$$

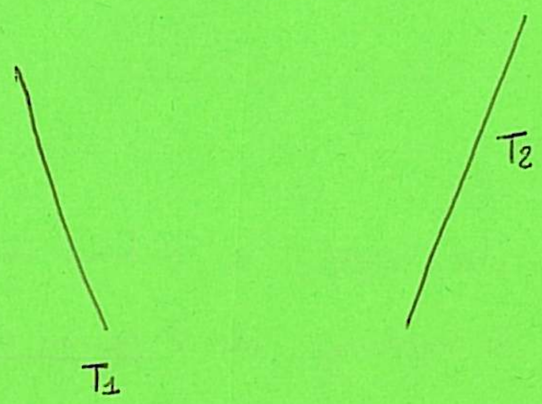
h dipende dal campo fluidodinamico che si instaura, ovvero la velocità del fluido, dalle proprietà fisiche del fluido, dalla geometria del sistema.

h = coefficiente di convezione

Tutto il calcolo si sposta sul trovare h.

L'unità di misura di $h = \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$

IRRAGGIAMENTO



coefficiente che dipende dalla geometria e dispositivo

$$q_{12} = \left(T_1^4 - T_2^4\right) \cdot C_{12\,\text{VISTA}} \cdot C_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

dipende dalla emissività delle due superfici

Tentiamo di linearizzare

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

poniamo $\frac{T_1 - T_2}{2} = \Delta$

proviamo a ricavare T_1

$$T_1 = T_m + \Delta$$

$$T_2 = T_m - \Delta$$

Facciamo lo sviluppo in serie di Taylor centrato in

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + f''(x_0) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_0) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

quindi

$$T_1^4 = T_m^4 + 4 T_m^3 \cdot \Delta + \dots + \dots$$

$$T_2^4 = T_m^4 + 4 T_m^3 \cdot (-\Delta) + \dots + \dots$$

quindi

$$q_{12} = C_{\text{VISTA}} \cdot C_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot 4 T_m^3 (\overbrace{2\Delta}^{(T_1 - T_2)}) = q_{12} = C\, 4 T_m^3 (T_1 - T_2)$$

$$q_{TOT} = h\,\Delta T + C^*\,\Delta T \qquad C^* = C\,4T_m^3$$

$$= h_{tot}\,\Delta T$$

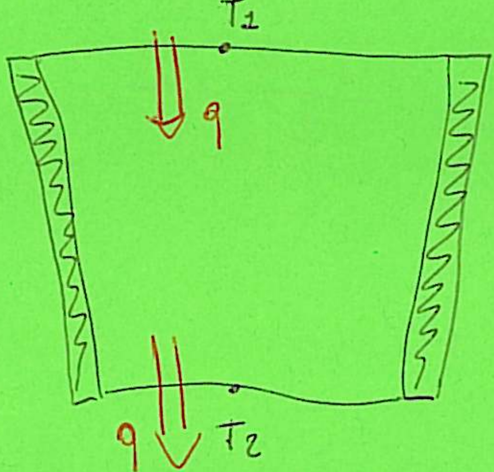
$h_1 = 8{,}3 \left[\frac{W}{m^2K}\right]$ congloba anche l'irraggiamento e non solo la convezione

Parete verticale (normativa edilizia)

$h_i = 8{,}3 \ \frac{W}{m^2K}$

~ ~ ~ ~

supponiamo di avere il sistema a due superfici a contorno adiabatico e S_1 a t_1 e S_2 a t_2. Si suppone che il regime sia stazionario



ovvero considerando un dV del sistema, nel tempo la sua temperatura non varia, ovvero l'energia che vi entra è uguale a quella che esce.

Il q che entra è uguale al q che esce

definiamo la resistenza termica:

$$\boxed{R = \frac{\Delta T}{q}} \quad \left[\frac{K}{W}\right] \qquad V = R \cdot I$$

$$\Delta T = R_T \cdot q$$

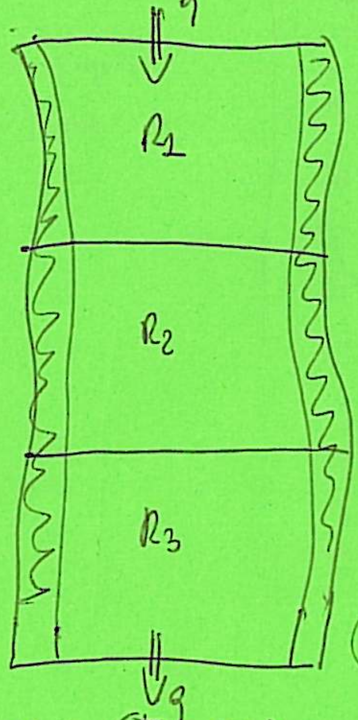
Posso anche definire la resistenza termica specifica come

$$\bar{R} = \frac{\Delta T}{\bar{q}}$$

cioè divido Δt per la potenza termica specifica

cambia l'unità di misura

$$\bar{R} = \frac{K\,m^2}{W}$$



q sulla serie è costante

$$q_1 = q_2 = q_2 = q$$

$$(R_1) \quad q = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \quad (q)$$

$$(R_2) \quad q = \frac{T_2 - T_3}{R_2} \quad (q)$$

$$(R_3) \quad q = \frac{T_3 - T_4}{R_3} \quad (q)$$

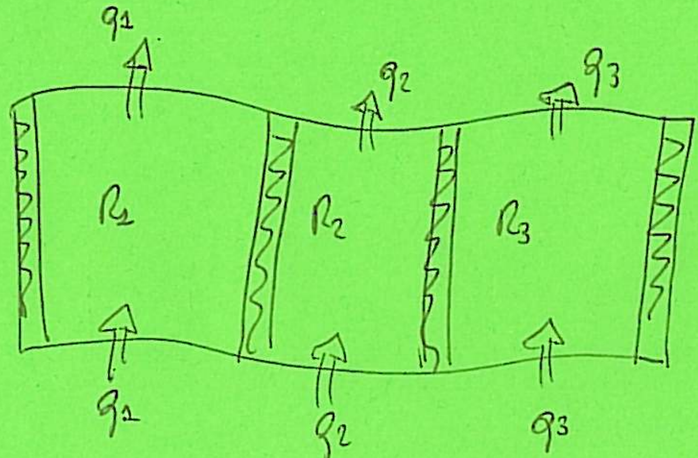
$$q(R_1 + R_2 + R_3) = (T_1 - T_4)$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$

$$R_{TOT} = \frac{T_1 - T_4}{q}$$

da cui $\quad R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3$

Esempio con Resistenze in parallelo:



$$q_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \qquad q_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$$

$$q_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_3}$$

$$R_{TOT} = \frac{T_1 - T_2}{q_1 + q_2 + q_3}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{T_1 - T_2}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = R_{TOT} \Rightarrow \frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

L'inverso della resistenza viene chiamato C = conduttanza.

	R	$\bar{R}$	C	$\bar{C}$
conduzione	$\frac{s}{\lambda A}$	$\frac{s}{\lambda}$	$\frac{\lambda A}{s}$	$\frac{\lambda}{s}$
convezione	$\frac{1}{hA}$	$\frac{1}{h}$	hA	h
Irraggiamento	$\frac{1}{h_r A}$	$\frac{1}{h_r}$	$h_r A$	h_r

s = spessore

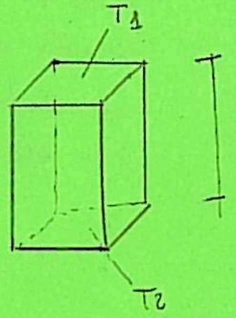
A = superficie

SECONDA LEZIONE 02/08/2005

CONDUZIONE : Scambio senza movimento di materia macroscopico, ma per oscillazioni nel reticolo, con in aggiunta gli effetti di conduzione elettrica.

LEGGE DI FOURIER : che nasce dalle osservazioni sperimentali: Si consideri il parallelepipedo

MATERIALE ISOTROPO ED OMOGENEO



Le basi vengono poste a contatto con due sorgenti a t uniforme t_1 e t_2

La superficie laterale è adiabatica.

Poi si è misurata la quantità di calore Q che fluisce dalla faccia superiore alla faccia inferiore

Q risulta proporzionale : Alla $\Delta T = T_1 - T_2$

Alla sezione della Base

Al tempo di osservazione

Risulta inversamente proporzionale alla lunghezza del percorso

J. B. FOURIER

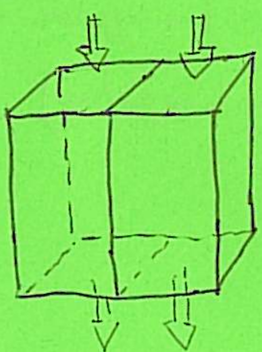
$$\boxed{Q = \frac{\lambda (T_1 - T_2) S}{L} \Delta\tau}$$

con λ tipico del materiale usato

Isotropo : Le caratteristiche del materiale, restando fermi in un punto non variano se si varia la direzione. (proprietà del punto)

Omogeneo : Le caratteristiche non variano se ci si sposta in altri punti (proprietà della direzione e punti vicini)

Poi ha aggiunto un altro parallelepipedo



IN IPOTESI DI MATERIALE ISOTROPO

Q si muove in maniera perpendicolare alle isoterme.

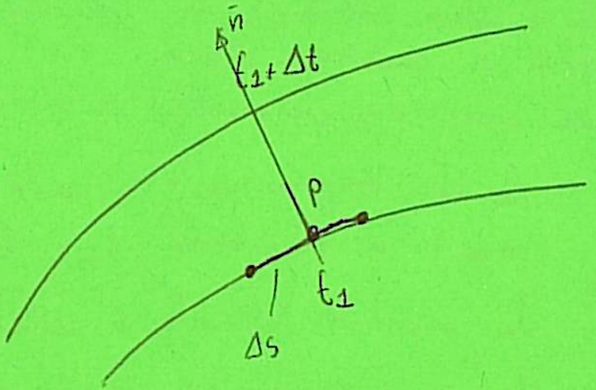
$$q = \frac{Q}{\Delta\tau}$$ e $\perp$ alle superfici isoterme

$$\boxed{q = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{L} S}$$

La legge di Fourier ci è più utile in forma differenziale.

ORA FACCIAMO IPOTESI SOLO DI MEZZO ISOTROPO (NON OMOGENEO)

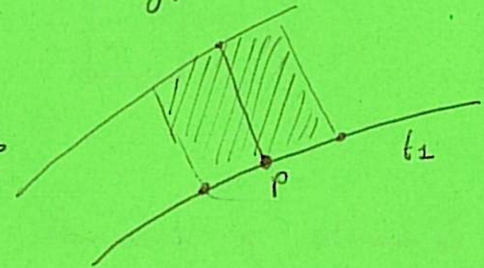
IPOTESI: MEZZO ISOTROPO



INDIVIDUIAMO DUE ISOTERME DENTRO AL MATERIALE.

individuiamo nell'isoterma il punto P e tracciamo la normale alla superficie ΔS

individuiamo un prisma che ha come generatrice la normale



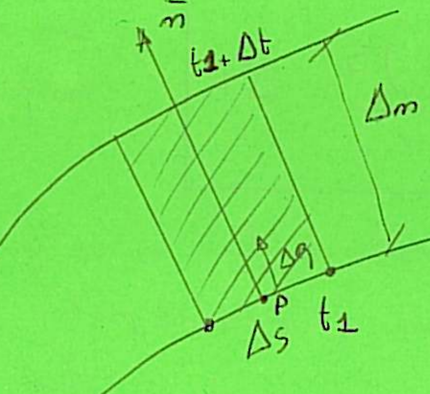
Proviamo a scrivere Fourier per l'elementino trovato

ATTENZIONE

1) la superficie laterale non è adiabatica.

2) Il mezzo è isotropo ma non è omogeneo

Queste non conformità alla legge di Fourier cadono quando passiamo al limite



$$\boxed{\Delta Q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau}$$

$$\boxed{q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} \cdot \Delta S}$$

$q^* = -\lambda \nabla t$

$q = -\lambda S \nabla t$

Il rapporto $\frac{\Delta T}{\Delta n}$ non è altro che un gradiente nell'unica direzione in esame.

Il secondo principio della termodinamica dice che la direzione naturale del movimento di **q** è dalla sorgente a t maggiore a quella a t minore quindi <u>DEVO</u> sistemare il segno (che diventa negativo).

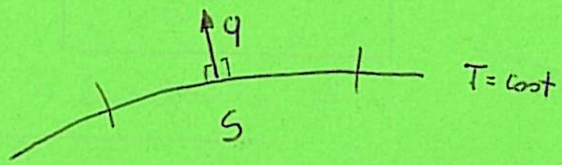
$$\boxed{\Delta q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} \cdot \Delta S}$$

Passiamo al limite, sia in ΔS che in Δn. (così mi concentro attorno al punto P)

POTENZA SPECIFICA

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \bar{q} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} \qquad \bar{q} = -\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{n=0}$$

quando conosco una superficie isoterma T sono sicuro che il flusso termico q viaggia in maniera perpendicolare ad essa

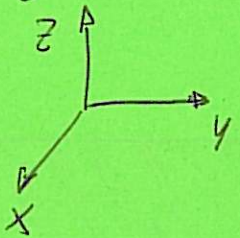


$$\bar{q} = \frac{\partial q}{\partial s} \qquad q = \int_S \bar{q} \cdot ds$$

sappiamo che è il vettore gradiente per definizione ad essere perpendicolare ad una superficie equipotenziale. (aggiungo il versore)

$$\boxed{\bar{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \vec{n}}$$

Il vettore $\frac{\partial t}{\partial n}$ è il vettore gradiente di T (monodimensionale)



$$\frac{\partial t}{\partial n} \cdot \vec{n} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial t}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \vec{y} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \vec{k} = \nabla T$$ gradiente nelle tre direzioni.

La legge fenomenologica di fourier può essere riscritta come gradiente di T

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\boxed{\bar{q} = -\lambda \nabla t}$$

$$\bar{q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

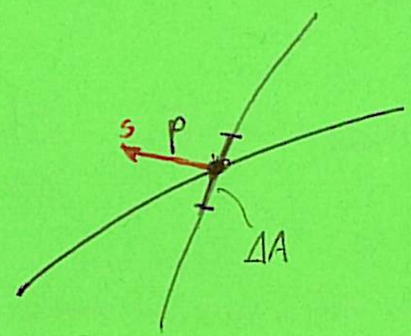
$$\bar{q}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\bar{q}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

l'unica ipotesi è mezzo ISOTROPO

Le due isosuperfici si intersecano in P

cambio punto di vista del disegno



$$\boxed{\bar{q}_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial s}}$$

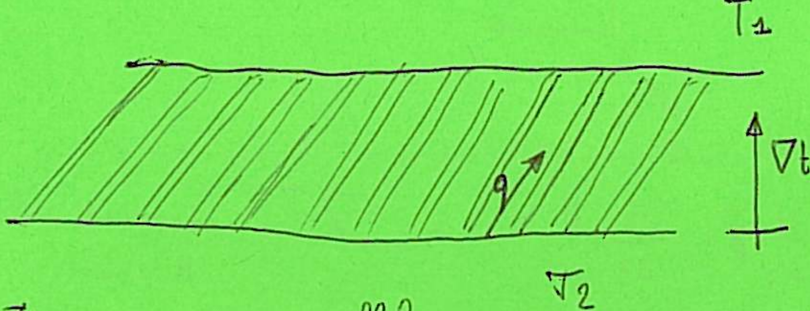
quindi se vogliamo il Q si fa:

$$\boxed{Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial s} \cdot \Delta A}$$

$$\bar{q} = -\lambda \nabla t \qquad \text{oppure} \qquad q = -\lambda \, \text{grad}\, t$$

SE IL MEZZO NON FOSSE ISOTROPO

la potenza termica non è più $\perp$ alle isoterme. Esempio un insieme di fibre disposte parallelamente tra di loro



il gradiente è sempre perpendicolare alle isoterme quindi non è incanalato parallelo alle fibre

q e ∇t non sono parallele

tensore delle conduttività termiche.

$$\vec{q} = \|\lambda\| \nabla t$$

TENSORE

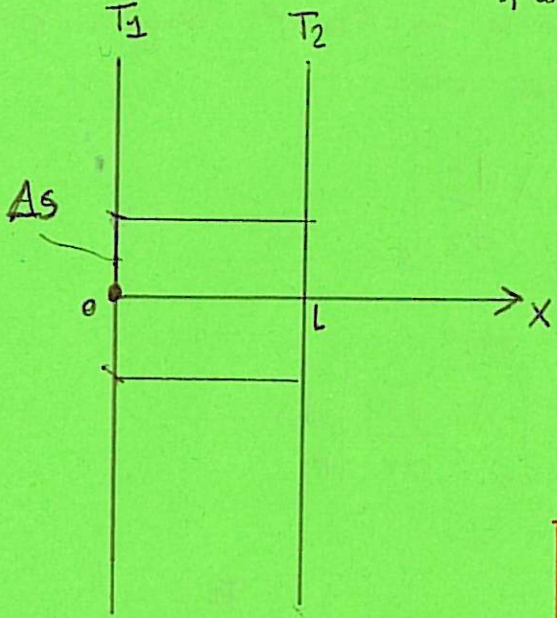
$$\bar{q}_x = -\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\bar{q}_y = -\left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\bar{q}_z = -\left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Legge di Fourier per le geometrie di Base

1) Strato piano : ipotesi 1) MEZZO OMOGENEO ISOTROPO
2) REGIME STAZIONARIO
3) CONDUTTIVITÀ TERMICA INDIPENDENTE DALLA TEMPERATURA.



$$\boxed{\bar{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}$$

integriamo sull'area ΔS

$$q = \int_0^S \bar{q}\, ds = -\int_0^S \lambda \frac{\partial t}{\partial x}\, ds$$

$$\boxed{q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \Delta S}$$

Lo spessore dello strato sia L

$$q_x\, dx = -\lambda\, dt \cdot \Delta S$$

Integriamo da 0 a L di q_x

$$\int_0^L q_x\, dx = -\lambda \Delta S \int_{T_1}^{T_2} dt$$

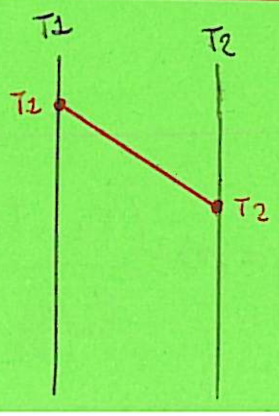
Lung x, q_x è costante quindi lo posso portare fuori dall'integrale:

$$q \cdot L = -\lambda \Delta S\, (T_2 - T_1)$$

$$\boxed{q = \frac{-\lambda \Delta S\, (T_2 - T_1)}{L}}$$

$$q \cdot x = -\lambda \Delta S\, (T(x) - T_1)$$

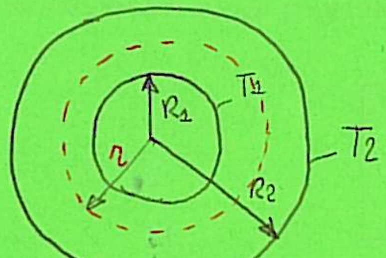
$$= -\frac{\bar{q}}{\lambda} x + T_1$$



Strato cilindrico

IPOTESI
1) Regime stazionario
2) mezzo omogeneo isotropo
3) λ indipendente dalla temperatura

Le superfici isoterme sono dei cilindri concentrici

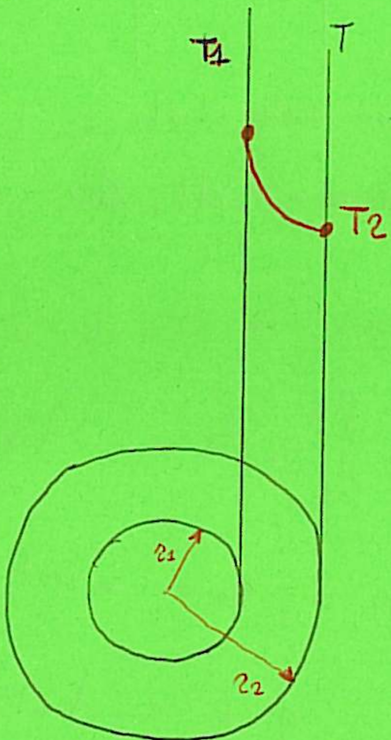


La potenza termica specifica q^* lungo un qualsiasi cilindro concentrico vale

$$\bar{q}_r = -\lambda \left.\frac{dt}{dr}\right|_r$$

$$q = \int_0^s \bar{q} \cdot ds \rightarrow \int_0^{2\pi r l} \bar{q}_r \, ds = -\int_0^{2\pi r l} \lambda \left.\frac{dt}{dr}\right|_r ds$$

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r L$$



$$\frac{q}{\lambda 2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = -dT$$

$$\int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{q}{\lambda 2\pi l} \frac{dr}{r} = -\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\frac{1}{\lambda 2\pi l} q \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{dr}{r}$$

Se lo spessore del tubo è piccolo rispetto al raggio allora si approssima allo strato piano.

$$\frac{q}{\lambda 2\pi l} \ln \Big|_{R_1}^{R_2} = -(T_2 - T_1)$$

$$\frac{q}{\lambda 2\pi l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = T_1 - T_2 \Rightarrow \boxed{q = 2\pi\lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Approssimazione dello strato cilindrico allo strato piano solo quando lo spessore è sottile e la parete è lontana dal centro

$$q = 2\pi\lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

R_m = Raggio medio

$$R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$R_2 = R_m + \frac{S_{spess}}{2}$$

$$R_1 = R_m - \frac{S_{spess}}{2}$$

$$\ln\left(\frac{R_1 + s}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{s}{R_1}\right)$$

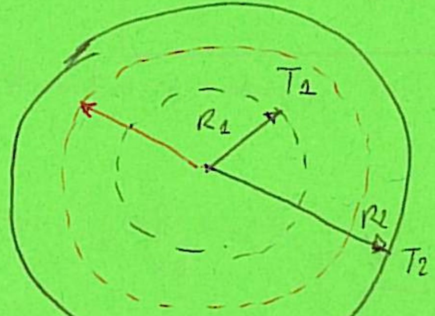
Sviluppiamo in serie di Taylor

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \dots\dots + \dots$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{s}{R_1}$$

quindi al posto del logaritmo potrei sostituire al denominatore $\left(\frac{s}{R_1}\right)$

$\boxed{\text{STRATO SFERICO}}$



: Stesse ipotesi
isotropo, stazionario, omogeneo, λ indipendente dalla temperatura

$$\bar{q}_r = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

$$q = \int_0^{4\pi r^2} \bar{q}_r \cdot ds = -\int_0^{4\pi r^2} \lambda \frac{dT}{dr}\, ds$$

superficie sfera

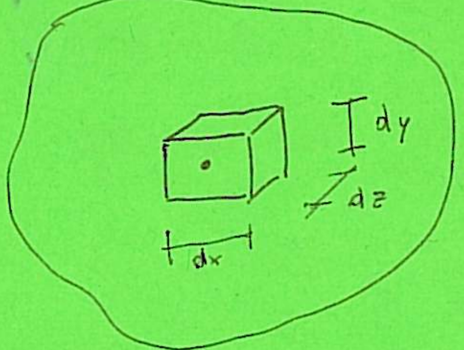
$$S_{sf.} = \frac{4}{3}\pi R^2$$

03/08/2005 TERZA LEZIONE (L'equazione generale della conduzione termica)

Consentirà di risolvere anche problemi molto complessi

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

ip. il mezzo è sede di trasmissione del calore, in esso individuiamo il parallelepipedo elementare $dx\,dy\,dz$. In esso individuiamo il punto P



Prima di applicare il primo principio della termodinamica conviene definire la grandezza "generazione di calore" H

$$H = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q_g}{\Delta V}$$

Esempi di generazione di calore

* Reazione esotermica della presa del cemento
* Dissipazione per effetto Joule nei conduttori

quindi se voglio la potenza generata internamente dovrei integrare sul volume

$$q_g = \int_V H\,dV$$

Applichiamo il primo principio della termodinamica

$$dU = dQ - dL$$

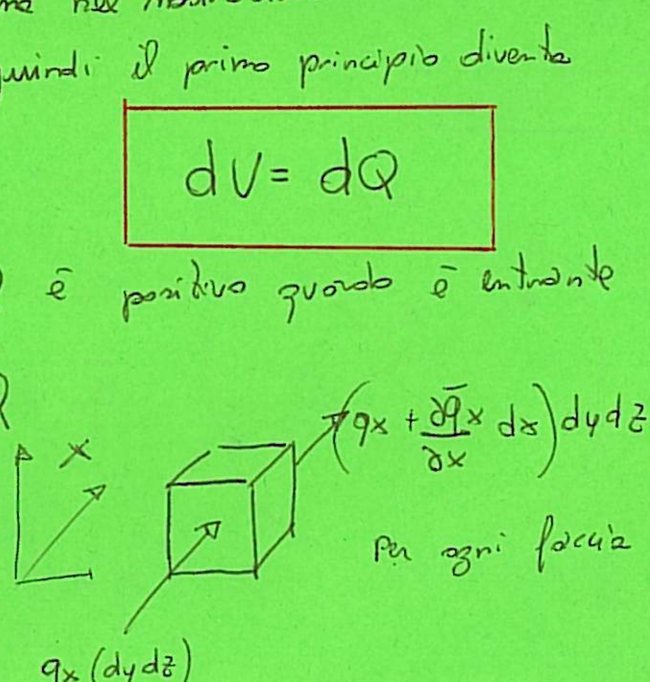
ma nel nostro sistema non c'è lavoro generato quindi il primo principio diventa

$$\boxed{dU = dQ}$$

Per convenzione il calore Q è positivo quando è entrante

Vediamo i termini di dQ

$$dQ_g = H\,dV$$ all'interno



Per ogni faccia $\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$

nel complesso abbiamo attraverso il contorno

$$-\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} dx\,dy\,z - \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} dy\,dx\,dz - \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial z} dz\,dx\,dy$$

Se ragioniamo sulle potenze e non sul calore si deve derivare

$$\frac{dU}{d\tau} = dq_{TOT}$$

dove $dq_{TOT} = H\,dv - \left(\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV$

Vediamo l'energia interna

$$\boxed{dU = m \cdot c\, dT}$$

$m = \rho\, dx\,dy\,dz$

$= \rho\, dV$

si vede che il $\frac{dU}{dT} = \rho\, dv \cdot c \frac{\partial t}{\partial \tau}$

Si ricordi che q_g ha tre componenti q^g: $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$, $\bar{q}_z$

$$\left(H - \operatorname{div} \bar{q}\right) dv = \rho\, dv\, c \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

tolgo il dv

$$\boxed{H - \operatorname{div} \bar{q} = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}}$$

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE TERMICA

Vediamo i collegamenti con la legge fenomenologica di Fourier

IPOTESI: caso ~~omog~~ isotropo

Sempre posso scrivere

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \bar{q}_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \\ \bar{q}_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \\ \bar{q}_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \end{cases}$$

$$H - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

l'ipotesi di solo mezzo isotropo mi lascia i λ dentro dell'espressione

- Se il mezzo è anche omogeneo allora λ non dipende dalla posizione
- Se il mezzo è omogeneo e λ indipendente dalla temperatura allora è una costante e la posso portare fuori dalle derivate

quindi: Per λ ind. da T in mezzo omogeneo e isotropo

$$\boxed{H + \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}}$$

EQUAZIONE PER MEZZI OMOGENEI ISOTROPI CON λ indipendente dalla temperatura

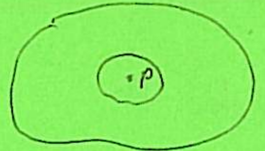
$$\boxed{H + \lambda \nabla^2 t = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}}$$

o per comodità si può scrivere definito $\frac{\lambda}{\rho c} = a$ come diffusività termica (indice di quanto velocemente risponde il sistema alle eventuali variazioni delle condizioni al contorno)

$$\boxed{\frac{H}{\lambda} + \nabla^2 t = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}}$$

Più alta è la diffusività termica e più velocemente il sistema cerca di portarsi all'equilibrio rispetto le condizioni al contorno.

Riprendiamo il sistema iniziale: l'equazione vale all'interno di tutti i punti

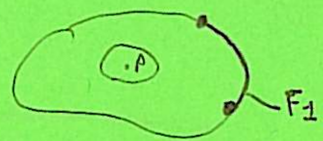


del sistema, ma la risoluzione impone delle condizioni al contorno che sono due per ogni direzione, due rispetto al tempo, più una condizione temporale iniziale.

Condizioni al contorno (sono di 3 tipi)

1ª specie (di Dirichlet)

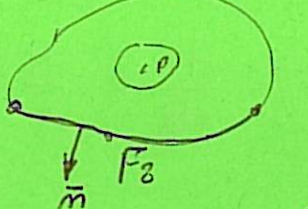
dividiamo il contorno in regioni e in F_1 fissiamo la temperatura



$$I^{\circ}\text{ tipo}\quad T(P) = \overline{T} = \underbrace{f(P)}_{\text{NOTA}} \quad \forall P \in F_1$$

OVVERO FISSO LA TEMPERATURA SUL CONTORNO

2° specie



Fisso il flusso termico scambiato attraverso il contorno

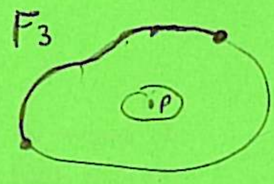
significa fissare la ~~temper~~ derivata della temperatura (derivata rispetto alla normale)

ovvero condizione di Fourier $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} = \overline{q}_n$

Infatti $$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f_1(P) \quad \forall P \in F_2$$

3° specie è la condizione mista delle due ed è la condizione detta convettiva

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h\,\left(T(P) - T(\infty)\right) \quad \forall P \in F_3$$



FISSO Temperatura
e fisso il gradiente di T

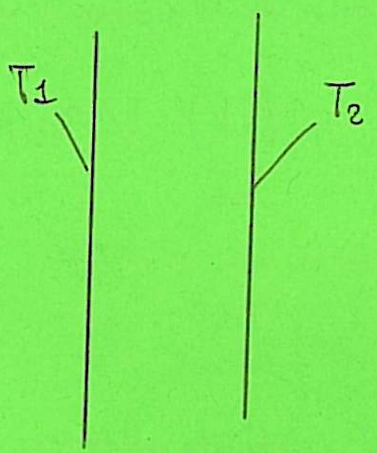
È LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRIME DUE

Integrazione della equazione della conduzione con generazione interna

ip. mezzo omogeneo, isotropo, con λ indipendente da T

$$H + \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

STRATO PIANO CON GENERAZIONE DI CALORE H



In regime stazionario

$$H + \lambda \nabla^2 t = \cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}}$$

quindi

$$H + \lambda \nabla^2 t = 0$$

monodimensionale

che per le condizioni imposte $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \rightarrow \frac{d^2 t}{dt}$ derivata totale.

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{H}{\lambda} \rightarrow \int \rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{H}{\lambda} x + c_1,$$

integro la seconda volta e ottengo

$$T(x) = -\frac{H}{2\lambda} x^2 + c_1 + c_2$$

impongo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} x = 0 \quad T(0) = T_1 \quad c_2 = T_1 \\ x = L \quad T(L) = T_2 \quad -\frac{H}{2\lambda} L^2 + c_1 L + T_1 = T_2 \end{cases}$$

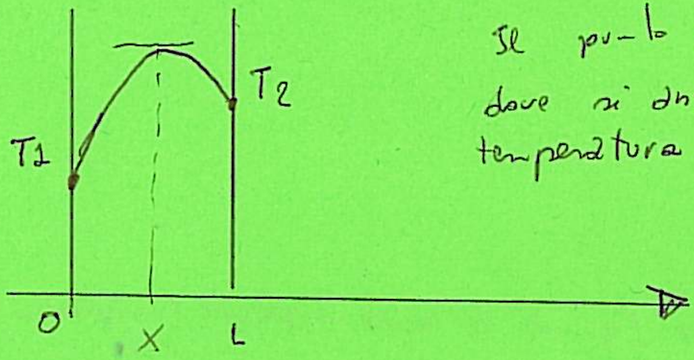
da cui

$$c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{H}{2\lambda} L$$

si scopre che il profilo delle temperature è parabolico

quindi

$$\boxed{T(x) = -\frac{H}{2\lambda} x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{H}{2\lambda} L\right) x + T_1}$$



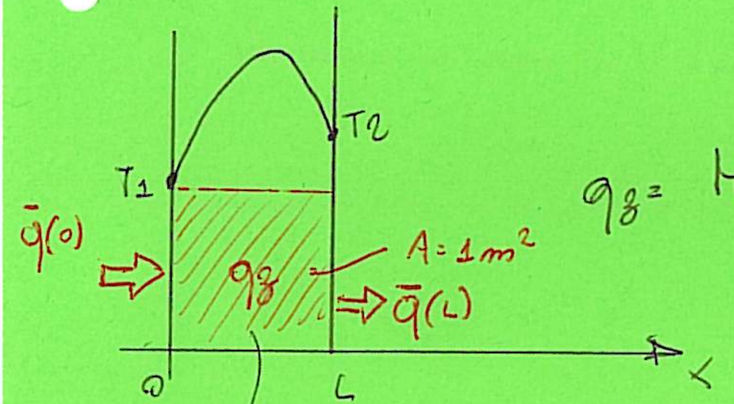
Il punto di max della temperatura si ha dove si annulla la derivata prima della temperatura

$$X_{max} = \frac{dT}{dx} = 0$$

$$X_{max} = \frac{c_1 \lambda}{H}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{H}{\lambda} x + c_1$$

Ragionamento aggiuntivo



isolo questa area

$A = 1\,m^2$

$$q_g = H \cdot 1 \cdot L \qquad \text{infatti } q_g = H \cdot V$$

$$\bar{q}(0) = -\lambda \frac{dt}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$\bar{q}(L) = -\lambda \frac{dt}{dx}\Big|_{x=L}$$

Per il 1° P.d.T si ha

$Q_{TOT} = 0$ in regime stazionario non ho variazione di energia interna.

$$q_g + \bar{q}(0)\overset{S=1m^2}{s} - \bar{q}(L)\overset{S=1m^2}{s} = 0$$

vediamo $\bar{q}(0)$

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{H}{2\lambda} \cdot L \qquad \bar{q}(0) = -\lambda\left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{H}{2\lambda} L\right)$$

vediamo $\bar{q}(L)$

devo vede

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = -\frac{H}{\lambda L} + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{H}{2\lambda} \cdot L\right) \Rightarrow \bar{q}(L) = HL - \lambda\left(\frac{T_2 - T_1}{2} + \frac{HL}{2\lambda}\right)$$

sostituisco nell'equazione $q_g + \bar{q}(0) - \bar{q}(L) = 0$

facendo la sottrazione rimane:

$$q_g - HL = 0$$

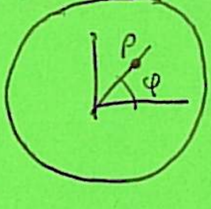
$q_g = HL$ verificato il bilancio (quindi le regole applicate funzionano)

$\boxed{\text{con la generazione di calore non si può applicare l'integrazione alla legge di Fourier ma bisogna per forza integrare l'equazione generale della conduzione.}}$

l'equazione della conduzione in certe geometrie va messa in coordinate cilindriche o sferiche.
Bisogna sostituire il laplaciano

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

vediamola in coordinate cilindriche

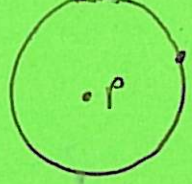


$$\boxed{\nabla^2 t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}}$$

controllo dimensionale

In simmetria cilindrica spariscono i termini in Θ e in z, rimane solo $\nabla^2 t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

Prendiamo un cilindro con generazione di calore e fissiamo la condizione al contorno $T = T_1$



$$H + \lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{dt}{\partial r}\right) = \cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}}$$

in regime stazionario si annulla

prepararo per integrazione

derivata totale perché T non va con θ e z

$$-\frac{H}{\lambda} \cdot r = \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right)$$

integriamo la prima volta

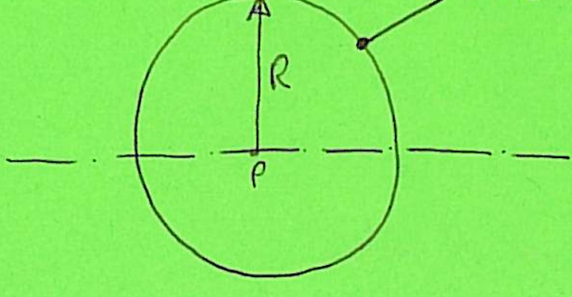
$$-\frac{H}{2\lambda} r^2 + \frac{C_1}{r} = \frac{dT}{dr}$$

integro la seconda volta

$$T(r) = -\frac{Hr^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2$$

per non fare divergere la soluzione bisogna che $C_1 = 0$

il profilo delle temperature è:



Rimane

$$T(r) = -\frac{H}{4\lambda} r^2 + C_2$$

$$r = R \Rightarrow \quad T(R) = T_1 = -\frac{H}{4\lambda} R^2 + C^2$$

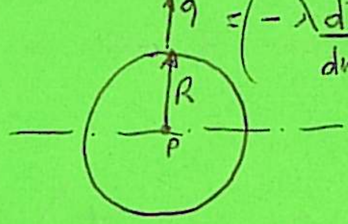
si ricava

$$C_2 = T_1 + \frac{H}{4\lambda} R^2$$

quindi l'equazione T(R) è una parabola

$$T(r) = -\frac{H}{4\lambda} R^2 + \frac{H}{4\lambda} R^2 + T_1$$

$q_g = \pi R^2 L \cdot H$



$$q = \left(-\lambda \frac{dT}{dr}\Big|_{R=r} \right) 2\pi R L$$

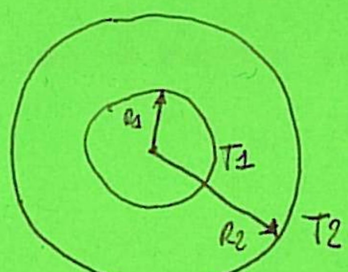
BILANCIO SECONDO IL PRIMO PRINCIPIO

$$\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = -\frac{H}{2\lambda} R$$

$$Q(R) = +\lambda \frac{H}{\cancel{2\lambda}} R (\cancel{2}\pi R L) = \pi R^2 L H$$

infatti il bilancio deve essere $q_g - q(R) = 0$

STRATO CILINDRICO CON GENERAZIONE DI CALORE H



l'integrazione è la stessa. quindi prendo i risultati precedenti

$$T(r) = -\frac{H}{4\lambda} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

$r = R_1$ $\quad T(R_1) = T_1 = -\frac{H}{4\lambda} R^2 + c_1 \ln R_1 + c_2$

$r = R_2$ $\quad T(R_2) = T_2 = -\frac{H}{4\lambda} R_2^2 + c_1 \ln R_2 + c_2$

$$\begin{cases} r_1 = R_1 & T_1 = \\ r_2 = R_2 & T_2 = \end{cases}$$

Sottraggo membro a membro per risolvere il sistema

$$T_1 - T_2 = \frac{H}{4\lambda}\left(R_2^2 - R_1^2\right) + c_1 \ln \frac{R_1}{R_2}$$

sostituendo $c_1 = \dfrac{T_1 - T_2 + \frac{H}{4\lambda}\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$

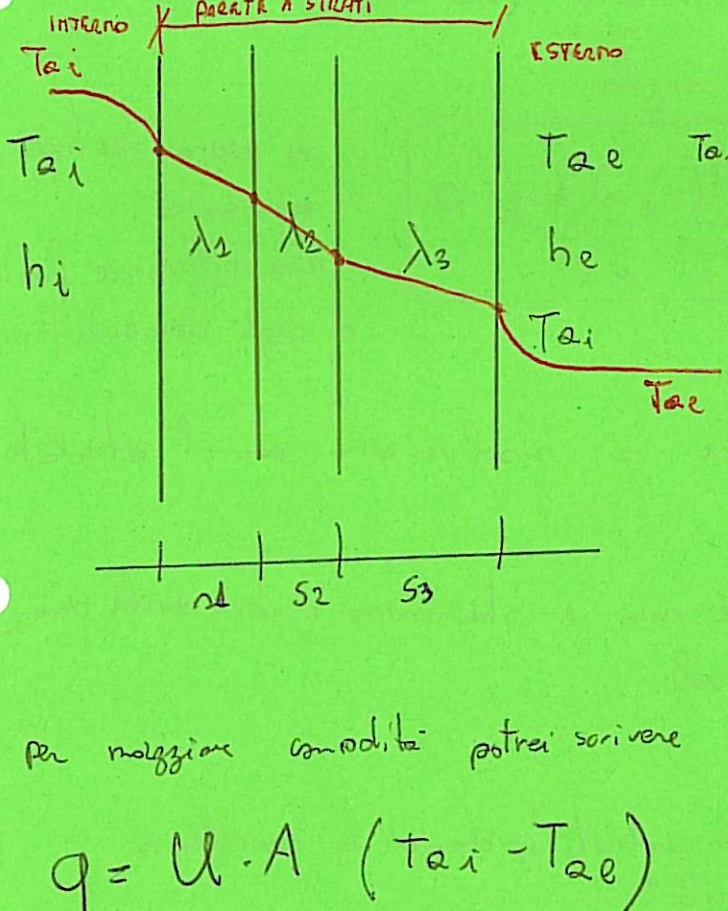
si ricava subito C_2 sostituendo

$$C_2 = T_2 + \frac{H}{4\lambda} R_2^2 - \left[\frac{T_1 - T_2 + \frac{H}{4\lambda}\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \right] \ln R_2$$

infatti il bilancio è soddisfatto

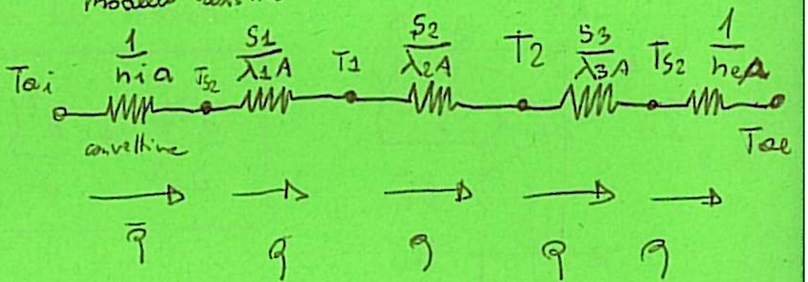
$$q_g + q(R_1) - q(R_2) = 0$$

STRATO PIANO



IPOTESI: REGIME STAZIONARIO (monodimensionale)

modello resistivo



nella serie q è costante

$$q = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{T_{ai} - T_{ae}}{R_{TOT}} = \frac{A\,(T_{ai} - T_{ae})}{\frac{1}{h_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_e}}$$

per notazione comodità potrei scrivere

$$q = U \cdot A\,(T_{ai} - T_{ae})$$

trasmittanza (il libro la chiama K)

questo parametro descrive bene il fenomeno a regime stazionario

$$\boxed{U = \frac{1}{\frac{1}{h_e} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_e}}}$$

Una parete ottima (buon comportamento energetico) deve avere bassa trasmittanza quindi gli spessori devono avere λ molto bassi.

QUARTA LEZIONE 04/08/2005

Siamo giunti ad integrare l'equazione generale della conduzione

$$\frac{H}{\lambda} + \nabla^2 t = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

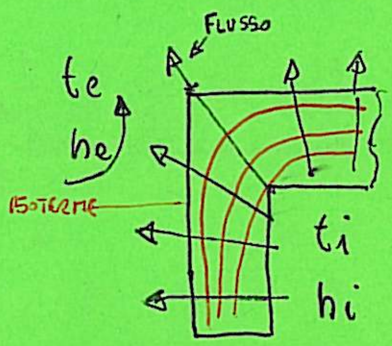
per mezzi omogenei e isotropi e λ indipendenti da t

con $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

Abbiamo visto finora solo trasmissioni in regime stazionario e monodimensionali.

MOLTO SPESSO PUÒ ACCADERE CHE IL FLUSSO NON È MONODIMENSIONALE E CHE IL REGIME SIA VARIABILE.

Vediamo la conduzione bidirezionale stazionario (solo cenni)



Parete ad angolo

$$\boxed{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0}$$

si usano i metodi numerici.
Delle differenze finite
o degli elementi finiti

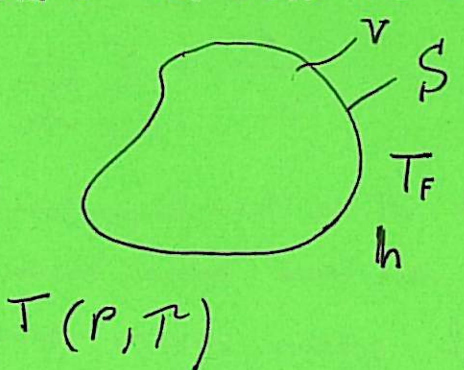
Quando non c'erano i calcolatori si risolvevano con il reticolato di flusso.

Il problema si complica se il regime non è stazionario e devo anche analizzare il transitorio. Vi sono due casi notevoli.

REGIME VARIABILE

Metodo risolutivo a parametri concentrati "quando la resistenza conduttiva del mezzo sia trascurabile".

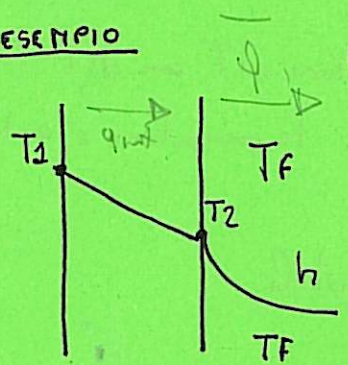
METODO A PARAMETRI CONCENTRATI

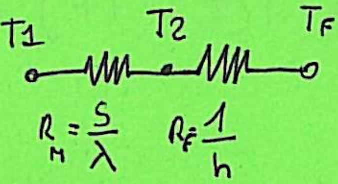


In generale la T nel mezzo dipende dal punto P del mezzo e dal tempo τ.
Se invece ammettiamo che la resistenza conduttiva del mezzo tende a zero allora la sua conduttività tende a infinito, quindi nello spazio t è costante nello spazio (T varia solo nel τ)

ESEMPIO

IPOTIZIAMO CHE IL REGIME SIA STAZIONARIO





$$\bar{q} = \frac{T_1 - T_F}{\frac{1}{h} + \frac{s}{\lambda}}$$

$$\bar{q}_{int} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{\lambda}}$$

quindi

$$T_1 - T_2 = \frac{s}{\lambda}\left(\frac{T_1 - T_F}{\frac{1}{h} + \frac{s}{\lambda}}\right)$$

Per avere $T_1 - T_2$ tendente a zero bisogno che $\frac{S}{\lambda}$ tenda a zero oppure $\frac{1}{h}$ (ovvero la resistenza convettiva) deve essere molto più alta di quella conduttiva.

Se la resistenza conduttiva è bassa la temperatura è omogenea nel mezzo

—.—.—.—.—

Se t varia solo con il tempo $t(\tau)$ allora scrivo il p.p.d.Ter.

$$dU = dQ - dL$$ ma posto lavoro nullo diventa $dQ = dU$

perchè si parla di calore e non di potenza

da $$dQ = h \cdot S \cdot (T_F - T(\tau))\, d\tau$$

ora scrivo la variazione di energia interna

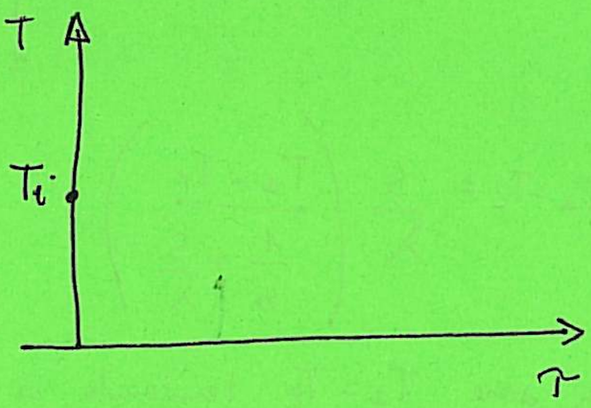
$$dU = m \cdot c \cdot dT = \rho V c\, dT$$

Sostituiamo

$$hs(T_F - T(\tau))\, d\tau = \rho V c\, dT$$ sono derivate totali.

$$-hs\left(T(\tau)-T_F\right) = \rho c V \frac{dT}{d\tau}$$ ← posso sostituire dT con $d(T-T_F)$ perché la temperatura è costante

$$-\frac{hs}{\rho V c}\, d\tau = \frac{d(T-T_F)}{T-T_F}$$ ho separato le variabili



$$-\frac{hs}{\rho V c}\cdot \tau = \ln\left[\frac{(T(\tau)-T_F)}{(T_i-T_F)}\right]$$

$$e^{-\frac{hs}{\rho V c}\cdot\tau} = \frac{(T(\tau)-T_F)}{(T_i-T_F)}$$ quindi alla fine si ha $T(\tau)=T_F+(T_i-T_F)\, e^{-\frac{hs}{\rho V c}\tau}$

$$T(\tau) = T_F + (T_i - T_F)\cdot e^{-\frac{hS}{\rho c V}\tau}$$

visto che $\boxed{\frac{\rho V c}{h S} = \tau_0}$ dimensionalmente è proprio un tempo in secondi (FARE LA PROVA)

$$T(\tau) = T_F + (T_i - T_F)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

modello

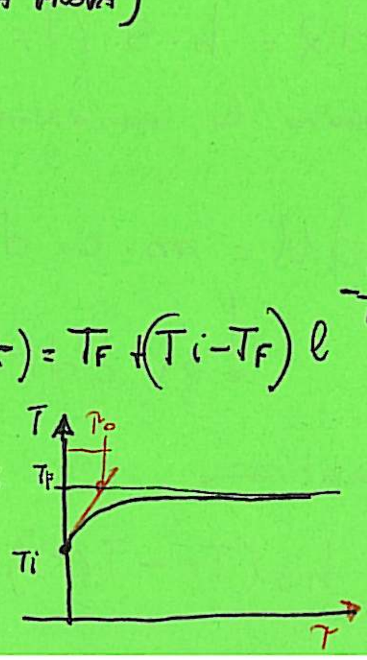
$\boxed{\rho c V = C \text{ (capacità)}}$

$\frac{1}{hS} = R$

quindi

$$T(\tau) = T_F + (T_i - T_F)\, e^{-\frac{\tau}{RC}}$$

Analogamente ai circuiti elettrici RC



La costante di tempo $\tau_0 = \frac{\rho V c}{h S} = R \cdot C$

tanto maggiore è τ_0 tanto più il corpo è lento a portarsi alla condizione di equilibrio.

La capacità termica è legata alla densità

Analogamente maggiore è la resistenza termica tanto più lento sarà a raggiungere il regime.

Se si vuole ritardare l'oscillazione esterna della temperatura all'interno dell'edificio bisogna scegliere una parete con una elevata inerzia. (N.B. sempre si suppone che la t varia solo nel tempo e non nei punti)

La R convettiva deve essere molto più grande della conduttiva

va analizzato il numero di BIOT

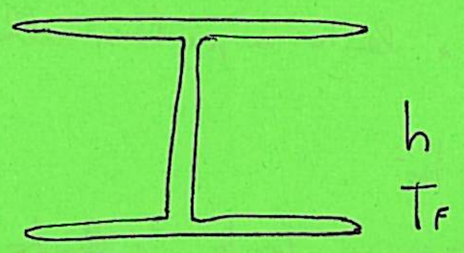
$$\boxed{Bi = \frac{h \cdot L}{\lambda}}$$

ha la stessa forma del numero di Nusselt, ma la λ è quella del solido.

$$\frac{L}{\lambda} = R \text{ conduttiva}$$

$$\boxed{Bi = \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{h}} = \frac{\bar{R} \text{ conduttiva}}{\bar{R} \text{ convettiva}} < 0{,}1}$$

ESEMPIO NEI CORPI MOLTO SOTTILI

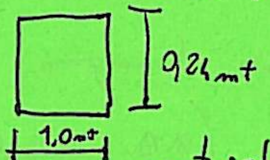


$\lambda = 35 \frac{W}{mK}$

Si può ben usare la schematizzazione a parametri concentrati perché si suppone che T interna si costante.

$$T(\tau) = T_F + (T_i - T_F)\, e^{-\frac{hS}{\rho V c}\cdot \tau}$$

Se invece ho una trave in calcestruzzo (in spessone) non posso usare il metodo a parametri concentrati.



λ è basso circa 1,25, le dimensioni metriche sono ampie.

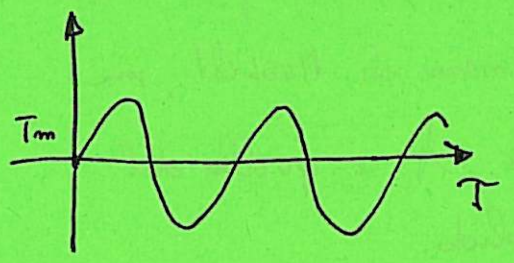
Vediamo un'altra situazione

Mezzo seminfinito in X

Sulla superficie del mezzo si impone una variazione sinusoidale di T

$$T(0) = T_M + A \sin(\omega \tau) \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

T ← Periodo



Se sulla superficie ho la sinusoide, cosa vedo addentrandomi nel mezzo? Viene attenuata l'ampiezza di oscillazione e più entro nel mezzo e più tempo ci vuole affinché un massimo arrivi alla profondità richiesta.

Smorzamento e sfasamento

ANCHE SE IL MEZZO È SEMI INFINITO nella direzione x si ha che alla superficie c'è grande oscillazione.
(Periodo estivo parete con grandi escursioni per irraggiamento e convezione)

ammesso il problema monodimensionale

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

alla quale devo imporre le condizioni al contorno.

C_1 = alla temperatura sulla superficie

la seconda condizione è pari alla temperatura media, quindi non si risente delle oscillazioni.

$$T(x,\tau) = t_M + A e^{-kx} \sin(\omega\tau - kx)$$

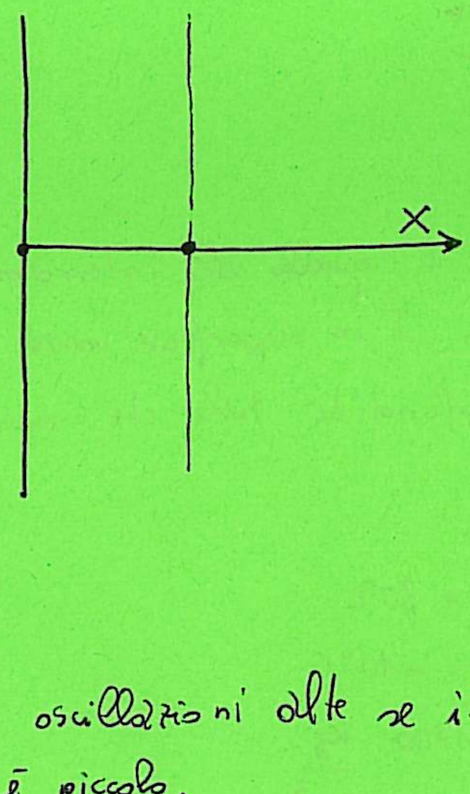
Vediamo cosa è K

è la $\boxed{K = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$

dove a è la diffusività termica

quindi

$$K = \sqrt{\frac{\omega}{2\frac{\lambda}{\rho c}}} \qquad K = \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\lambda}}$$



K identifica una attenuazione che richiede densità alte quindi sono pesanti.

in realtà se si usano isolanti le pareti sono leggere perché è il rapporto ρc

$$K = \sqrt{\frac{\pi\rho c}{\lambda T_{periodo}}}$$

Ci sono oscillazioni alte se il periodo è piccolo.

Se il periodo è lungo devo usare spessori di parete più ampie

$\boxed{\text{Devo avere K ALTO}}$

$$K = \sqrt{\frac{\pi\rho c}{\lambda} f}$$

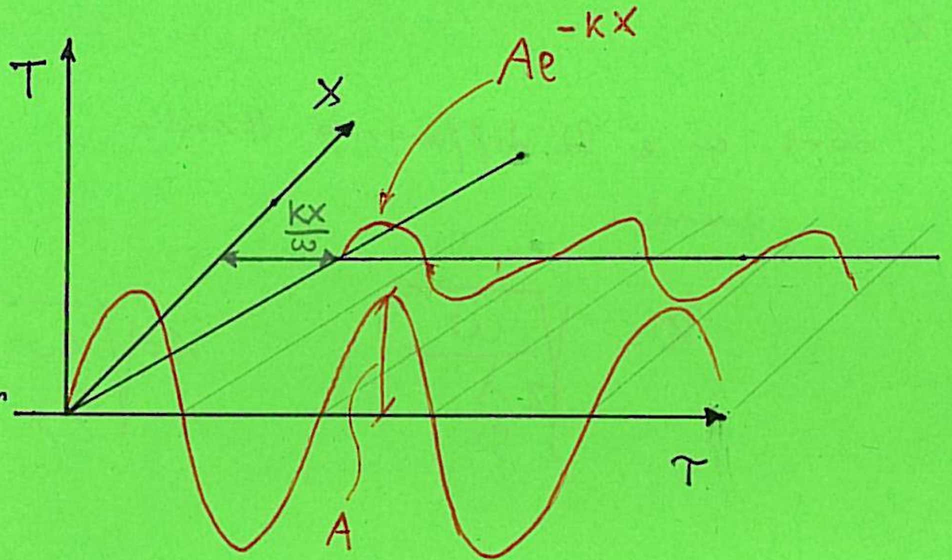
vediamo il ritardo

Quando in superficie ho un minimo ... vediamo quanto impiega ad arrivare alla quota di profondità X.

Per calcolare il ritardo basta annullare il fattore nell'equazione

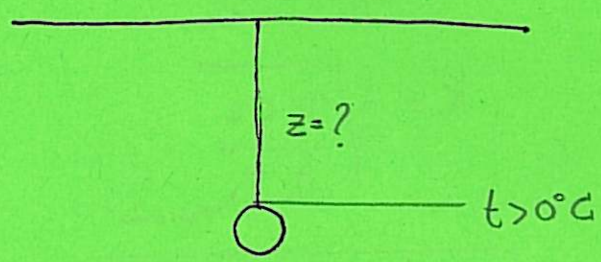
$$\tau = \frac{KX}{\omega}$$

RITARDA DI PIÚ SE K É ALTO



* ESEMPIO

Un caso pratico di mezzo semiinfinito è quello dell'interramento tubi dell'acqua. Nella zona la temp. T in superficie varia da 20°C a -10°C. Devo trovare la profondità tale che non faccia mai andare sottozero la T.



$T_{MAX} = 20°C$

$T_{MIN} = -10°C$

$\rho = 1700 \frac{Kg}{m^3}$

$C = 800 \frac{J}{Kg\,K}$ (del terreno)

$J = 365 \times 24 \times 3600 = 31\,536\,000$ sec

$\lambda = 1,5 \frac{W}{m\,K}$

$$\boxed{T_M = \frac{20-10}{2} = 5°C}$$

$$t(0,\tau) = 5 + 15 \sin\left(1{,}99 \cdot 10^{-7} \cdot \tau\right)$$

$$t(z,\tau) = 5 + 15\, e^{-kx} \cdot \sin(\omega\tau - kx)$$

La condizione più sfortunata è quella relativa al tempo in cui il seno è uguale a -1.

$t(z) \geq 0 \qquad 5 - 15 e^{-kx} = 0$ $\qquad \sin(\omega\tau - kx) = -1$

temperatura del ghiaccio (che non si vuole superare)

$$5 = 15 e^{-kx}$$

$$e^{-kx} = \frac{1}{3} \qquad \ln e^{-kx} = \ln\frac{1}{3} \qquad -kx = \ln\frac{1}{3}$$

quindi

$$x \geq -\frac{\ln\frac{1}{3}}{k}$$

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}} = \sqrt{\frac{1{,}99 \cdot 10^{-7}}{\frac{2 \cdot 1{,}5}{1700 \cdot 900}}} = 0{,}318\ m^{-1}$$

$$x \geq -\frac{\ln\frac{1}{3}}{0{,}318} = 3{,}45\ m$$

sfasamento ovvero ritardo con cui il minimo arriva a 0,9 m di profondità

$$\boxed{\tau = \frac{kx}{\omega}} = \frac{0{,}318 \times 0{,}90}{1{,}99 \times 10^{-7}} = 16{,}5 \text{ giorni}$$

$= 1438190.9$ secondi

ESERCIZIO

Una patata di 8 cm di diametro di $\rho = 1100$ m

$a = 1{,}4 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{sec}$

$T_{iniziale} = 25\,°C$

viene cotta in un forno a $T_f = 170\,°C$

fino a che un sensore posto nel centro della patata indica $T = 70\,°C$

supponendo che il coeff. di scambio termico sia $25 \frac{W}{mK}$.

determinare il tempo necessario per portarla a 70°C

ESERCIZIO COME IL PRECEDENTE CON I DATI : $T_{MAX} = 15$ T_{MIN} -10

OSCILLAZIONE CON PERIODO DI 75 GIORNI 75 è il semiperiodo

conduttività termica $\lambda = 0,7 \frac{W}{mK}$

diffusività termica $a = 1,4 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{sec}$

Υ = semiperiodo

equazione generale

$$T(x,\Upsilon) = t_m + A e^{-Kx} \sin(\omega\Upsilon - Kx)$$

t_m = temperatura media $\frac{15-10}{2} = 2,5$

ora trovo l'ampiezza $A = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = \frac{15+10}{2} = 12,5$

troviamo $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\cancel{2 \cdot 75}} = 0,0419$

troviamo $K = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{0,0419}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^5}} = 0,000387$

$$T(x,\Upsilon) = 2,5 + 12,5\, e^{-0,000387 \cdot x} \sin(0,0419\Upsilon - 0,000387 x)$$

La condizione peggiore si ha per sin = -1 quindi impongo:

$$0,0419 \overset{150}{\Upsilon} - 0,000387 \cdot x = -1$$

$$\sin(0,0419 \cdot 150 - 0,000387 \cdot x) = -1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cancel{-1 = 0,0419 \cdot 150 = -0,000387 \cdot x} \\ &\cancel{-7,285 = -0,000387 \cdot x} \\ &\cancel{\frac{7,285}{0,000387} = x} \end{aligned}}$$

$$0,0419 \cdot 150 - 0,000387 \cdot x = \frac{3}{2}\pi$$

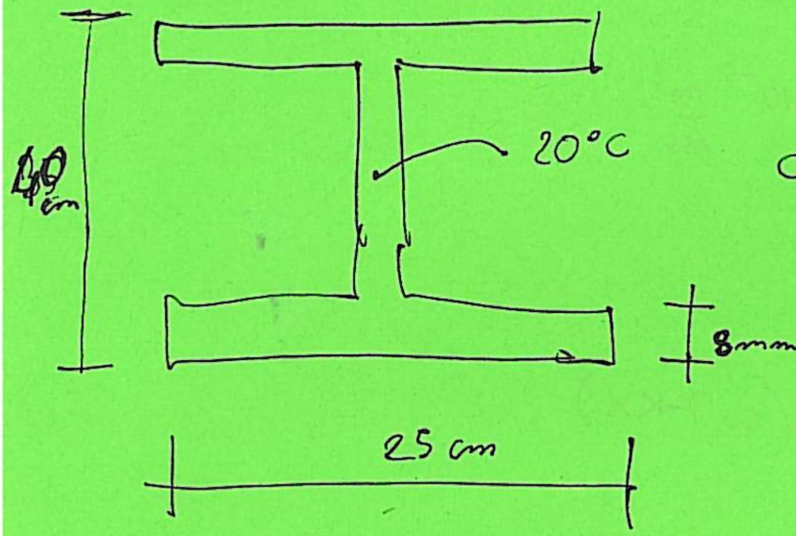
$$0,0419 \cdot 150 - 0,000387 \cdot x = 4,71$$

$$0,0419 \cdot 150 - 4,71 = 0,000387 x$$

$$\frac{0,0419 \cdot 150 - 4,71}{0,000387} = x$$

Per casa ESERCIZIO IPE

$\rho_{acciaio} = 785 \frac{Kg}{m^3}$



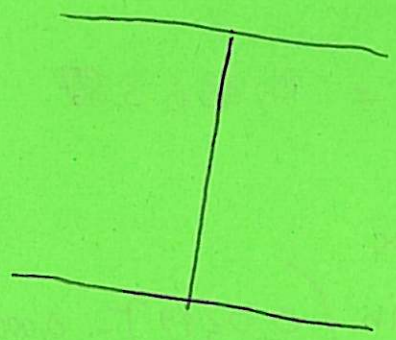
$c = 850 \frac{J}{Kg\,K}$

$h = 30 \frac{W}{m^2 K}$

A CAUSA DI UN INCENDIO l'aria va a $T_2 = 800°C$

Trovare T affinché la trave raggiunge i 450 °C

fare il conto per metro lineare di lunghezza.



$\boxed{(40-16)\times 2} = 48$

$+(25\times 4)-16 = 84$

132

LEZIONE 5   5 AGOSTO 2005

ESERCIZIO

Si rinviene una persona morta alle ore 5 pomeridiane in un ambiente in cui la T è 20°C

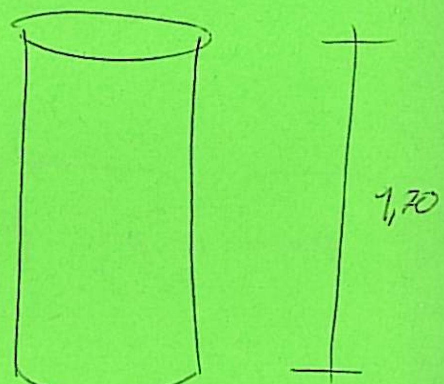
La T del corpo è di 25°C al momento del ritrovamento e si stima che il coefficiente convettivo sia $8 \frac{W}{r}$

Schematizzando il corpo come un cilindro di 30 cm di diametro e l =

Stimare l'ora del decesso.

Si troverà che il numero di Bi sarà maggiore di 0,1 ma lì vicino quindi il valore sarà abbastanza prossima.

$1,80 = 1,70 \cdot \pi \cdot D \qquad \frac{1,80}{1,70 \cdot \pi} = 0,33\,m$

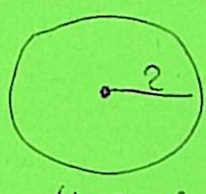


Calore specifico $H_2O = 4187 \; \frac{J \; Kg}{K}$

Temperatura del corpo = 37°C

numero di BioT $= \frac{h \cdot L}{\lambda}$

Raggio ?



$= \frac{8 \cdot \frac{0,33}{2}}{0,608} = 2,17$ (non sarebbe applicabile perché dovrebbe venire $Bi < 0,1$)

conduttività $H_2O = 0,608$

METODO A PARAMETRI CONCENTRATI

$T(\tau) = T_f + (T_i - T_f)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$

T fluido   iniziale del corpo

con $\tau_0 = \frac{\rho V c}{h \cdot S}$ = 0,145

$= \frac{1000 \cdot 0,145 \cdot 4187}{8 \times 1,8}$

$= 42277,3$ sec

Possiamo scrivere che:

$$25 = 20 + (37 - 20)\, e^{-\frac{T}{42277,3}}$$

$$5 = +17\, e^{\frac{-T}{42277,3}}$$

$$e^{-\frac{T}{42277,3}} = +\frac{5}{17} \qquad \frac{-T}{42277,3} = \ln\left(\frac{5}{17}\right)$$

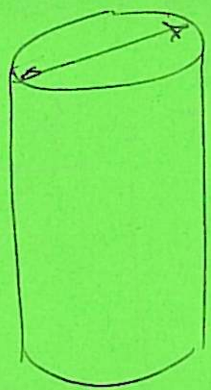
$$T = -42277,3 \cdot (-1,2237)$$

$$= +51737,92 \text{ secondi}$$

$$= 14,37 \text{ ore prima è morto}$$

---

persona più piccola



ESERCIZIO PER CASA

si deve misurare la T di un gas con una termocoppia (piccolo cilindro) la cui giunzione è una sfera di un millimetro di diametro

$\lambda_{sfera} = 35 \frac{W}{mK}$ $\rho = 8500 \frac{Kg}{m^3}$ $c = 320 \frac{J}{Kg\,K}$ $h = 210 \frac{W}{m^2K}$

si vuole trovare il tempo necessario affinché la termocoppia misuri il 99% della temperatura iniziale.

$T_F - T_i$ è la diff. di temp. iniziale.

voglio sapere quando

$$T(\tau) = 0,99 \left(T_F - T_i\right)$$

Risultato [10 secondi]

SCAMBIO TERMICO PER CONVEZIONE

uno dei due corpi è un fluido in movimento: esempio una piastra ventilata

Il fluido vicino alla piastra il fluido rallenta

Lontano dalla piastra vi è $\vec{W}_\infty$, ovvero quella che ci sarebbe se non ci fosse la piastra.

Lo sforzo tangenziale nei fluidi è modificato dalla viscosità

$$\tau_{xy} = \mu \left| \frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} \right|$$

FLUIDI

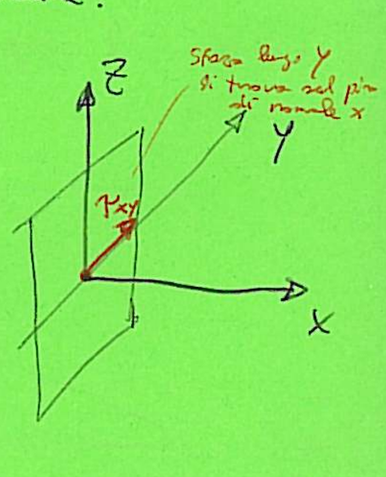
per avere tensione tangenziale deve esserci velocità

$$\tau_x = \mu \left| \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|$$

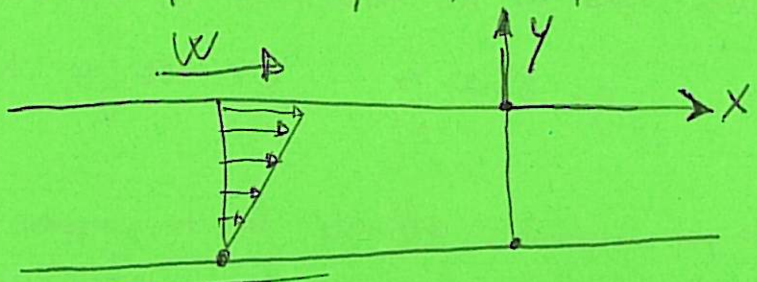
solidi

(basta una deformazione per avere sforzo tangenziale)

con ξ e η spostamento lungo x e lungo y



Se ci mettiamo in una configurazione molto semplice di piano infinitamente esteso, con un fluido sopra, e poi un altro piano



faccio scorrere il piano rispetto all'altro, le particelle di fluido che ci sono tra i due piani vengono trascinate

profilo della velocità.

$$\boxed{\tau = \mu \frac{W}{L}} \qquad \frac{\partial w_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{W}{L}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} = \mu \frac{W}{L}$$

$\boxed{\mu = \text{viscosità}}$ = indice di resistenza del essere messo in scorrimento.

τ è una tensione $\qquad \boxed{\tau = \frac{N}{m^2}}$

$$\mu = \frac{N \cdot s}{m^2} \qquad \text{siccome } N = Kg \frac{m}{sec^2}$$

sostituendo nell'unità di misura

$$\boxed{\mu = \left[\frac{Kg}{m\ sec}\right]}$$

viscosità dinamica

definiamo

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$$

viscosità dinamica

viscosità cinematica

densità

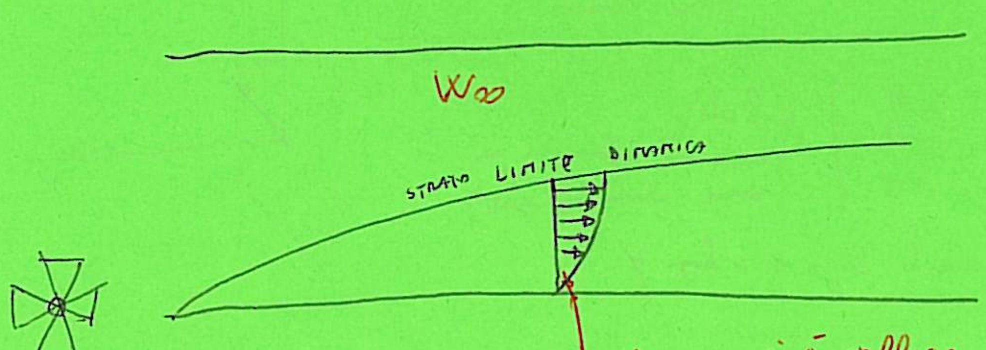
$$\boxed{\nu = \left[\frac{m^2}{s}\right]}$$

viscosità cinematica (ovvero senza la massa)

ha la stessa unità di misura di "a" (diffusività termica.)

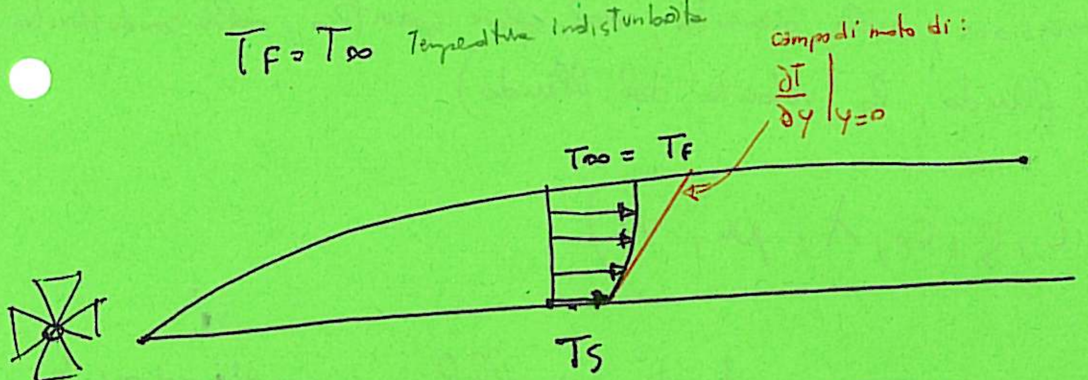
$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{m}{sec^2}$$

vediamo il campo delle velocità



zona in cui vi è influenza degli sforzi tangenziali vediamo cosa succede per la temperatura

$T_F = T_\infty$ temperatura indisturbata



strato limite termico (in genere non ha relazione diretta con lo strato limite dinamico).

convezione forzata perché il moto è indotto da un dispositivo esterno

se invece ci sono gradienti densità causati da gradienti termici allora la convezione è naturale.

$$q = h \cdot S \cdot (T_S - T_F)$$

T_S: sistema; T_F: fluido

$$\boxed{q = -\lambda_F \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \cdot S}$$

se confronto le soluzioni / espressioni ottengo il parametro adimensionale di <u>Nusselt</u>

$$\bar{q} = h\,(T_S - T_F)$$

$$\bar{q} = -\lambda_F \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\frac{h}{\lambda_F} = \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{(T_F - T_S)}$$

(gradiente termico effettivo)

differenza di temperatura (gradiente termico di riferimento)

$$\boxed{Nu = \frac{\frac{L}{\lambda_F}}{\frac{1}{h}}}$$

rapporto tra la resistenza conduttiva e la resistenza convettiva

ESSENDO UN RAPPORTO TRA DUE GRADIENTI RISULTA ESSERE ADIMENSIONALE

$$\boxed{Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda_F} = \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{\frac{(T_F - T_S)}{L}}}$$

L: dimensione caratteristica

h dipende dalla dimensione, dalla densità, dal calore specifico, dalla conduttività, dalla viscosità del fluido, la velocità del fluido)

$$h \left(L, \rho, c_p, \lambda, \mu, w \right)$$

Il movimento può avvenire per strati paralleli o vorticosamente scambiando energia con i piani

MOTO LAMINARE — movimento ordinato per superfici parallele e le particelle non si mescolano tra di loro.
ORDINATO, SUPERFICIALE

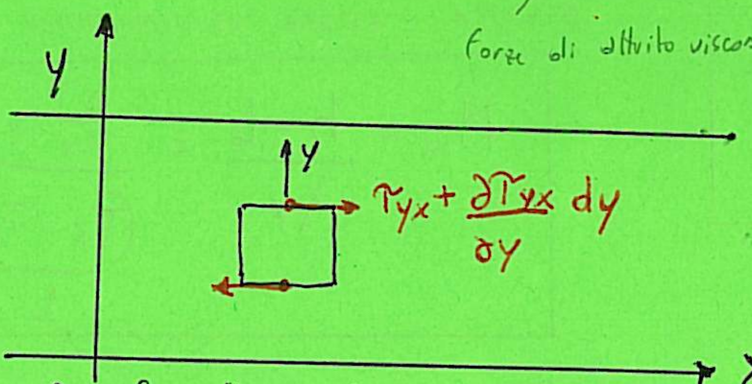
MOTO VORTICOSO — le particelle si mescolano, scambiano tra di loro e con le pareti quantità di moto.
Lo scambio termico convettivo è più efficiente.
(MESCOLAMENTO)

Il passaggio tra moto turbolento e laminare è dato dal numero di Reynolds "Re"

Forze di inerzia

$$\boxed{Re = \frac{F_i}{F_\mu}}$$

Forze di attrito viscoso



Forze viscose

$$F_v = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\, dy\, dz\, dx$$

Il volumetto è dentro lo strato limite $= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dV \quad \left[\mu \frac{w}{L^2} \right]$

si sistema la definizione del numero di NUSSELT

$$Re = \frac{\frac{dFi}{dV}}{\frac{dF\gamma}{dV}} = \frac{\frac{dFi}{dV}}{\frac{\mu w^2}{L}}$$

Per le forze d'inerzia posso fare i seguenti ragionamenti

$$dFi = dm \frac{dw_x}{d\tau} = \rho dV \frac{dw_x}{d\tau}$$

$$w(x, y, \tau)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = \frac{\partial w_y}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_x}{\partial \tau}$$

le componenti lungo y sono nulle nel nostro modello

inoltre è nulla $\frac{\partial w_x}{\partial y} w_y$

$$dFi = \rho dV \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x$$

quindi

$$\frac{dFi}{dV} = \rho \frac{w^2}{L} \qquad \text{quindi } Re = \frac{\frac{\rho w^2}{L}}{\frac{\mu w}{L^2}}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho W L}{\mu}} \Rightarrow \boxed{Re = \frac{WL}{\nu}}$$

- moto laminare per Re < di
- moto turbolento per Re circa 5000

la dimensione caratteristica è il diametro

NUMERO DI Prandlt

mette a confronto lo strato limite dinamico e lo strato limite termico, mette quindi a rapporto la viscosità cinematica con la diffusività termica

$$\boxed{P_r = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu \rho c_p}{\rho \lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda}}$$

$h(\rho, c_p, \mu, \lambda, w, L) = 0$ h dipende da 6 parametri (troppi) con i gruppi adimensionali riduco il numero delle variabili.

$h = f(\rho, c_p, \mu, \lambda, w, L)$

tutte e 6 le grandezze si possono esprimere con le 4 grandezze fondamentali L, M, Θ, T

Teorema di Buckingham o teorema di Π

quando una grandezza può essere espressa con m grandezze a loro volta esprimibili con n grandezze fondamentali allora posso esprimere con

$m - n$ raggruppamenti adimensionali

essi sono:

Nu, Re, P_r

$$\boxed{Nu = f(Re, P_r) \cong c \cdot Re^m \cdot P_r^n}$$

Quando ho convezione forzata relativamente a una specifica geometria, il manuale da i coefficienti, io devo calcolare Nu, Pr, e Re. a seconda del tipo di moto.(laminare o turbolento) va quindi calcolato per primo il numero di Re per capire se il moto è laminare o turbolento

DITTUS BOELTER

MOTO TURBOLENTO

$$NU = 0,023\, R_e^{0,8}\, P_r^{0,4}$$

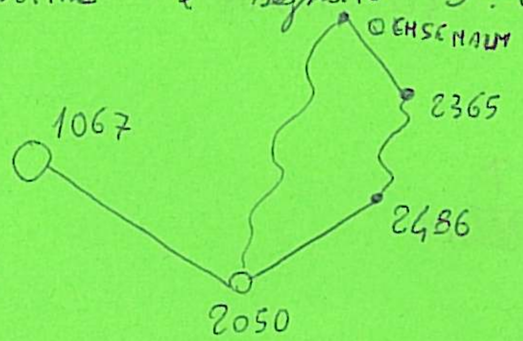
nella convezione Naturale cambia che compare un indice di galleggiamento

si usa il numero di GRASCHOF.

LA PASSEGGIATA (DOMENICA)

PARTENZA DAL PARK ORE 8:15
"acqua arena"

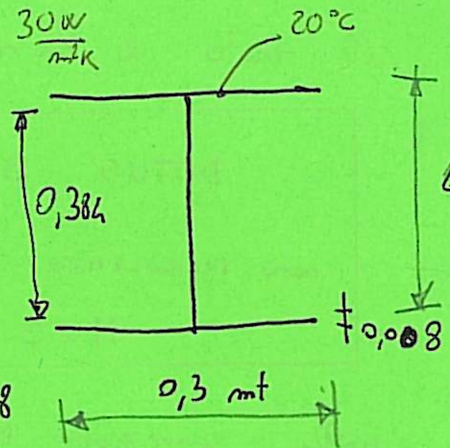
Prendiamo l'Ovovia a Sant'Andrea fino a 2050 mt di quota
Si sale fino alla cima di monte telegrafo a 2486 mt
Si resta in cresta fino a 2365 dove c'è nei pressi un RIFUGIO
OCHSEMALM (dove mangiamo) poi da lì troviamo il
raccordo per l'ovovia
Sulla cartina è segnato 3 ÷ 4 ore di andata e ritorno



$c = 850 \frac{J}{Kg\,K}$ $\qquad \rho = 7850 \frac{Kg}{m^3}$

Per esercizio della IPE si usa il metodo di risoluzione a parametri concentrati

$h_{conv} = 30 \frac{W}{m^2 K}$



$$T(\tau) = T_F + (T_1 - T_F) \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{\rho c V}{HS}} = R_T C$$

Volume trave

$$V = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}008 + 0{,}384 \cdot 0{,}008 = 0{,}00787 = 7{,}87 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Superficie ~~perimetro~~ della sezione. $S = 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}146 \cdot 4 = 1{,}984\ m^2$

Quando si innesca l'incendio la T_F va a 800 °C

$$T(\tau) = T_F + (T_1 - T_F) \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$\boxed{450 = 800 + (20 - 800) \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}}$$

con $\tau_0 = \frac{\rho c V}{h \cdot S} = \frac{7850 \cdot 850 \cdot 7{,}872 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 1{,}984} = 882.491$

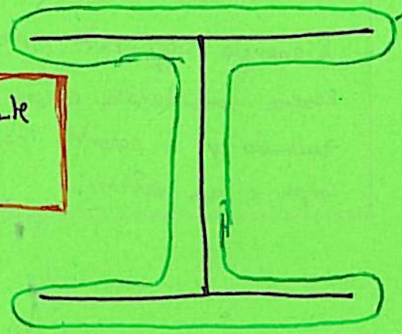
Sostituisco il τ_0

$$450 = 800 + 780 \cdot e^{-\frac{\tau}{882{,}491}}$$

$$450 - 800 = 780\ e^{-\frac{\tau}{882{,}491}}$$

$$\ln \frac{350}{780} = -\frac{\tau}{882{,}49} \qquad \tau = -\ln \frac{350}{780} \cdot 884 = 707 \text{ secondi}$$

supponiamo di volere aumentare la durata in incendio.
si riveste il profilato metallico



ρ trascurabile

λ molto ~~bassa~~ = $\lambda = 0{,}037 \ \frac{W}{mK}$

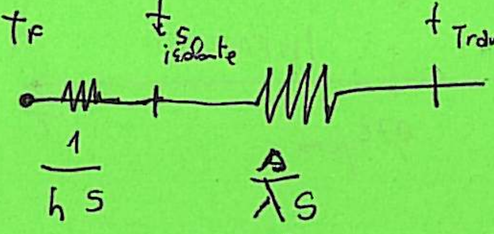
$\boxed{\text{Spessore isolante } 1{,}5 \text{ cm}}$

Si cambia il problema.

ρ e 25 ÷ 30 kg al metro cubo quindi non ha capacità termica ma solo resistenza

Il fluido si trova ancora a 450°

$\xrightarrow{q}$ — questo è uguale al $q \ h S(t_F - t_{s_{is}})$ perché l'isolante è supposto a capacità nulla (quindi è come una resistenza)



$$q = hS(t_F - t_{s_{isol}})$$

$$\frac{t_F - T_{trave}}{R_h + R_{is}} = \frac{T_F - T_{trave}}{\frac{1}{hS} + \frac{\Delta_{isol}}{\lambda_{isol} S}} = q$$

superficie esterna dell'isolante

superficie interna isolante

$$\boxed{q = \rho_{Trave} c_{Trave} V_{trave} \frac{d T_{Trave}}{d\tau}}$$

$$\frac{T_F - T_T}{\frac{1}{hS} + \frac{\Delta_{isol}}{\lambda S}} = (\rho c V) \frac{d T_T}{\partial \tau}$$

Resistenza della trave coibentata

$$\boxed{T(\tau) = T_F + (T_i - T_F) e^{-\frac{\tau}{R_T C}}}$$

$c = \rho c V = 7850$

SCAMBIO TERMICO PER IRRAGGIAMENTO (RADIAZIONE TERMICA)

NON RICHIEDE IL MEZZO ED È PIÙ EFFICIENTE SE ESSO MANCA ED AVVIENE PER RADIAZIONE.

I Fenomeni si studiano con le teorie

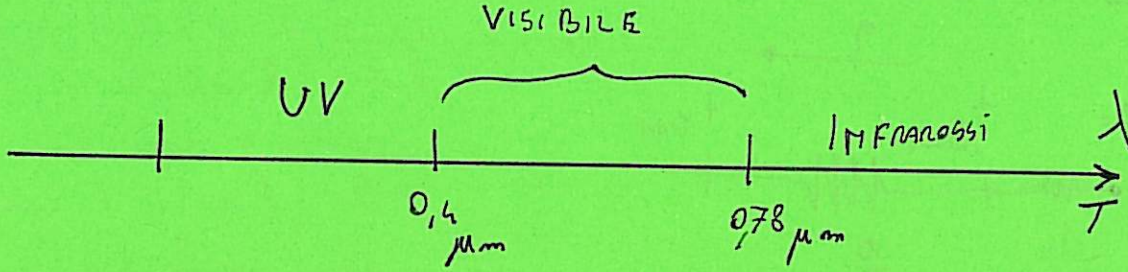
- Corpuscolari → (Plank)
- Ondulatori → (Maxwell)

NOTA: L'energia raggiante non può essere considerata calore neppure quando vi è scambio tra un corpo e un altro.

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

c = velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica.

CAMPO DI LUNGHEZZA D'ONDA



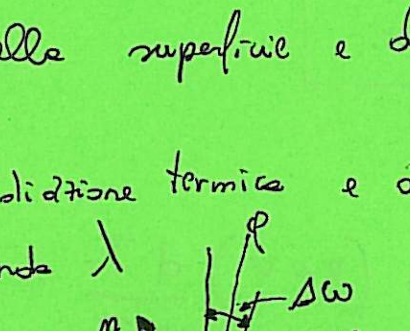
Il grosso della radiazione termica è interessata da 0,1 μm in su quindi tutto il visibile e l'infrarosso.

bisogna tenere presente delle caratteristiche delle superficie e della loro posizione reciproca.

Bisogna tenere conto delle superficie e delle caratteristiche radioattive.

Aspetto direzionale della radiazione termica e aspetto spettrale ovvero relativo alla lunghezza d'onda λ

- IRRAGGIAMENTO
- RADIAZIONE TERMICA



Individuiamo una superficie immaginaria ed in essa un altro elementino ΔS e la normale per P che indichiamo con n

$\boxed{\Delta\omega = \text{angolo solido della direzione elementare } \varphi}$

Potenza termica $\Delta q_n \cdot \omega\lambda$

DEFINIZIONE: intensità monocromatica della radiazione $h_{\lambda\varphi}$

$$h_{\lambda\varphi} = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\lambda \to 0 \\ \Delta\omega \to 0}} \frac{\Delta q_{A\omega\lambda}}{\Delta\lambda \Delta A \cos\beta \Delta\omega} \quad \left[\frac{W}{m^3 \text{ (steradianti)}}\right]$$

si può non mettere

è la derivata parziale terza di:

$$= \frac{\partial^3 q_{A\omega\lambda}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega \, \partial\lambda}$$

INTENSITÀ MONOCROMATICA DELLA RADIAZIONE (SULLA MIA SUPERFICIE IMMAGINARIA)

Se non ci interessa l'aspetto spettrale, analizziamo la potenza termica in ΔA nell'angolo solido $\Delta\varphi$

posso definire l'intensità globale della radiazione H_φ

$\Delta q_{A\omega}$

q

$$H_\varphi = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\omega \to 0}} \frac{\Delta q_{A\omega}}{\Delta A \cos\beta \Delta\omega}$$

manca il λ perché considero tutte le lunghezze d'onda dello spettro

$$= \frac{\partial^2 q_{A\omega}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega} \quad \left[\frac{W}{m^2 \text{ steradianti}}\right]$$

si può elidere

$$\boxed{H_\varphi = \int_0^\infty h_{\lambda\varphi} \, d\lambda}$$

consideriamo una superficie reale che emette onde elettromagnetiche.

chiamo intensità monocromatica DELL'EMISSIONE $i_{\lambda\varphi} = \lim\limits_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\omega \to 0 \\ \Delta\lambda \to 0}} \frac{\Delta q_{A\omega\lambda}}{\Delta A \cos\beta \, \Delta\lambda \, \Delta\omega}$

si usa sempre il $\cos\beta$ perché l'intensità va sempre considerata $\perp$ alla superficie in esame.

$$i_{\lambda\varphi} = \lim\limits_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\omega \to 0 \\ \Delta\lambda \to 0}} \frac{\Delta q_{A\omega\lambda}}{\Delta A \cos\beta \, \Delta\lambda \, \Delta\omega} = \frac{\partial^3 q_{A\omega\lambda}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega \, \partial\lambda}$$

Intensità monocromatica dell'emissione

$$i_{\lambda\varphi} = \frac{\partial^3 q_{A\omega\lambda}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega \, \partial\lambda}$$

l'intensità globale dell'emissione I_φ è data da:

$$I_\varphi = \lim\limits_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\omega \to \omega}} \frac{\Delta q_{A\omega}}{\Delta A \cos\beta \, \Delta\omega} = \frac{\partial q_{A\omega}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega}$$

INTENSITA GLOBALE DELL'EMISSIONE.

$$I_\varphi = \frac{\partial q_{A\omega}}{\partial A \cos\beta \, \partial\omega}$$

Per passare da una all'altra si integra

INDICO EMISSIONE GLOBALE EMISFERICA DELLA SUPERFICIE

non c'è più l'angolo sferico

EMISSIONE monocromatica emisferica

$$e_\lambda = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta\lambda \to 0}} \frac{\Delta q_A}{\Delta A \, \Delta\lambda} = \frac{\partial^2 q_{A\lambda}}{\partial A \, \partial\lambda}$$

$$E = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q_A}{\Delta A} = \frac{\partial q_A}{\partial A}$$

$$\boxed{E = \int_0^{+\infty} e_\lambda \, d\lambda}$$

$$e_\lambda = \int_0^{2\pi} i_{\lambda\varphi} \cos\beta \, d\omega$$

stefan Boltzmann

$$\boxed{(E)_n = \sigma_n \cdot T^4}$$

La superficie emette complessivamente questa radiazione.

La superficie nera è quella che emette più radiazione e quindi le altre le confrontiamo ~~con~~ quella.

$$\boxed{\sigma_n = 5,68 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}}$$

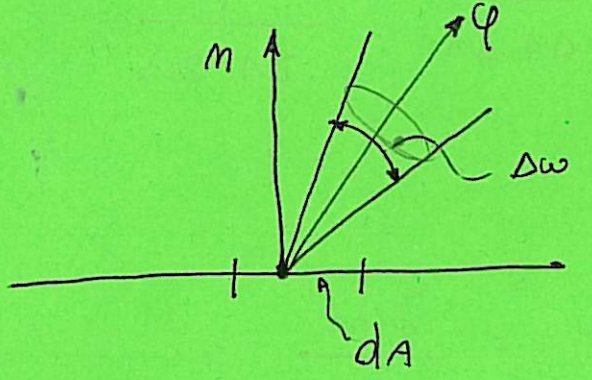
Definizione dei coefficienti di

a ASSORBIMENTO

r RIFLESSIONE

t TRASMISSIONE

MONOCROMATICI E DIREZIONALI



$\boxed{\Delta q_{A\omega\lambda}}$ potenza termica che incide in dA secondo l'angolo φ di lunghezza d'onda λ

una parte di questa potenza sarà TRASMESSA, una parte assorbita e una parte riflessa.

Assorbito

$$\boxed{a_{\lambda\varphi} = \frac{(\Delta q_{A\omega\lambda})_a}{(\Delta q_{A\omega\lambda})_i}}$$

Assorbito

incidente

Riflesso

$$\boxed{r_{\lambda\varphi} = \frac{(\Delta q_{A\omega\lambda})_r}{(\Delta q_{A\omega\lambda})_i}}$$

trasmessa

$$\boxed{t_{\lambda\varphi} = \frac{(\Delta q_{A\omega\lambda})_t}{(\Delta q_{A\omega\lambda})_i}}$$

$$\boxed{a_{\lambda\varphi} + r_{\lambda\varphi} + t_{\lambda\varphi} = 1}$$

(Per radiazione uniformemente distribuita.)

Se non dipendessero dalla lunghezza d'onda potrei definire questi coefficienti GLOBALI ED EMISFERICI (corpi grigi, ovvero le radiazioni non dipendono dalla lunghezza d'onda λ) corpi opachi ($t = 0$)

corpi grigi ($t = 1$) (le proprietà radiattive non dipendono da λ)

Primo modello di studio della radiazione

il corpo nero : ovvero quel corpo che con riferimento alla rad. incidente che assorbe integralmente la radiazione che vi incide

$$\boxed{a_{\lambda\varphi} = 1 \qquad a_\lambda = 1 \qquad a = 1}$$

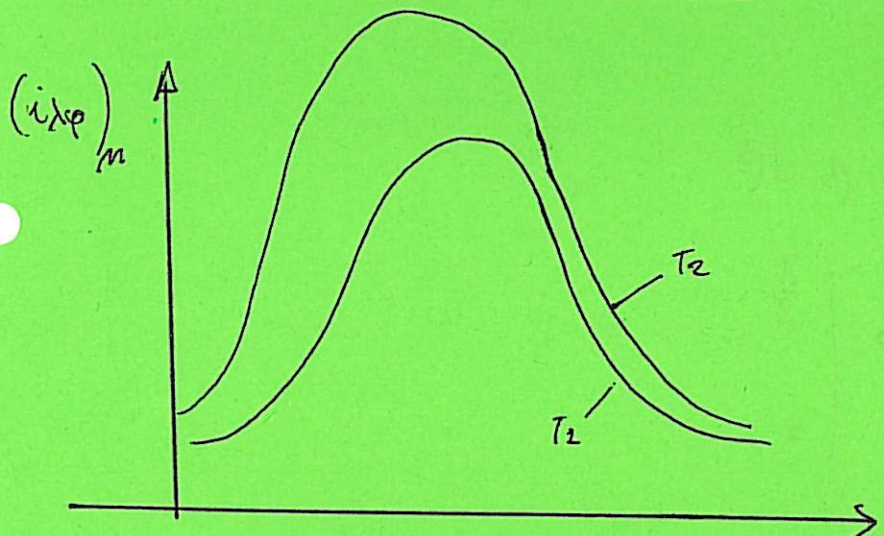
condizione di assorbimento integrale dell'incidente.

con riferimento a una certa temperatura è quello che emette la massima potenza termica con riferimento ad una data t.

indipendente dalla direzione φ

$$\boxed{\left(i_{\lambda\varphi}\right)_n = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)}}$$

intensità monocromatica dell'emissione (dipende dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda).



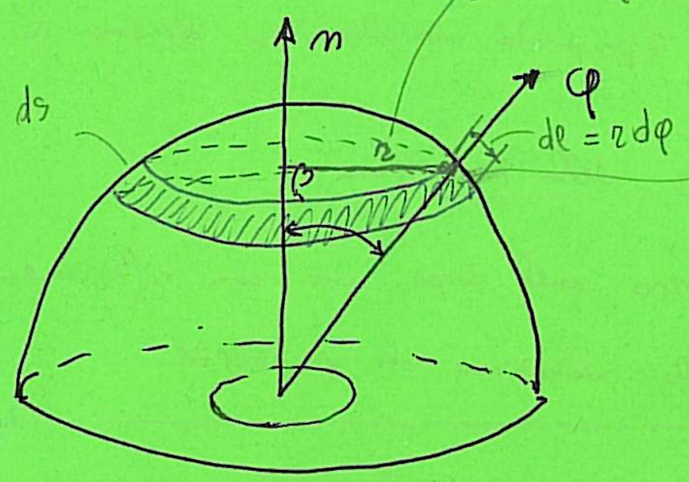
Proviamo a vedere come si comporta l'emissione monocromatica.

$$e_\lambda = \int_0^{2\pi} i_{\lambda\varphi} \cos\beta \, d\omega$$

Legge di LAMBERT per i corpi neri $i_{\lambda\varphi}$ è costante infatti non dipende dalla direzione φ (quindi non dipende da β)

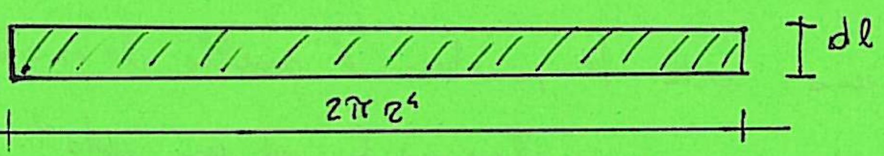
$$e_\lambda = \int_0^{2\pi} i_{\lambda\varphi} \cos\beta \, d\omega \qquad e_\lambda = i_{\lambda\varphi} \int_0^{2\pi} \cos\beta \, d\omega$$

svolgiamo l'integrale



superficie di calotta sferica

$ds =$



$$d\omega = \frac{ds}{r^2} = \lambda$$

$$= 2\pi \sin\beta\, d\varphi$$

$$e\lambda = i_{\lambda\varphi} \int_0^{2\pi} \cos\beta\, d\omega$$

$$= i_{\lambda\varphi} \int_0^{2\pi} 2\pi \sin\beta \cos\beta\, d\varphi$$

integra nella direzione

$$= i_{\lambda\varphi} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \cos\beta\, d\beta$$

integra nell'angolo

$$= 2\pi i_{\lambda\varphi} \left. \frac{\sin^2\beta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi i_{\lambda\varphi}$$

quindi per il corpo nero

$$\boxed{(e\lambda)_n = \pi (i_{\lambda\varphi})_n}$$

Ricaviamo l'emissione emisferica globale del corpo nero

$5,68 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ STEFAN BOLTZMANN

$$E_n = \int_0^{+\infty} (e\lambda)_n \, d\lambda = \sigma_n T^4$$

riassumendo

$$\boxed{(i\lambda\varphi)_n = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1 \right)}}$$ (PLANCK)

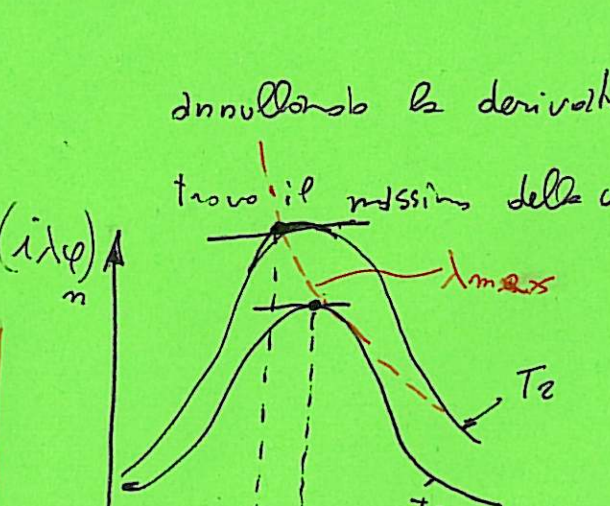
$$(e_\lambda)_n = \pi (i\lambda\varphi)_n$$

$$(E)_n = \int_0^{+\infty} (e\lambda)_n \, d\lambda = \sigma_n T^4$$ (LEGGE DI STEFAN BOLTZMAN)

Il massimo dell'emissione la posso trovare in corrispondenza della ~~massima~~ lunghezza d'onda, x

$$\left(\frac{\partial (i\lambda\varphi)_n}{\partial \lambda} \right)_T = 0$$

annullando la derivata trovo il massimo della curva



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Legge di Wien} \\ \lambda_{max} \cdot T = 2898 \ \mu m K\end{array}}$$

Il sole può essere pensato come un corpo nero alla temperatura T = 6000 K quindi il massimo dell'emissione si ha per

$\lambda_{max} \cdot 6000 \cong 3000 \ \mu m K$ $\quad \lambda_{max} = 0,5 \ \mu m$ quindi la massima emissione è nel visibile

Emissione di una parete.

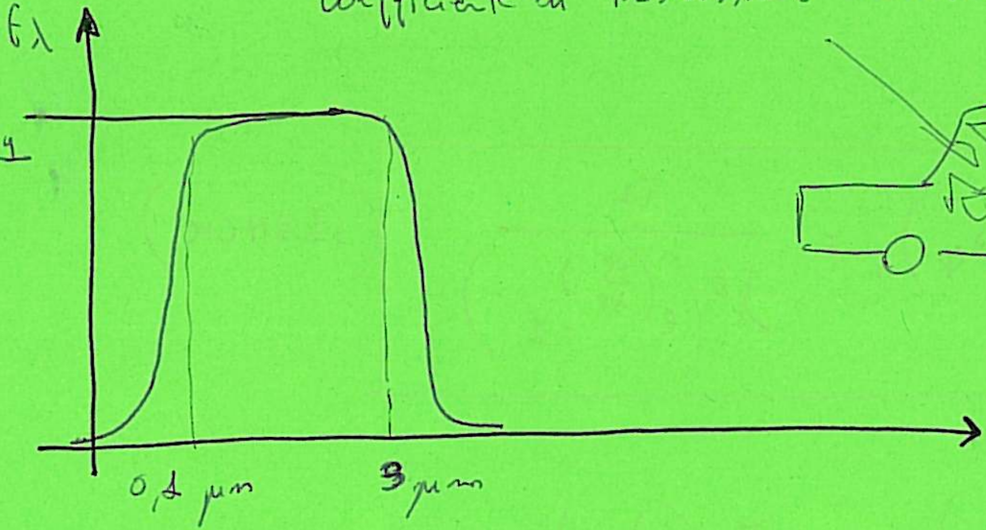
$\lambda_{max} \cdot 293,15 \cong 3000 \ \mu m \cdot K$

$\lambda_{max} \cong 10 \mu m$

La parete ha la massima emissione nel campo degli infrarossi.

coefficiente di trasmissione del vetro

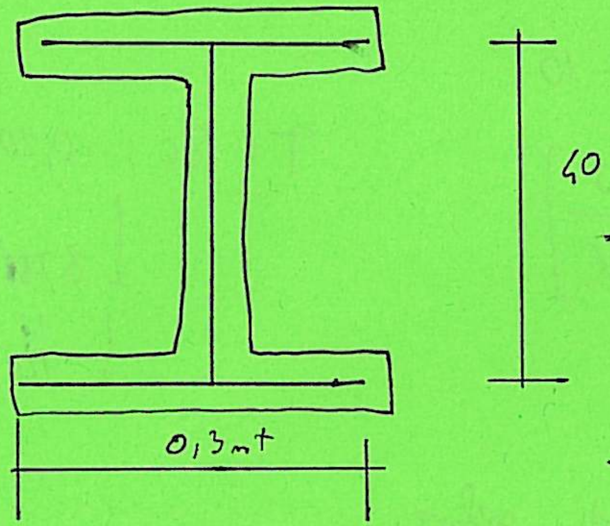
t_λ



LEZIONE n° 8 martedì 09/08/2005 (ESERCIZI)

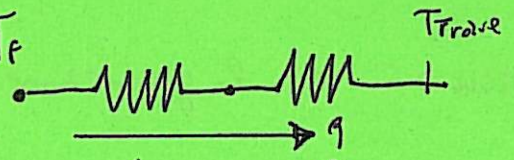
$T_{iniziale\ trave} = 20°$

$T_{trave} = 450°C$ $\quad T_F = 800°C$



$\lambda = 0{,}037$

tutto lo scambio termico convettivo va a riscaldare la trave perché l'isolante ha una ρ molto basso $20 \div 30\ Kg/m^3$



$$\frac{1}{h_S} \qquad \frac{s}{\lambda_{isol} \cdot S}$$

Spessore isolante 1,5 cm

0,015 mt (spessore in metri)

$$\boxed{S = 0{,}33 \cdot 2 + 0{,}43 \cdot 2 + 0{,}146 \cdot 4 = 2.104\ m^2}$$

superficie di scambio

$$q = \frac{T_F - T_{trave}}{\frac{1}{h_S} + \frac{s}{\lambda_{isol} \cdot S}} =$$

$$\frac{dU}{d\tau} = m c \frac{dT}{d\tau}$$

$$\boxed{q = \frac{T_F - T_{trave}}{\underbrace{\frac{1}{h_S} + \frac{s}{\lambda_{isol} \cdot S}}_{R_T}} = \rho V c \frac{dT}{d\tau}}$$

$$-\frac{1}{R \rho V c} \int d\tau = \int \frac{d(T_T - T_F)}{(T_T - T_F)}$$

$$-\frac{1}{Rc} \tau = \int_{T=20°}^{T=450°}$$

$$-\frac{1}{Rc} \tau = \ln \frac{450 - 800}{20 - 800}$$

la resistenza totale è

$$R = \left(\frac{1}{30} + \frac{0{,}015}{0{,}037} \right) \frac{1}{2{,}104}$$

$$= 0{,}208 \left[\frac{K}{W} \right]$$

La capacità termica (senza isolante perchè privo di inerzia)

$$C = \rho c V = 7850 \cdot 850 \cdot 7{,}872 \cdot 10^{-3} = 52525{,}92 \left[\frac{J}{K}\right]$$

$$\tau = RC = -0{,}208 \cdot 52525{,}92 = 8759{,}17 \text{ sec} = 145{,}9 \text{ min}$$

ESERCIZIO: Con la generazione di calore.

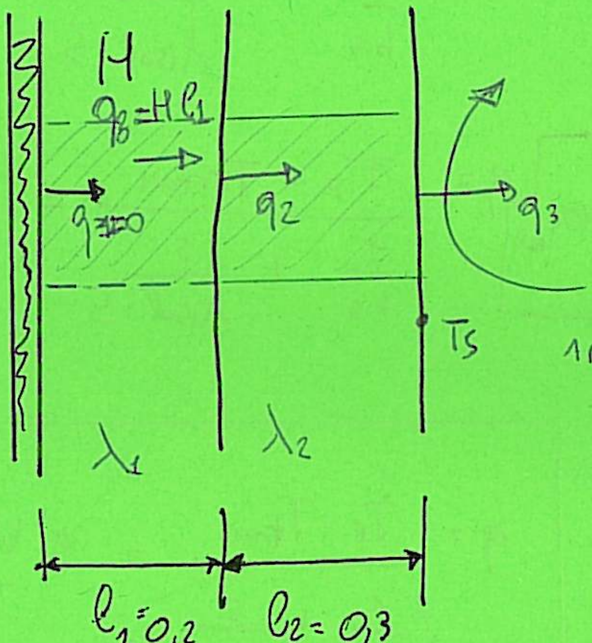
$H = 10\,000$

$h = 23 \frac{W}{m^2 K}$

$T_F = 20°C$

$\lambda_1 = 10 \frac{W}{mK}$

$\lambda_2 = 30 \frac{W}{mK}$



$q_g = H l_1 = 2000$

APPLICO IL Primo principio della termodinamica

$q_2 = q_3$ perchè in regime stazionario non può aumentare la temperatura

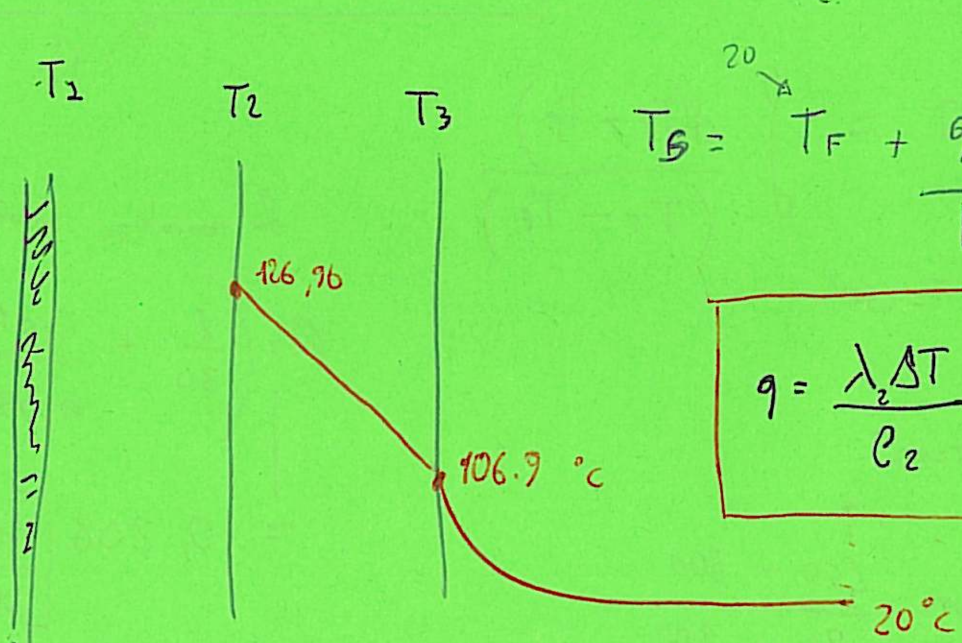
$$q_3 = h\,(T_S - T_f)$$

$$T_S = T_F + \frac{q_3}{h}$$

$T_F = 20$, $q_3 = 2000$, $h = 23$

$$\boxed{q = \frac{\lambda_2 \Delta T}{l_2} = \frac{30\,(T_2 - T_S)}{0{,}3}}$$

$T_2 = 126.96°C$



(56)

con l'equazione della conduzione ridotta all'equazione di Poisson ricavo la T

$$H + \lambda \frac{d^2T}{dT} = 0$$

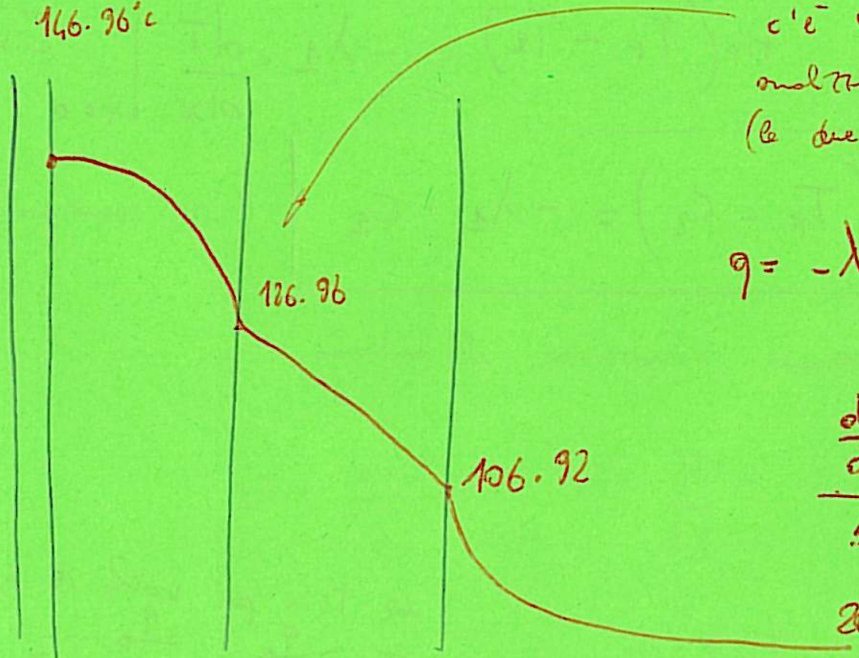
$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{H}{\lambda}$$ integro due volte

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{H}{\lambda}x + C_1 \Rightarrow T(x) = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$$

$x=0 \quad q=0 \qquad q(0) = -\lambda \frac{dT}{dT}\Big|_{x=0} \Rightarrow -\lambda C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$x = 0{,}2 \qquad T(0{,}2) = 126{,}96 = -\frac{H}{2\lambda}\, 0{,}2 + C_2$

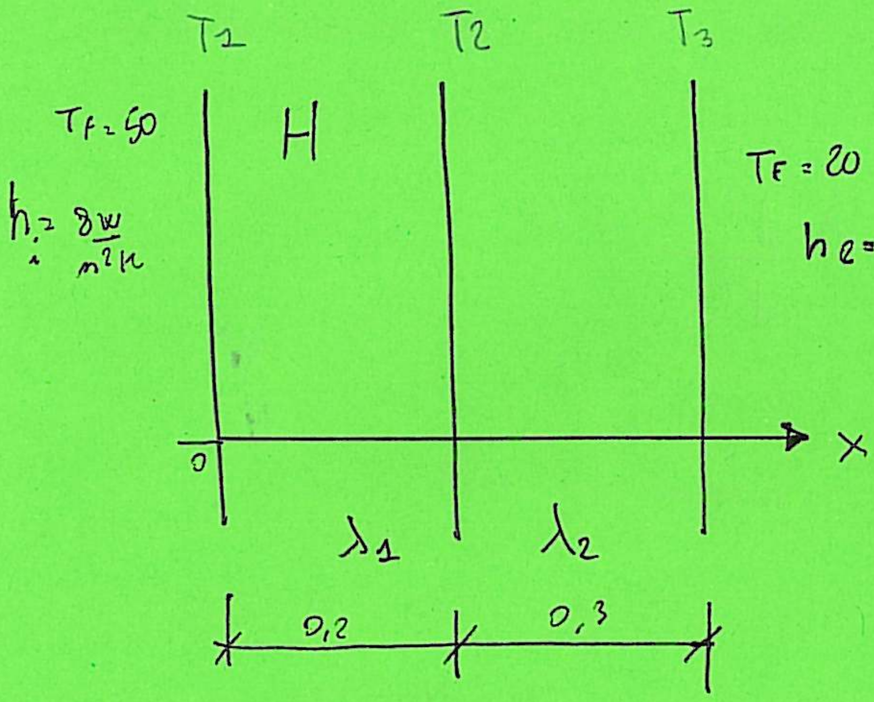
$C_2 = 146{,}96\ °C$



c'è una cuspide come si vede analizzando le tangenti alla curva (le due derivate)

$$q = -\lambda_1 \frac{dT}{dx}\Big|_{0,2^-} = -\lambda_2 \frac{dT}{dx}\Big|_{0,2^+}$$

$$\frac{\frac{dT}{dx}\Big|_{0,2^-}}{\frac{dT}{dx}\Big|_{0,2^+}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$



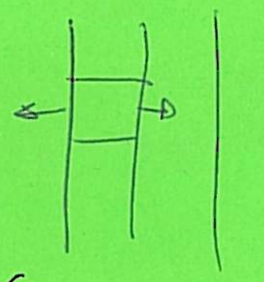
$h_e = 23 \frac{W}{m^2 K}$

$\lambda_1 = 10 \frac{W}{mK}$

$\lambda_2 = 30 \frac{W}{mK}$

$H = 10\,000 \frac{W}{m^3}$

il calore esce da entrambi i lati



$$\frac{d^2T}{dT^2} + \frac{H}{\lambda} = 0 \qquad \frac{dT}{dT} = -\frac{H}{\lambda}x + C_1$$

$$t(x) = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$$

ci sono le condizione al contorno di 3ª specie (conduzione / convezione)

$x = 0$
$$h_o(T_F - T_1) = -\lambda_1 \cdot \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}$$ condizione al contorno di 3ª specie

1

da cui $\boxed{h(T_F - C_2) = -\lambda_1 \cdot C_1}$ Prima condizione al contorno

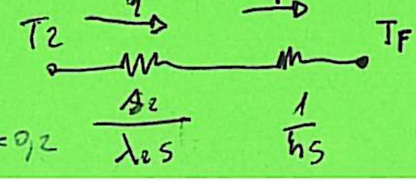
ora scrivo la seconda condizione al contorno.

$$T_2 = -\frac{H}{2\lambda}0,2^2 + C_1\, 0,2 + C_2$$

dal Tc in poi vale il modello

$$q = \frac{(T_2 - T_F)}{\frac{1}{hS} + \frac{s}{\lambda_1 S}} = -\lambda_1 \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0,2}$$

s ← spessore, S ← superficie



$$\frac{-\frac{H}{2\lambda_1}\,0{,}2^2 + c_1\,0{,}2 + c_2 - T_F}{\frac{1}{h} + \frac{0{,}2}{\lambda_2}} = \underbrace{-\lambda_1\left(-\frac{H}{\lambda_1}\,0{,}2 + c_1\right)}_{-\lambda_1 \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0{,}2}}$$

$$= + H \cdot 0{,}2 - \lambda_1 c_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{h\left(-T_F + c_2\right)}{\lambda_1} = c_1 \\[2ex] \dfrac{-\frac{H}{2\lambda}\,0{,}2^2 + c_1\,0{,}2 + c_2 - T_F}{\underbrace{R_{TOT}}_{\text{(DA T2 a fuori)}}} = \underbrace{H \cdot 0{,}2}_{\text{potenza totale}} \underbrace{- \lambda_1 c_1}_{\text{è la potenza entrante dal lato sinistro}} \end{cases}$$

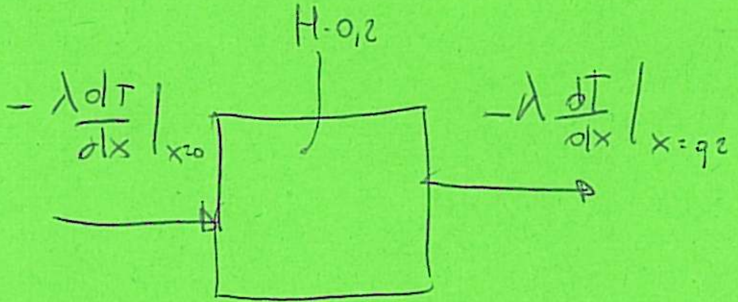
Potenza che esce da destra

Tutto è il bilancio del primo principio della termodinamica

$$t_1 = c_2 = 111\,°C$$

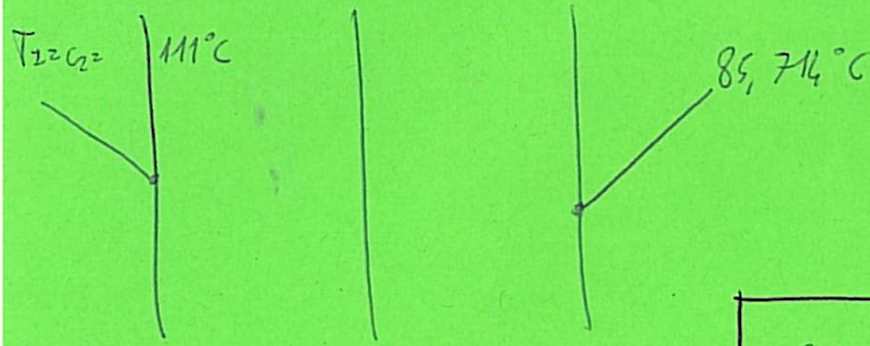
$$c_1 = 48{,}857\,°C$$

isolo il tratto per vedere se il bilancio termico è soddisfatto.



$$-\lambda_1 \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} + q_g = -\lambda_1 \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0{,}2}$$

$-\lambda_1 c_1 + 2000 = H \cdot 0{,}2 - c_1 \lambda_1$ si annulla (deve venire $=0$)



verifico

$2000 = 23(85{,}714 - 20) + 8(111 - 50)$

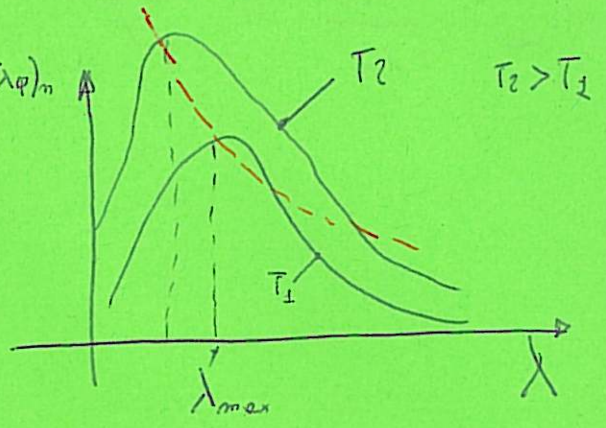
$$\boxed{2000 = 23(85{,}714 - 20) + 8(111 - 50)}$$

Programma di calcolo STRAUSS

LEZIONE 8

09/08/2005 Continuazione della spiegazione sulla radiazione

LAMBERT $(i\lambda\varphi)_n$



$$(i\lambda\varphi)_n = \frac{C_1}{\left(\lambda^5 e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)}$$

per trovare la temperatura della curva basta derivare

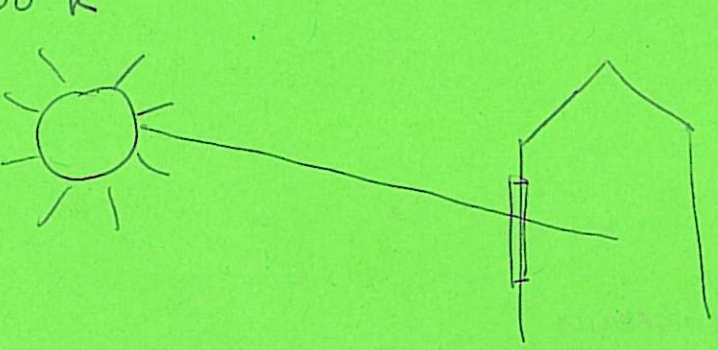
$$\left(\frac{\partial (i\lambda\varphi)_n}{\partial \lambda}\right)_T = 0 \Rightarrow \lambda_{max} T = 2898 \mu m K$$ legge di Wien

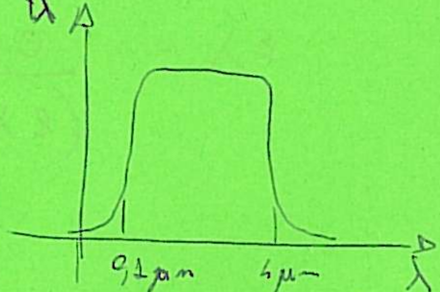
quella che giustifica l'effetto serra

$$(e\lambda)_n = \pi (i\lambda\varphi)_n$$

$$(E)_n = \int_0^{+\infty} e\lambda \, d\lambda = \sigma_n T^4$$ STefan Boltzmann

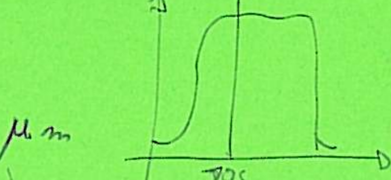
Il sole può essere visto come un corpo nero alla temperatura di 6000 K





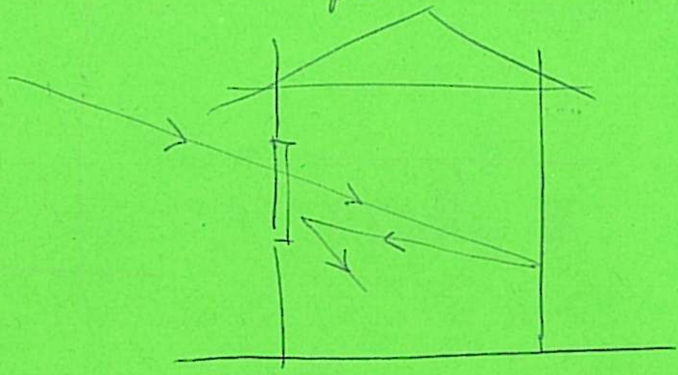
caratteristica del vetro in funzione di λ

$$\lambda_{max \, (sole)} = \frac{3000}{6000} = 0,5 \, \mu m$$



quindi il sole entra e scalda le pareti interne (anche 40° celsius) e ① poi cominciano ad emettere

$$\lambda_{max} = \frac{3000}{310} \simeq 10\ \mu m$$ che è fuori dalla banda passante quindi non può uscire



Il corpo nero è il corpo che emette la massima potenza termica quindi i corpi reali si confrontano con esso attraverso le emissività.

EMISSIVITÀ monocromatica ~~[illegible]~~ direzionale.

$$\varepsilon_{\lambda\varphi} = \frac{i_{\lambda\varphi}}{(i_{\lambda\varphi})_n}$$

del corpo reale

del corpo nero alla stessa temperatura

EMISSIVITÀ MONOCROMATICA EMISFERICA

$$\varepsilon_\lambda = \frac{e_\lambda}{(e_\lambda)_n}$$

EMISSIVITÀ GLOBALE EMISFERICA

$$\varepsilon_\varphi = \frac{I_\varphi}{(I_\varphi)_n}$$

$$\varepsilon = \frac{E}{(E)_n} = \frac{E}{\sigma_n T^4}$$

Tutte le precedenti sono sempre minori di 1

LEGGI DI KIRCHHOFF (sono 3)

1) l'emissività monocromatica direzionale è uguale al coefficiente di assorbimento monocromatico direzionale (vale sempre)

$$\boxed{\varepsilon_{\lambda\varphi} = a_{\lambda\varphi}}$$

2) l'emissività monocromatica emisferica è uguale al coefficiente di assorbimento monocromatico emisferico vale se la radiazione è uniformemente distribuita su tutte le direzioni

$$\boxed{\varepsilon_\lambda = a_\lambda}$$

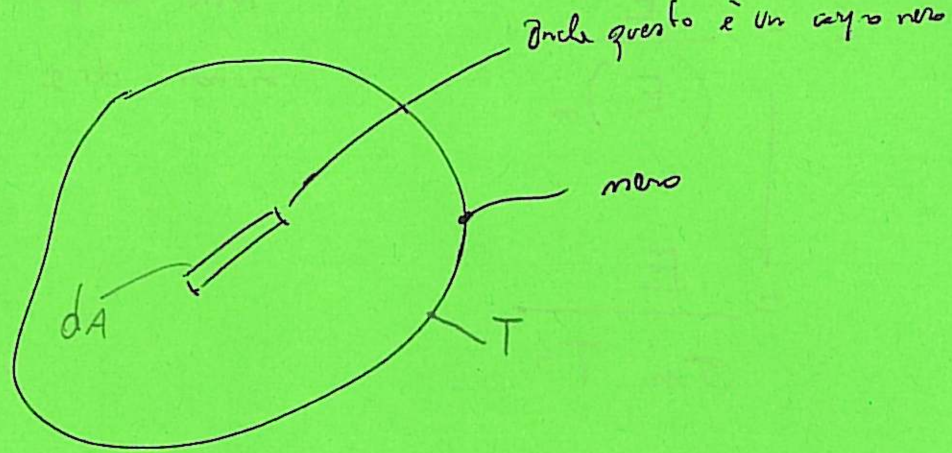
3) Se si ammette che il comportamento delle superfici sia indipendente da λ (corpo grigio) allora vale

si applica sempre questa anche se ha delle ipotesi restrittive

$$\boxed{\varepsilon = a}$$

vale anche se la radiazione che incide ha la stessa radiazione spettrale del corpo grigio alla stessa temperatura

DIMOSTRAZIONE LEGGI DI K. SECONDA $\Rightarrow$ $\varepsilon_\lambda = a_\lambda$



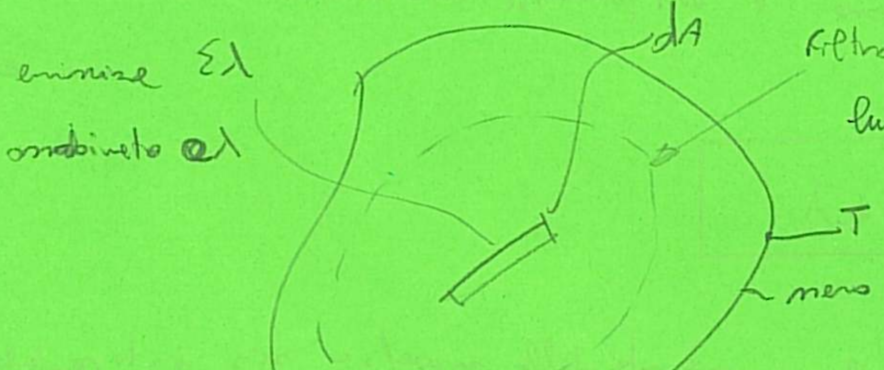
I corpi neri sono alla medesima T quindi lo scambio termico è nullo.

Se indico con G la potenza termica che arriva al corpo nero interno è uguale a tutta quella assorbita ed è anche uguale a tutta quella riemessa pari a

$$G = \sigma_n dA T^4$$

dA è la superficie delle due facce del corpo nero interno

Ora lo sostituisco con un corpo uguale in posizione e dimensione ma non più corpo nero



alla superficie arriva quella che arrivava prima

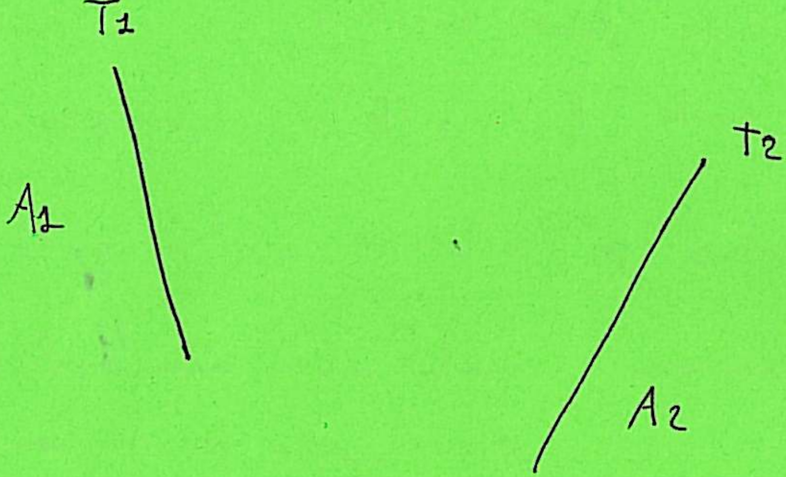
$$\sigma_n dA T^4$$

ma ne viene assorbita una sola frazione pari a $a_\lambda G$

$$\sigma_n dA T^4 = \varepsilon_\lambda \sigma_n dA T^4$$

$\boxed{\text{Rimane che } a_\lambda = \varepsilon_\lambda}$

vediamo la potenza termica che si scambiano due superfici nere.



$$q_{12} = A_1 \sigma_n T_1^4 - A_2 \sigma_n T_2^4$$

$$A_1 (E_1)_n - (E_2)_n A_2$$

NON SI PUÓ DIRE CHE É GIUSTO PERCHÉ NON TIENE CONTO DELLA VISTA.

A_1 é tutta la emessa ma come si vede molta di questa non raggiunge la seconda superficie.

Bisogna definire il fattore di vista (fattore di forma)

IPOTESI
- superfici che seguono la legge di LAMBERT
- Riflessione perfettamente diffusa
- (E) uniforme sulla superficie
- B radiosità, G irradiazione (é l'emissione più la parte riflessa) uniformi sulla superficie

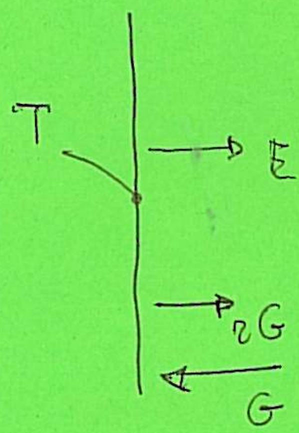
63

LEZIONE 9 10/08/2008

Si prenda una superficie grigia

cerchiamo di scrivere l'emissione globale emisferica

essa emette $E = \varepsilon (E)_n$ (corpo grigio)



La potenza per unità di superficie è $G \left[\frac{W}{m^2}\right]$

G = irradianza   questa arriva sulla superficie dalle altre superfici nei dintorni

$r \cdot G$ = irradianza riflessa

$$t = 0 \qquad a + r + \underset{\overset{\|}{0}}{t} = 1 \qquad r = 1 - a$$

quindi $rG = (1-a)\,G$

IMMAGINIAMO LA LEGGE DI KIRCHHOFF

$$(1-\varepsilon)G = (1-a)G$$

La radiosità è la potenza termica complessiva che ho

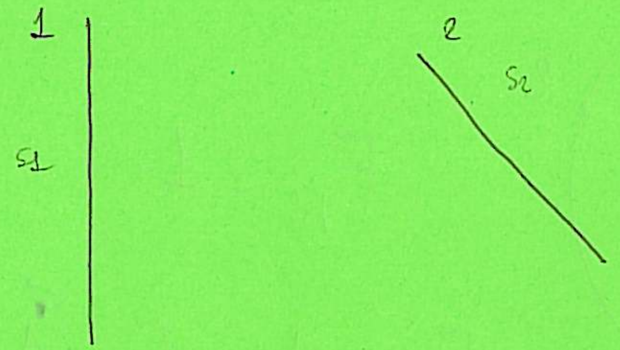
$$B = \begin{cases} \text{Kirchhoff} \\ (1-\varepsilon)G \end{cases}$$

$$\boxed{B = \varepsilon (E)_n + (1-\varepsilon)G \quad \text{RADIOSITÀ}}$$

Se il corpo fosse nero la radiosità coinciderebbe con l'emissione

SE NERO $B = (E)_n$

Scambio termico: dipende dal fattore di vista



ci sono due superfici
- grigie
- opache
- emissione secondo la legge di LAMBERT
- riflessione perfettamente distribuita in tutte le direzioni
- B, G uniformi sulle superfici $\to S$

Fattore di vista

$$\boxed{F_{1\to 2} = \frac{q_{1-2}}{q_{TOT\,1}}}$$

totale potenza che dipende dalla S_1

$$\boxed{q_1 = B_1 A_1}$$

$$\boxed{F_{2-1} = \frac{q_{2\to 1}}{q_{tot\,2}}}$$

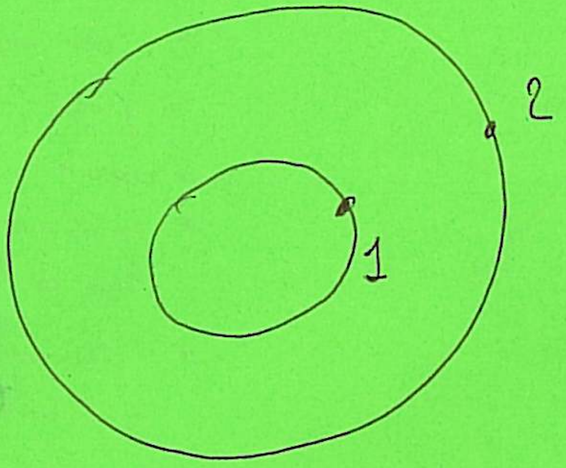
dal punto di vista dell'altra superficie

se il corpo fosse nero $F_{1\to 2}\ \dfrac{q}{(E_1)_n A_1}$

quindi dipende da disposizione spaziale e geometria $F_{2\to 1} = \dfrac{q_{2\to 1}}{(E_2)_n A_2}$

I FATTORI DI VISTA DIPENDONO SOLO DALLA GEOMETRIA

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE TRA I FATTORI DI VISTA VALE LA LEGGE DI RECIPROCITÀ DEI FATTORI DI VISTA $\boxed{A_1 F_{12} = A_2 F_{21}}$



$F_{12} = 1$

$F_{12} \cdot A_1 = F_{21} A_2$

$$\boxed{F_{21} = \frac{A_1}{A_2}}$$

legge di reciprocità dei fattori di vista

$$\boxed{F_{21} + F_{22} = 1}$$

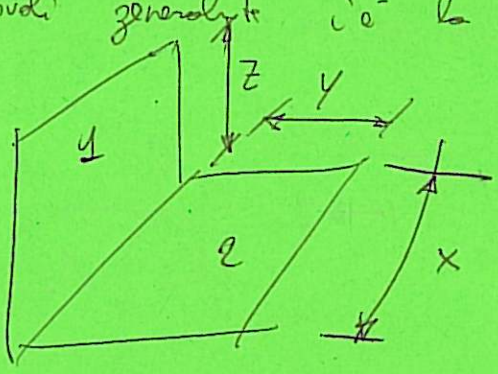
quindi di quelle che parte da 2 e finisce su se stesso si ricava facilmente

$$\boxed{F_{22} = 1 - F_{21}}$$

si può utilizzare l'algebra dei fattori di forma

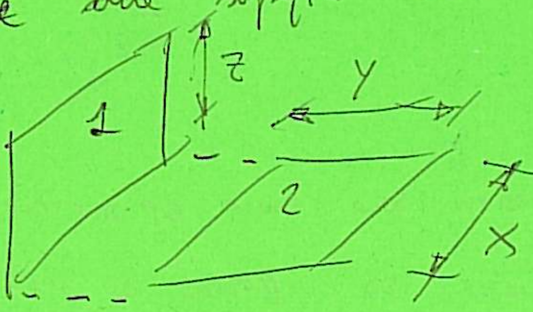
nei manuali generalmente c'è la seguente situazione

F



il fattore F è in funzione di (x, y, z)

se le due superfici non sono a contatto diretto



chiamo la superficie mancante con 3

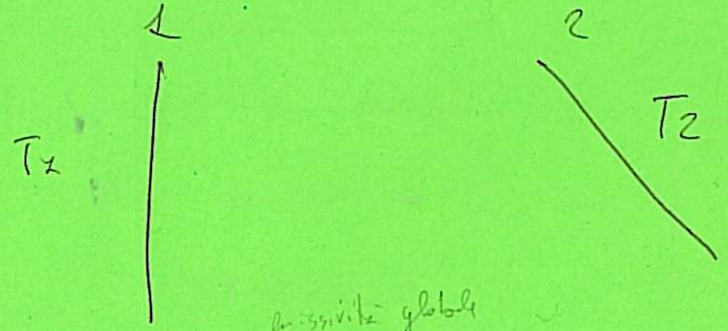
si ha $F_{1,3+2}$

e anche $F_{1,3}$

posso scrivere $F_{1,(3+2)} = F_{1,3} + F_{1,2}$

si ricava immediatamente $F_{1,2}$ si può quindi usare l'algebra dei fattori di forma.

SCAMBIO TERMICO MUTUO TRA DUE SUPERFICI



SCAMBIO PER IRRAGGIAMENTO

$$q_{1,2} = q_{1\to 2} - q_{2\to 1}$$

Potenza termica emessa dalla sup. 1

emissività globale emisferica

superficie

$$q_{1\to 2} = \underbrace{(E_1)_n}_{\text{del corpo nero}} \cdot A_1 \cdot \underbrace{F_{12}}_{\text{che va alla superficie 2}}$$

$$q_{2\to 1} = (E_2)_n \, A_2 \, F_{21}$$

Lo scambio netto sarà $q_{12} = (E_1)_n A_1 F_{12} - (E_2)_n A_2 F_{21}$

è uguale a: $A_1 F_{12}$

quindi lo scambio termico tra due superfici nere è uguale a

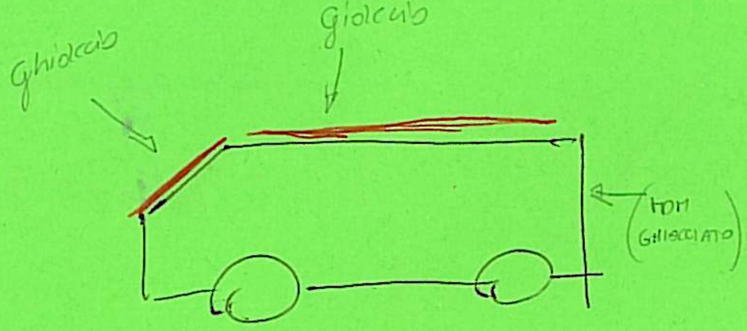
$$\boxed{\begin{aligned} q_{12} &= \left[(E_1)_n - (E_2)_n\right] \\ &= \sigma_n A_1 F_{12} \left(T_1^4 - T_2^4\right) \end{aligned}}$$

vale per corpi neri

si nota che compare un esponente alla 4ª potenza e questo è postulato

ESEMPIO

$T_V = -15°C$ (VOLTA CELESTE) la volta celeste è approssimata a una superficie a $-15 °C$



Pur essendo l'aria a una temperatura maggiore di $0°C$ si trova la brina sui vetri

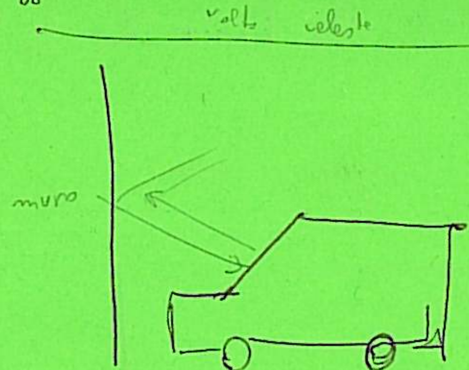
Porca puttana!!!

Lo scambio per irraggiamento tra la cappotta vale

$$q_{12} = \sigma_n A_1 F_{12} \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Il fattore di vista della cappotta è 1

Parcheggiando il mezzo sotto un muro non ghiaccia più



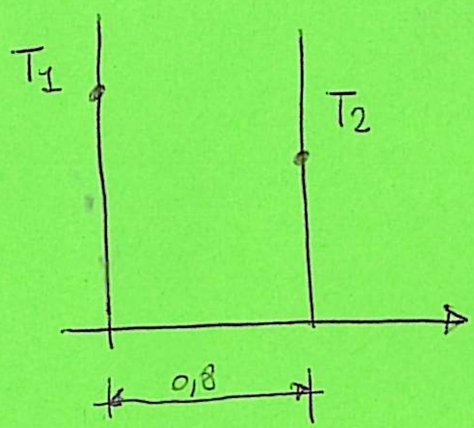
scambio con il muro e non con la volta celeste

Se i corpi non sono neri parto da $q_{12} = (q_{1\to 2}) - (q_{2\to 1})$

$$(B_1)_n A_1 F_{12} - (B_2)_n A_2 F_{21}$$

11/08/2005 LEZIONE n° 10 (ore 20:00 cena Acquadrome)

Esercizio semplice (mentre si aspetta Moro che è disperso)



$T_1 = 30 \quad x = 0 \qquad l = 0,8$

$T_2 = 10 \quad x = l$

ipotesi $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad \lambda = \text{cost in } T \quad H = 0$

Dall'equazione $\nabla^2 t + \frac{H}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \tau}$

annullo il secondo membro e H ottengo l'equazione di Poisson

$\nabla^2 t = 0$ integro due volte

$\frac{d^2 t}{dx} = 0 \qquad \int \frac{d^2 T}{dx^2} dx = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} + c_1 = 0$

integro ancora

$\int \frac{dT}{dT} dx + \int c_1 dx = 0 \Rightarrow T(x) + c_1 \int x\, dx + c_2 = 0$

$\boxed{T(x) = c_1 x + c_2}$ impongo le condizioni al contorno

$$t(x) = \frac{t_1 - (t_1 - t_2)}{l} x$$

$T(x) = c_1 x + c_2$

$T(0) = c_1 (0) + c_2 \qquad T_1 = c_2 \qquad c_2 = 30$

$T(0,8) = c_1 \cdot 0,8 + 30 \qquad 10 = c_1 \cdot 0,8 + 30$

$\frac{10-30}{0,8} = c_1 \qquad -\frac{20}{0,8} = c_1 \qquad c_1 = -25 \Rightarrow \boxed{T(x) = -25x + 30}$

$\Rightarrow$ Fourier trovo il calore specifico

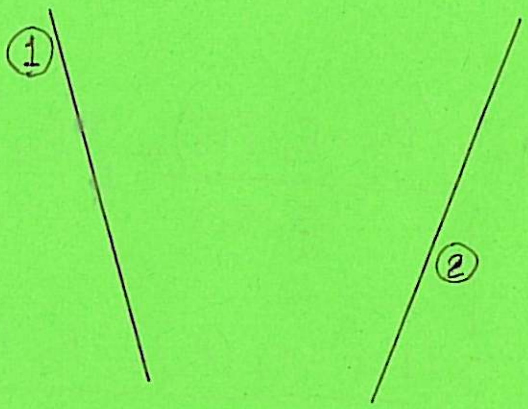
$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

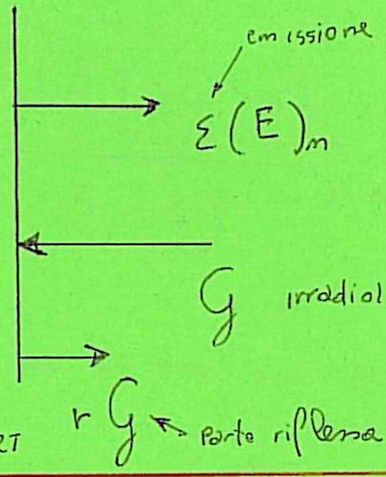
$q = -10(-25)$

$= 250 \frac{W}{m^2}$

Bressanone 11/08/2005

- condizioni in cui si possa applicare la legge di reciprocità dei fattori di forma





- IPOTESI: DI MEZZO GRIGIO, CHE SEGUE LA LEGGE DI LAMBERT

Scambio netto sulla superficie 1 è q_1

$$\boxed{B = \varepsilon(E)_n + rG}$$

RADIOSITÀ

$rG = (1-a)G$

Lo scambio è

$$\bar{q}_1 = G_1 - B_1$$ } è una quantità specifica

Def: positiva se entrante; G_1: quello che arriva; B_1: quello che parte

$$B_1 = \varepsilon_1 (E_1)_n + (1-\varepsilon_1) G_1$$

$(E_1)_n$: EMISSIONE globale del corpo nero

$$q_1 = (G_1 - B_1) A_1$$

- Sulla superficie 2 faccio gli stessi ragionamenti.

$$q_2 = (G_2 - B_2) A_2$$

lo scambio mutuo tra le due superfici è:

$$\boxed{q_{12} = q_{2\to1} - q_{1\to2}}$$

Per la legge di reciprocità vale:

$$A_2 F_{21} B_2 - A_1 B_1 F_{12} = \frac{B_2 - B_1}{\dfrac{1}{A_1 F_{12}}}$$

- supposizione:

Se scambiano per irraggiamento solo tra di loro allora posso scrivere:

$$\boxed{q_1 = q_{12} = -q_2}$$

con il segno $(-)$ per le supposizioni fatte che si ritiene positivo quando entrante in una superficie

Per comodità ricaviamo G. (ricaviamo in funzione di $\underset{\text{RADIOSITÀ}}{B}$ e di $\underset{\text{coefficiente di emissione (emissività)}}{\varepsilon}$)

$$B_1 = \varepsilon_1 (E_1)_n + (1 - \varepsilon_1) G_1$$

$$\underset{\text{IRRADIAZIONE}}{G} = \frac{\underset{\text{RADIOSITÀ}}{B} - \underset{\text{EMISSIVITÀ}}{\varepsilon_1} \cdot \overbrace{(E)_n}^{\text{EMISSIONE GLOBALE DEL CORPO NERO}}}{(1 - \varepsilon_1)}$$

$$q_1 = \left(\frac{B_1 - \varepsilon_1 (E_1)_n}{(1 - \varepsilon_1)} - B_1\right) A_1$$

$$= \left(\frac{B_1 - \varepsilon_1 (E_1)_n - B_1 + \varepsilon_1 B_1}{1 - \varepsilon_1}\right) A_1$$

$$= \frac{-(E_1)_n - B_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - A_1}}$$

STESSE COSE PER LE DUE SUPERFICI

$$q_2 = \frac{-(E_2)_n + B_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \cdot A_2}}$$

$$q = \frac{-(E_1)_n - B_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{B_2 - B_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{-(E_1)_n}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 A_2}}$$

dato che vale $K =$:

$$K = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{l}{f} \Rightarrow K = \frac{a + c + l}{b + d + f}$$

sommiamo i numeratori e sommiamo i denominatori

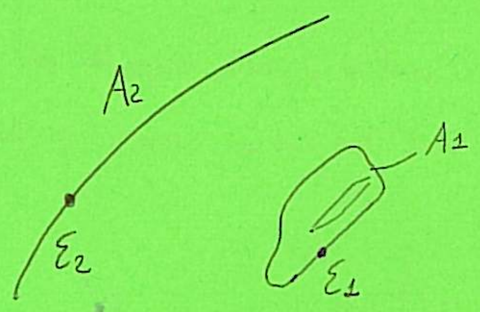
$$q = \frac{(E_2)_n + (\varepsilon_1)_n}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 A_2}}$$

NEL CASO DI CORPO NERO SI OTTIENE

$$\boxed{q = A_1 F_{12} \left[(E_1)_n - (E_2)_n\right]}$$

Dovuto all'emissività $= 1$

VEDIAMO L'ESERCIZIO DELL'ASTRONAVE



$A_1 <<< A_2$ ← superficie dello spazio

↑ superficie navetta

Vediamo lo scambio mutuo tra la superficie e lo spazio

$$q = \frac{(E_2)_n - (E_1)_n}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \frac{1}{F_{12}} + \underbrace{\frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}_{\text{si annulla}}}$$

si annulla per le ipotesi fatte $A_1 <<< A_2$

rimane

$$q = \frac{(E_2)_n - (E_1)_n}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \frac{1}{F_{12}}} = \varepsilon_1 A_1 \left[(E_2)_n - (E_1)_n\right]$$

ESEGUIAMO UN BILANCIO DEL TIPO $\Sigma q = 0$

$$\underbrace{aI}_{q \text{ del sole}} + \underbrace{\varepsilon_1 A_1 \left(\sigma_n T_2^4 - \sigma_n T_1^4\right)}_{q \text{ NAVETTA - SPAZIO}} = 0$$

T_2 è dato come ipotesi del problema a 0 gradi Kelvin.

Positivo se entra nella superficie A_1

$$\boxed{q = \frac{\sigma_n \left(T_2^4 - T_1^4\right)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}}$$

Equazione generale

quando $A_1 << A_2$ si semplifica

si ottiene

$5{,}67 \cdot 10^{-8}$

$$\boxed{q = \frac{A_1 \left[\sigma_n \left(T_2^4 - T_1^4\right)\right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}}}}$$

VEDIAMO COSA OTTENGO DALL'EQUAZIONE GENERALE SE $A_2 =$ corpo nero.

Quindi $\varepsilon_2 = 1$

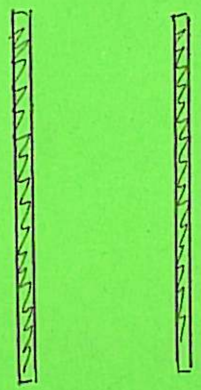
$$\frac{\sigma_n \left(T_2^4 - T_1^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}}}$$

quindi se A_1 è molto piccola rispetto ad A_2 si ha che A_2 è un corpo nero rispetto ad A_1

$$q = \frac{(E_2)_n - (E_1)_n}{\left(\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}\right) + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \left(\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}\right)}$$

SUPERFICI PIANE AFFACCIATE

dall'equazione generale



dove poniamo

$A_1 = A_2 = A$

$$q = \frac{\sigma_n \left(T_2^4 - T_1^4\right)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A}}$$

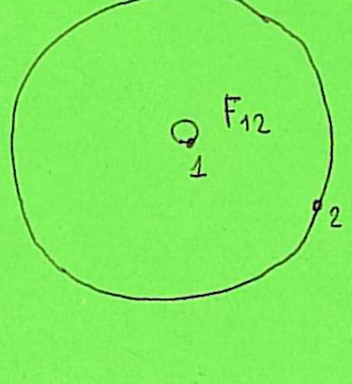
$$= \frac{A \sigma_n \left((T_2)^4 - (T_1^4)\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$\boxed{= \frac{A \sigma_n \left(T_2^4 - T_1^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

pag 449

QUESTO CASO È IL TIPO CHE SI APPLICA NELLE INTERCAPEDINI

CILINDRI O SFERE CONCENTRICHE (È LO STESSO)



$F_{12} = 1$

$F_{21} = \frac{A_1}{A_2}$

leggi di reciprocità dei fattori di forma detti fattori di vista

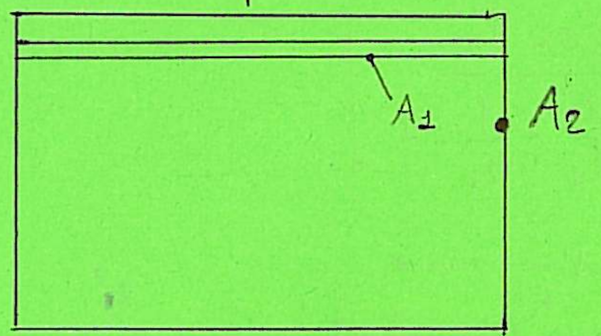
Dalla generale moltiplicare per A_1.

$$q_{12} = \frac{A_1 \sigma_n \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Se A_2 è molto grande rispetto ad A_2 resta:

$$q_{12} = A_1 \varepsilon_1 \sigma_n \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

ESEMPIO Tubo per il condizionamento



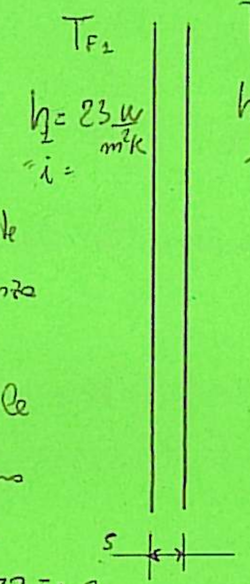
Il tubo di A trascurabile rispetto alla stanza.

$$\boxed{q_{12} = A_1 \varepsilon_1 \sigma_n \left(T_1^4 - T_2^4\right)}$$

CASO INTERCAPEDINE — vetro singolo (poi passeremo al doppio vetro e al triplo)

CASO VETRATA SINGOLA

$$q = h_1 (T_1 - T_{F1}) = h_2 (T_2 - T_{F2})$$



$$K = \cfrac{1}{\cfrac{1}{h_i} + \cfrac{s}{\lambda} + \cfrac{1}{h_e}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{8} + \cfrac{0{,}004}{1} + \cfrac{1}{23}} = 5{,}79 \ \frac{W}{m^2K}$$

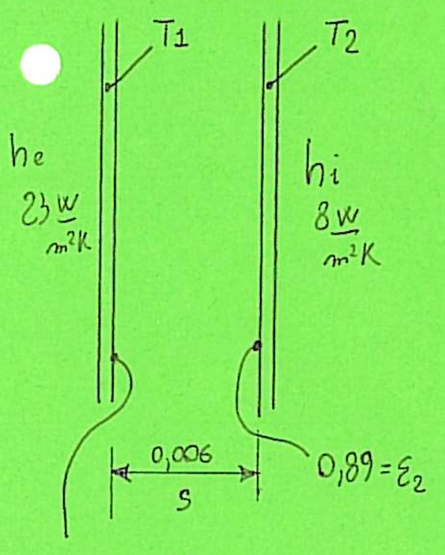
La dispersione è direttamente proporzionale alla trasmittanza

Le dispersioni attraverso le singole pareti vetrate sono molto alte.

$$R_T = \frac{1}{K} = 0{,}173 \left[\frac{K}{W}\right]$$

4mm $= 4 \cdot 10^{-3}$ metri

Caso doppio vetro



Se usiamo il doppio vetro entrano in gioco le emissioni per irraggiamento.

$$\bar{q} = \bar{q}_{conduzione} + \bar{q}_{irraggiamento} = \frac{T_1 - T_2 \lambda s}{L} + \frac{T_1^4 + T_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

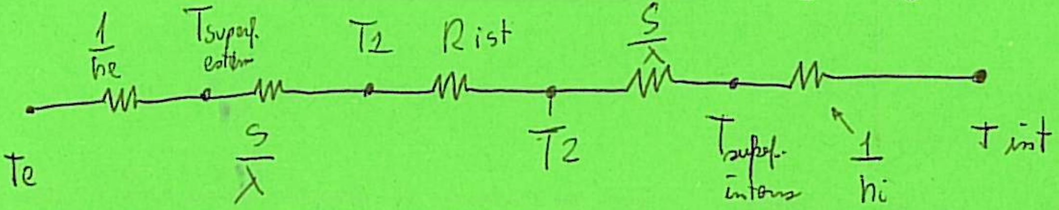
$$\frac{\lambda_A (T_1 - T_2)}{L} + \frac{4\sigma_n T_m^3 (T_1 - T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

dalla definizione di calore e di resistenza specifica

$$\bar{R} = \frac{\Delta T}{q} = \frac{T_1 - T_2}{q} = \cfrac{1}{\cfrac{\lambda_{aria}}{L} + \cfrac{4\sigma_n T_m^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

TRASMITTANZA DELLA PARETE DELLA INTERCAPEDINE

$$q = \bar{q}_{cond} + \bar{q}_{irraggiamento} = (T_1 - T_2)\left[\frac{\lambda_{aria}}{L} + \frac{4\sigma_n T_m^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}\right]$$



$$\bar{R}_{TOT} = \frac{1}{hi} + \frac{1}{he} + \frac{s_{vetro}}{\lambda_{vetro}} + \frac{s_{vetro}}{\lambda_{vetro}} + \bar{R}_{intercapedine}$$

dobbiamo trovare la Resistenza dell'intercapedine

$$K = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{S_v}{\lambda_v} + \bar{R}_{intercap.} + \frac{S_v}{\lambda_v} + \frac{1}{he}}$$

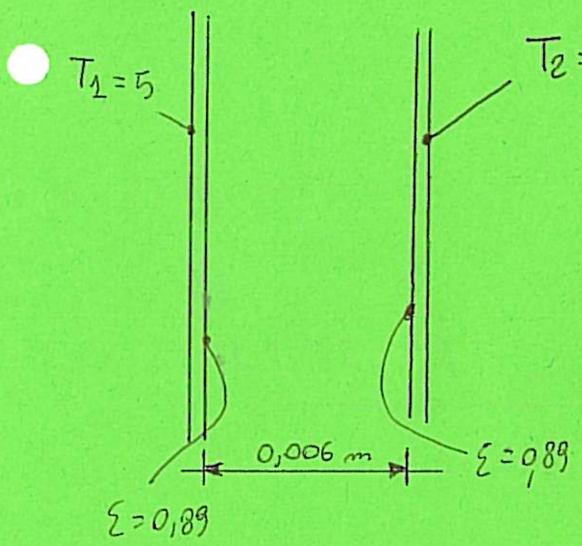
$$R = \frac{\Delta T}{q} = \frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{1}{\frac{\lambda_{aria}}{L} + \frac{4\sigma_n T_m^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

T_m si assume come:

$$T_m = \frac{T_{aria\ interna} - T_{aria\ esterna}}{2}$$

APPROSSIMA BENE

calcolare la resistenza dell'intercapedine.



$$T_m = 283,15\ K$$

$$\bar{R} = \frac{1}{\frac{\lambda_{aria}}{L} + \frac{4 \sigma_m T_m^3}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

$$\lambda_{aria} = 0,026\ \frac{W}{mK}$$

nelle intercapedini è bene non superare la larghezza di 1,5cm per non essere influenzati anche dalla convezione.

$$\bar{R}_{intercapedine} = \frac{1}{\frac{0,026}{0,006} + \frac{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (283,15)^3}{\frac{1}{0,89} + \frac{1}{0,89} - 1}}$$

RISULTA $\bar{R} = 0,118 \left[\frac{m^2K}{W}\right]$

$$K = \frac{1}{\bar{R}_{incap} + R_{vetri}} = \frac{1}{0,118 + R_{vetri}}$$

ora posso scrivere la trasmittanza della ~~parete~~ intercapedine più i vetri

$\boxed{K = 3,39 \text{ WATT}}$

considerando la formula totale di vetri più intercapedine

Senza intercapedine avevamo trovato $5,79\ \frac{W}{m^2K}$

È migliorata la situazione della dispersione ma non di moltissimo (solo di circa un terzo)

Per una ulteriore miglioria possiamo installare vetri a bassa emissione contenenti ossido di alluminio, cambia ε che diventa $\varepsilon = 0,04$. la resistenza della intercapedine diventa

$$K = \frac{1}{\frac{0,026}{0,006} + \frac{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (283,15)^3}{\frac{1}{0,89} + \frac{1}{0,04} - 1}}$$

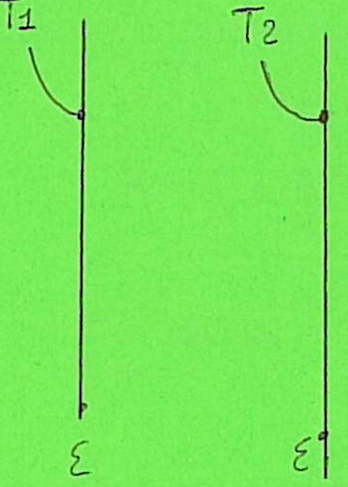
cambio solo una delle vetrate (non migliora molto cambiarle entrambe)

$k = \frac{1}{R_T} = 2{,}52 \frac{W}{mK}$ aggiungendo il vetro con ossido di alluminio in entrambe le vetrate.

Aggiungo il Terzo VETRO INTERMEDIO

Vaso Dewar da $1 = a + r + t$ con $t = 0$ si ottiene $a + r = 1$

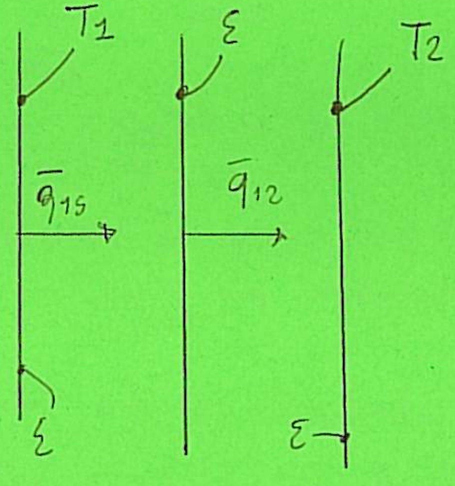
$(1 - r) = \varepsilon$



stessa emissività

$$q_{12} = \frac{\sigma_n (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

Piazziamo lo schermo opaco nel mezzo.



in regime stazionario vale:

$$\boxed{\bar{q}_{1s} = \frac{\sigma_n (T_1^4 - T_s^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \qquad \bar{q}_{2s} = \frac{\sigma_n (T_s^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}}$$

Vediamo B-G

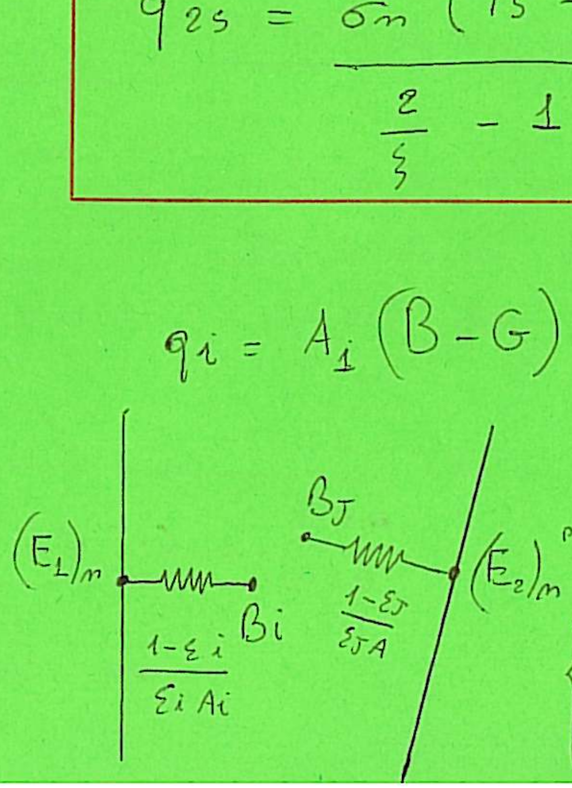
RADIOSITÀ

$$B - G = \frac{(E_1)_n - B_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}}$$

IRRADIAZIONE

$$q_i = A_1 (B - G) = \frac{E_{1n} - B_i}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}}$$

$$R = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}$$



prendiamo come riferimento positivo

$$\begin{cases} q_{i \to j} = A_i F_{ij} B_i \\ q_{j \to i} = A_j F_{ji} B_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{i \to J} = A_i F_{iJ} B_i \\ q_{J \to i} = A_J F_{Ji} B_J \end{cases}$$

Per la legge di reciprocità dei fattori di vista

$$\boxed{q_{i \to J} - q_{J \to i} = \frac{B_i - B_J}{\frac{1}{A_i F_{iJ}}}}$$

SCAMBIO NETTO

LA RESISTENZA DI ACCOPPIAMENTO SARÁ:

$$\frac{1}{A_i F_{iJ}}$$

Scambiatori di calore 12/08/2005 ULTIMA LEZIONE

scambiano calore fra due fluidi a diverse temperature.

di norma i fluidi sono in movimento.

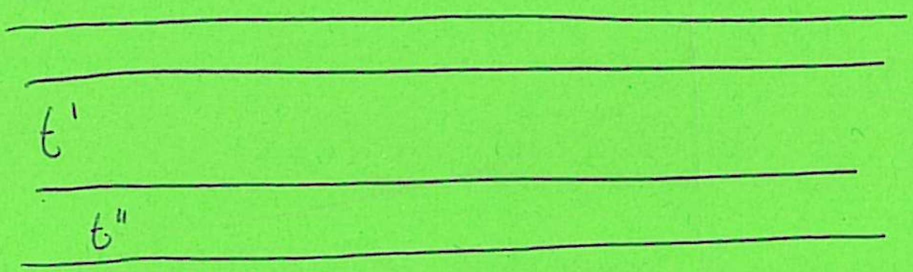
In edilizia lo scambiatore di calore è il corpo scaldante "termo"

Scambiatore di calore a tubi concentrici

TUBI concentrici

con t' si indica il fluido caldo

con t'' si indica il fluido freddo



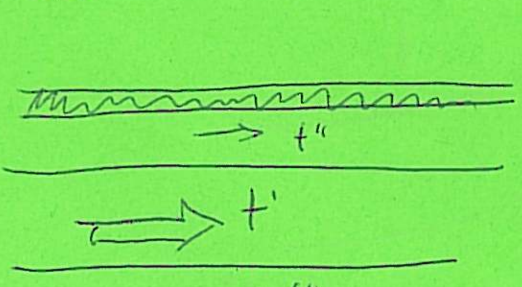
se t' e t'' vanno dallo stesso verso siamo in presenza

di uno scambiatore in equicorrente

se t' e inverso a t'' siamo in controcorrente

IPOTESI

SI DEVE CONSIDERARE IL DISPOSITIVO COME ADIABATICO VERSO L'ESTERNO



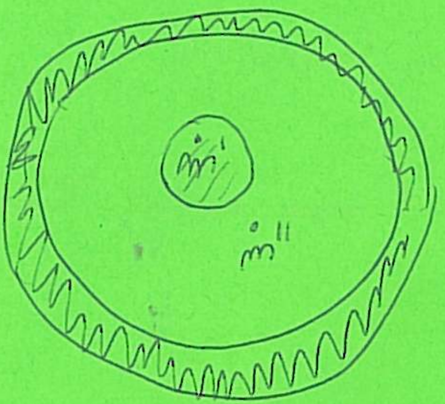
$\dot{m}'$ = portata di massa del fluido caldo

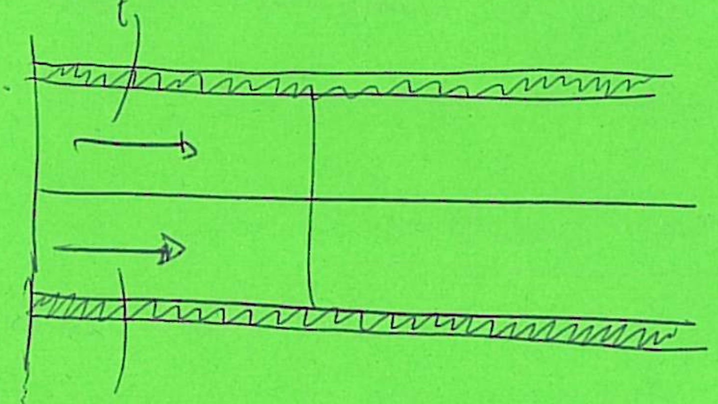
$\dot{m}''$ = portata di massa del fluido freddo.

$\dot{m}$ = quantità di fluido in massa nell'unità di tempo = $\left[\frac{Kg}{s}\right]$

per passare dalla portata di massa alla volumetrica si moltiplica per la densità $\dot{m} = \rho V' \left[\frac{m^3}{s}\right]$

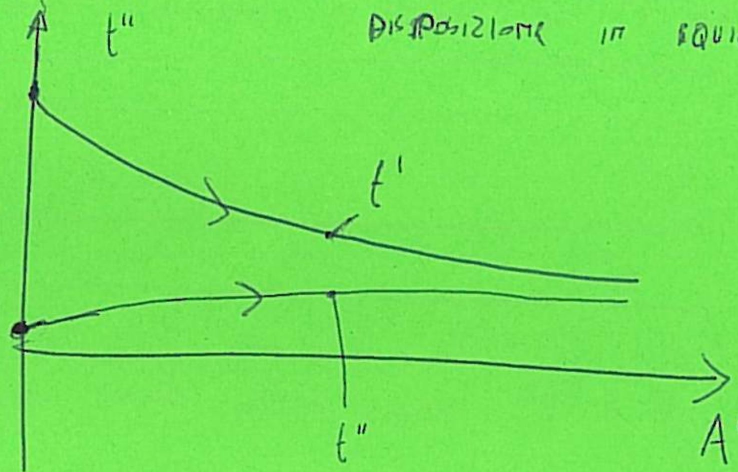
Il riferimento dell'asse delle x è l'area spazzata dal fluido caldo (il volume di fluido caldo)





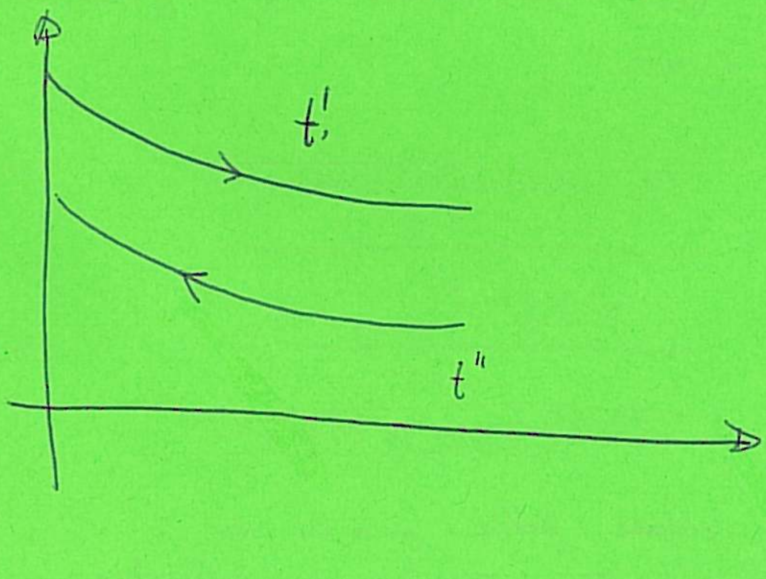
DISPOSIZIONE IN EQUICORRENTE

EQUICORRENTE



Se i due fluidi sono in controcorrente cambia la curva del fluido freddo

CONTROCORRENTE



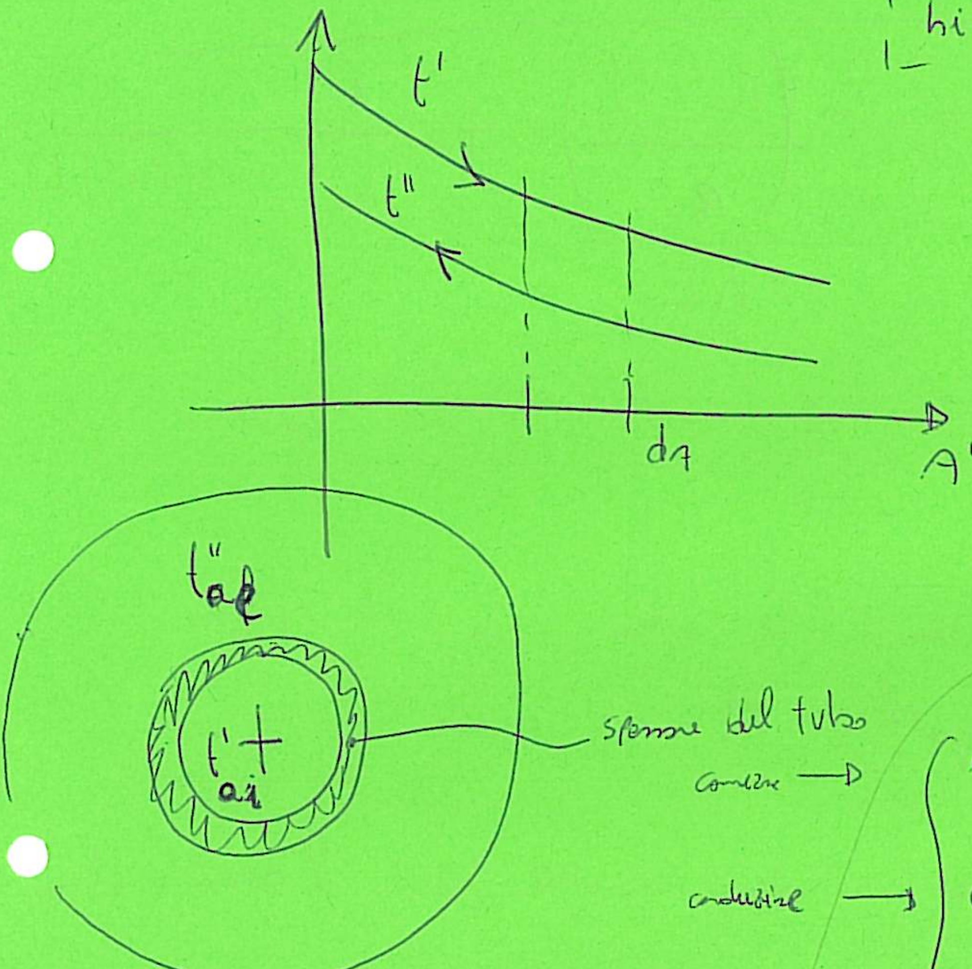
Una parete può essere vista come uno scambiatore di calore

$$q = K\,S\left(T_{aria\ int} - T_{aria\ esterno}\right)$$

$K = \dfrac{1}{R_{totale}}$ (TRASMITTANZA) e

Per le pareti

$$\frac{1}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{1}{h_e} + \sum_{i}^{n} \dfrac{s_i}{\lambda_i}}$$



K negli scambiatori ha una differenza fondamentale ~~diff~~ perché non è una parete ma una simmetria cilindrica

spessore del tubo

convezione →

$$q = h_i \cdot 2\pi R_i L\left(T_{ai} - T_{si}\right)$$

conduzione →

$$q = 2\pi\lambda L \frac{\left(T_{si} - T_{se}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_i+s}{R_i}\right)}$$

$$q = h_e\, 2\pi\left(R_i+s\right) L\left(T_{se} - T_{ae}\right)$$

nelle tre espressioni isoliamo la differenza di temperatura.

$$T_{ai} - T_{si} = \frac{q}{h_i 2\pi R_i L}$$

$$T_{se} - T_{ae} = \frac{q}{h_e 2\pi\left(R_i+s\right) L}$$

$$T_{si} - T_{se} = \frac{q}{\dfrac{2\pi\lambda L}{\ln\left(\dfrac{R_i+S}{R_i}\right)}}$$

Sommo le tre espressioni i mi resta a sinistra la diff. di temperatura dei due fluidi

$$(T_{ai} - T_{ae}) = q\left[\frac{1}{h_i 2\pi r_1 L} + \frac{\frac{1}{2\pi\lambda L}}{\ln\left(\frac{R_i + s}{R_i}\right)} + \frac{1}{h_e 2\pi R_e L}\right]$$

spessore del tubo

Troviamo

$$q = \frac{t_{ai} - t_{ae}}{\underbrace{\frac{1}{h_i \cdot 2\pi \cdot R_i L}}_{\frac{1}{h_i A}} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{R_i + s}{R_i}\right)}{2\pi\lambda L}}_{\frac{s}{\lambda A}} + \underbrace{\frac{1}{h_e\,(2\pi(R_i+s)L)}}_{\frac{1}{h_e A}}}$$

le A non sono le stesse, con il raggio cambia la superficie A

moltiplico numeratore e denominatore per l'area interna..

$$q = \frac{2\pi R_i L\,(t_{ai} - t_{ae})}{\frac{1}{h_i} + \frac{2\pi R_i L}{2\pi\lambda L} \cdot \ln\left(\frac{R_i + s}{R_i}\right) + \frac{1}{h_e} \cdot \left(\frac{R_i}{R_i + s}\right)}$$

coefficiente di scambio globale riferito alla superficie interna

$q = K_i A_i (T_{ai} - T_{ae})$ RIFERITO ALLA SUPERFICIE INTERNA

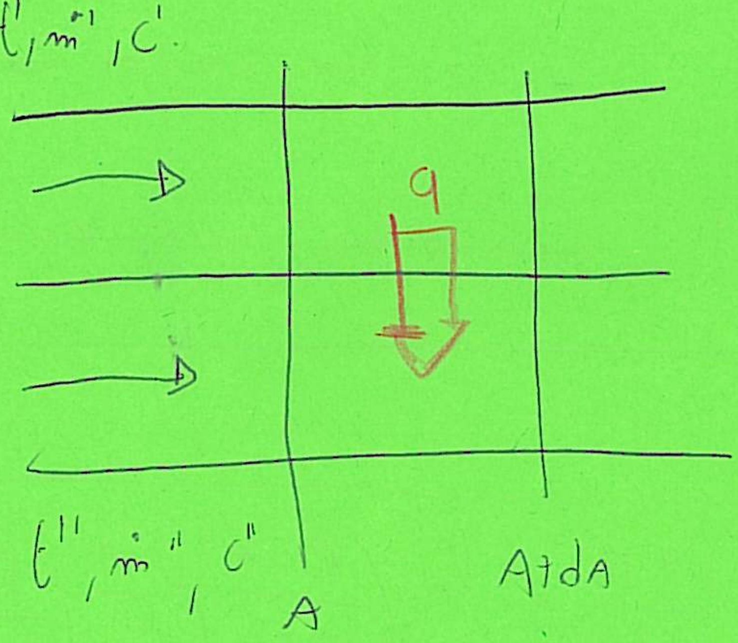
$q = K_e A_e \cdot (T_{ai} - T_{ae})$ RIFERITO ALLA SUPERFICIE ESTERNA

Interno

$$\boxed{K_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\cancel{2\pi} R_i}{\cancel{2\pi}\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_i+s}{R_i}\right) + \frac{1}{h_e}\left(\frac{R_i}{R_i+s}\right)}}$$

esterno

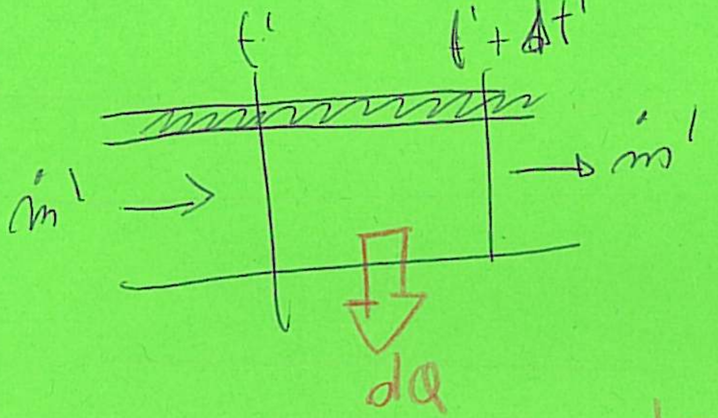
$$\boxed{K_e = \frac{1}{\frac{1}{h_i}\left(\frac{R_i+s}{R_i}\right) + \frac{R_i+s}{\lambda} \ln\left(\frac{R_i+s}{R_i}\right) + \frac{1}{h_e}}}$$



q = Potenza termica scambiata

$$\boxed{dq = k\, dA\,(T' - T'')}$$

Può essere K_i oppure K_e



$$dQ = dh + \cancel{dL}$$

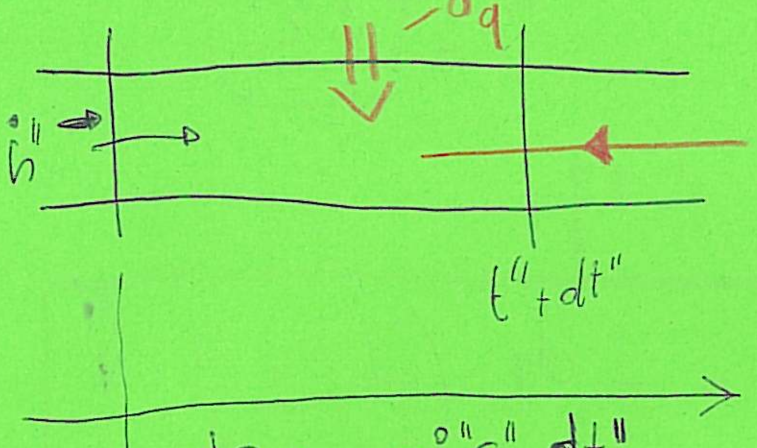
ma ci sono dispositivi che fanno L

dove $h = u + pv$

$$dh = du + \underbrace{p\,dv}_{\text{isobara}} + \underbrace{\cancel{v\,dp}}_{\text{indeformabile}}$$

$$-dq = \frac{dU}{d\tau} = \dot m' c' dt'$$

$$dq = -\dot m' c' dT' \quad \text{FLUIDO CALDO}$$



$$t_2 - t_1 = t'' - (t' + d'')$$

EQUICORRENTE

$$dQ = \dot{m}'' c'' dt''$$

$$dQ = \dot{m}'' c'' d(T_2 - T_1)$$

$$dQ = -\dot{m}'' c'' d''$$ controcorrente

Le indichiamo entrambe facendo così

$$dq = \pm \dot{m}'' c'' dT''$$

$$\begin{cases} dq = K\,dA\,(t' - t'') \\ dq = -\dot{m}' c' dt' \\ dq = \pm \dot{m}'' c'' dt'' \end{cases}$$

Le metto assieme

$$dq = K\,dA\,(t' - t'')$$

$dq = -\dot{m}' c' dT'$ → isolo dT' $\quad -dt' = \dfrac{dQ}{\dot{m}' c'}$

$dq = \pm \dot{m}'' c'' dT'$ → $dT'' = \dfrac{dq}{\pm \dot{m}'' c''}$

Sommare le due

$dT' - dT'' = d(t' - t'') = -dq$

85

$$dT' - dT'' = d(T' - T'') = -dq \left(\frac{1}{\dot{m}'c'} \mp \frac{1}{\dot{m}''c''} \right)$$

equicorrente

controcorrente

$\boxed{\text{se indichiamo con } \Theta = t' - t''}$

$$\boxed{dT' - dt'' = d(t' - t'') = -dq \left(\frac{1}{\dot{m}'c'} \pm \frac{1}{\dot{m}''c''} \right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\Theta = -dq\, M}$$

$$dq = K\, dA\, \Theta$$

$$d\Theta = K\, dA\, \Theta$$

$$\int d\Theta = \int_0^{q_{\text{TOTALE SCAMBIATO}}} -dq\, M$$

$$\Theta_2 - \Theta_1 = -q\, M$$

$$dq = -\frac{d\theta}{M}$$ sostituendo in

$$dq = K\,dA\,\theta$$

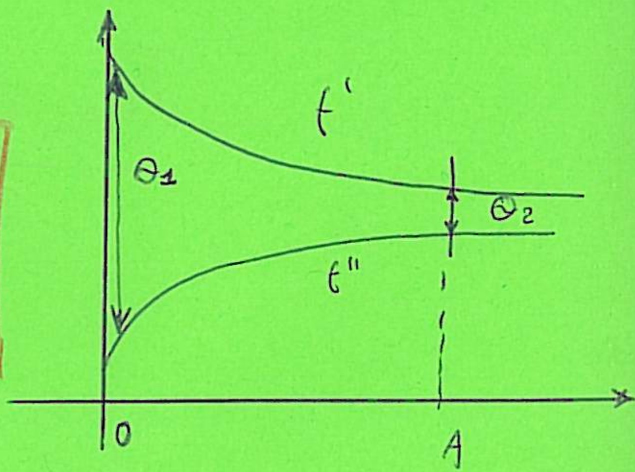
$$-\frac{d\theta}{M} = K\,dA\,\theta$$ ond posso separare le variabili.

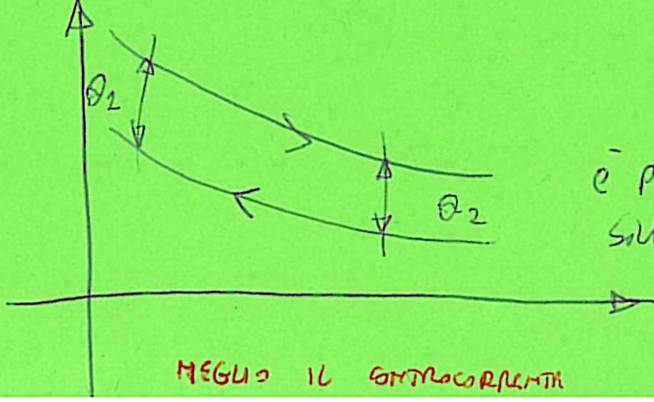
$$\boxed{-\frac{d\theta}{\theta} = KM\,dA}$$

Risolvo l'equazione differenziale a variabili separate.

$$-\ln\frac{\theta_2}{\theta_1} = KMA$$

$$\boxed{M = -\frac{(\theta_2 - \theta_1)}{q}}$$





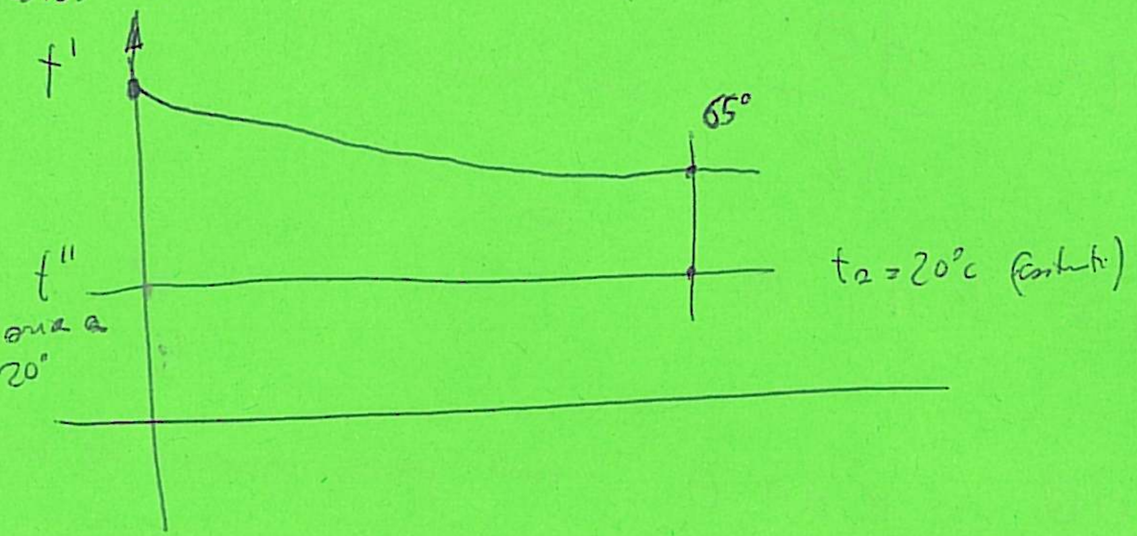
è più efficace perché il salto di temperatura è costante e continua ad effettuare uno scambio costante anche se le temperature variano

MEGLIO IL CONTROCORRENTE

87

9

Caso del radiatore edilizio (scambiatore di calore)



$$\frac{\theta - \theta_1}{\ln \frac{\theta_2}{\theta_1}} = \Delta T_{m\,log.}$$

$$t_{m\,FC} - t_{aria} = 50$$

$$\Delta t_{m\,log} \frac{45 - 55}{\ln\left(\frac{45}{55}\right)} = 49,83$$

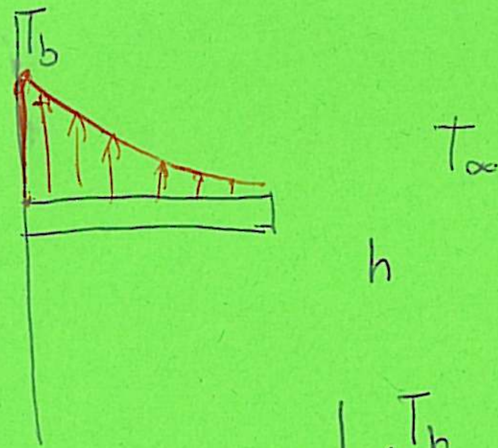
Per i corpi scaldanti edilizi (RADIATORI) si può approssimare la variazione di temperatura media logaritmica pari a

$$\frac{T_{H_2O\,1} + T_{H_2O\,2}}{2} \simeq \Delta T_{m\,log}$$

LE ALETTE

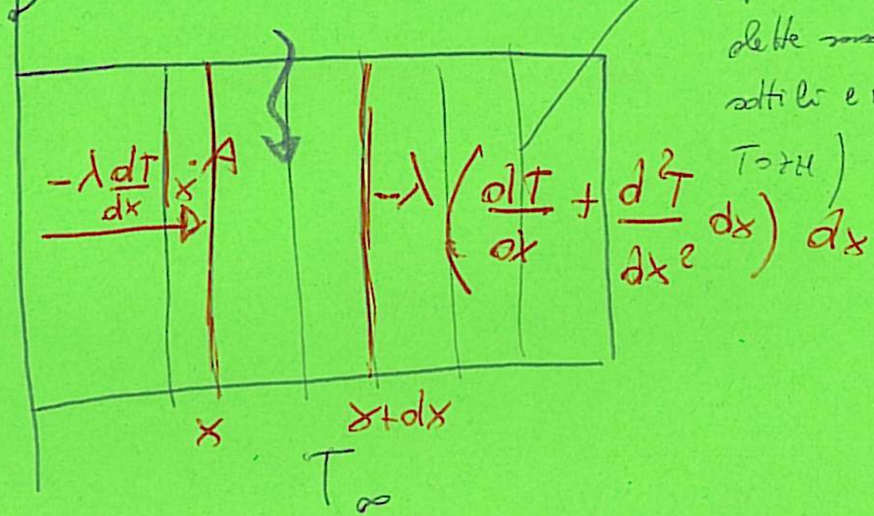
Per aumentare lo scambio termico convettivo lato aria si dispongono delle alette

mettendo una aletta però si possono anche peggiorare le cose: esempio: aletta in polistirolo.

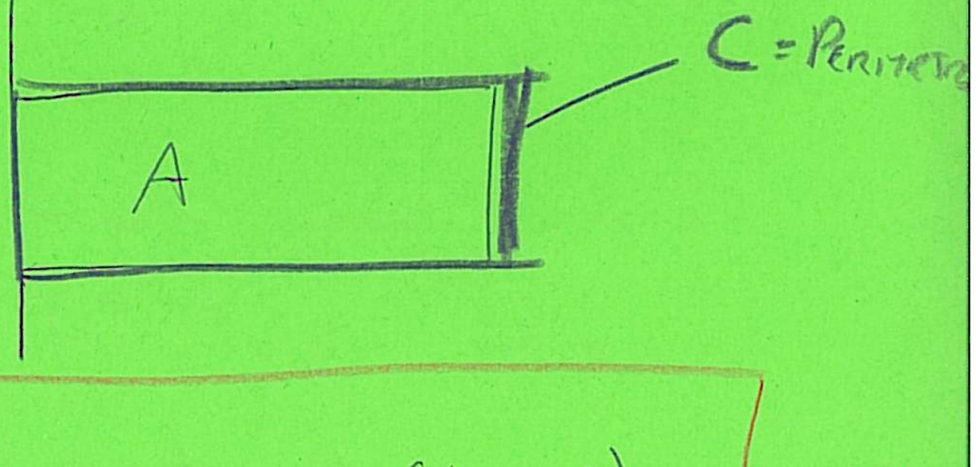


$$dq_{conv} = h\,C\,dx\,(t_\infty - t)$$

ISOTERMA (quando le alette sono sottili e non tozze)



Individuiamo il perimetro dell'aletta con C



$$dq = 0$$

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}\,\cancel{dx}\,dA + h\,C\,\cancel{dx}\,(t_\infty - t) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hc}{\lambda A}(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2(T - T_\infty)}{dx^2} - \frac{hc}{\lambda A}(T - T_\infty) = 0$$

per comodità chiamo $(T - T_\infty) = \Theta$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{hc\Theta}{\lambda A} = 0$$

il polinomio caratteristico è

$$z^2 = \frac{hc}{\lambda A} \qquad z = \pm\sqrt{\frac{hc}{\lambda A}} = \pm m$$

$$\boxed{\Theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}}$$

$$\Theta(x) = A\sinh[m(L - x)] + B\cosh[m(L - x)]$$

la prima condizione al contorno è

per $x = 0$ $\quad \Theta_0 = (T_b - T_\infty)$

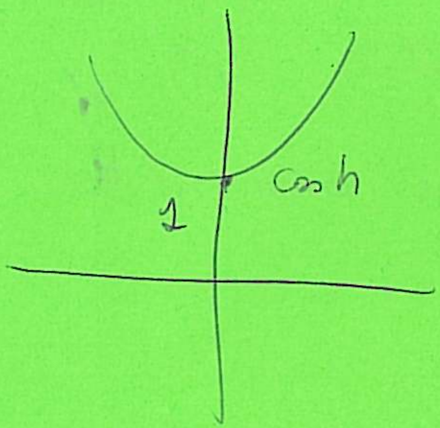
$$\Theta_b = A\sinh(mL) + B\cosh(mL)$$

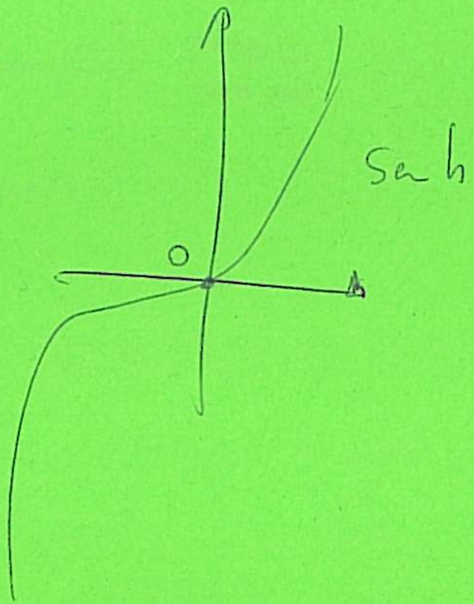
30

11 II° condizione (supponendo l'aletta molto sottile lo scambio convettivo a fine aletta è zero)

$x = L$ $\quad -\lambda \frac{dT}{dx}\Big]_{x=L} = 0$

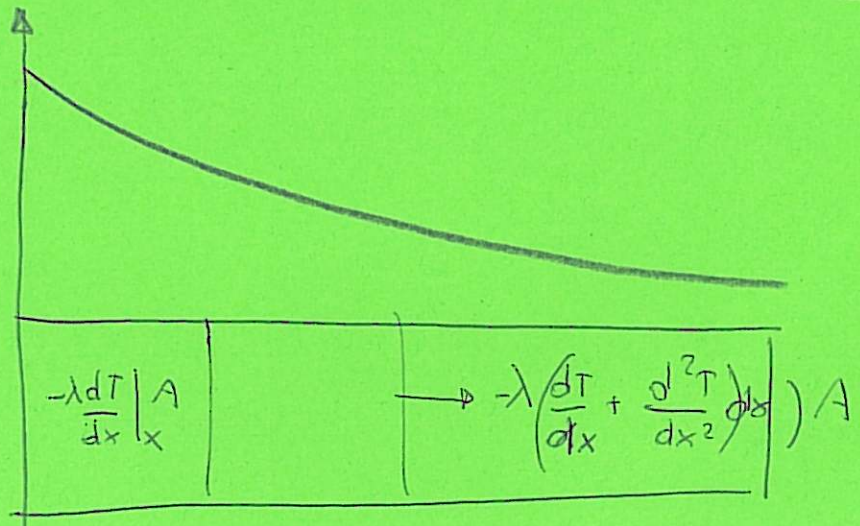
$$-\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} A = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda\Big[-Am\cosh[0]\Big] \pm Bm\sinh(0)\Big] = 0$$





$$B = \frac{\theta_b}{\cosh(mL)}$$

$$\boxed{\theta_{(x)} = \frac{\theta_b}{\cosh(mL} \cdot \cosh[m(L-x)]}$$



$$\int_0^L h \cdot C\,dx\,(T - T_\infty)$$

$$q = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} A$$

12/08/2005 ore 11:00 Fine corso

HELP !!!

Esame domani ore 9:00

12/08/2005 ORE 17:30

ESERCIZIO Si abbia una trave scatolare le cui dimensioni sono riportate nella figura:

$\lambda = 50 \frac{W}{mK}$ $\rho = 7850 \frac{Kg}{m^3}$; $c = 550 \frac{J}{Kg K}$

a causa di un incendio la trave è esposta a una variazione a gradino della temperatura esterna con $T_F = 350\ °C$ e $h = 350 \frac{W}{m^2K}$

1) calcolare T_0
2) calcolare la temperatura dopo 2 minuti
3) la potenza scambiata dopo 2 minuti
4) lo spessore di isolante con conduttività termica $\lambda = 0,035 \frac{W}{mK}$ affinché la temperatura nella trave non superi 350°C dopo 90 minuti di esposizione (trascurare la resistenza superficiale $\frac{1}{hs}$)

dalla definizione di $T_0 = \frac{\rho c V}{hs}$

procedo calcolando prima il volume e la superficie laterale della trave

$S = \overbrace{lato \times lato}^{Perimetro} \cdot$ metro lineare

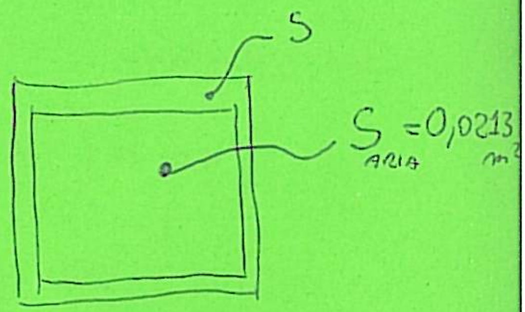
$= 160 \times 160 \cdot 1 = 25600\ mm^2$

$= 0,0256\ m^2$

$T_0 = \frac{\rho c V}{h S} = \frac{7850 \cdot 550 \cdot 0,0043}{350 \cdot 0,0256}$

$\boxed{T_0 = 2072\ sec.}$

Volume = Superficie totale – Superficie ...



$S_{tot} = 0,16^2 = 0,0256\ m^2$

$S = 0,0256 - 0,0213$

$= 0,0043\ m^2$

$V = S \cdot 1$ metro lineare $= 0,0043\ m^3$

Applico il metodo a parametri concentrati (regime variabile transitorio)

$$\boxed{T(\tau) = T_F + (T_i - T_F)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}}$$

sostituendo tutti i dati si ottiene

$$T(\tau) = 350 + (20 - 350)\, e^{-\frac{120\,sec}{2072}}$$

si è supposto che la temperatura iniziale si la t ambiente a 20°C

SI OTTIENE LA TEMPERATURA RAGGIUNTA DALLA TRAVE DOPO 2 minuti pari a 120 secondi

con $T_F = 350$

$$\boxed{T(120) = 38{,}57\,°C}$$

se il fluido T_F è a 750° allora risulta

$$\boxed{T(120) = 61.08\,°C}$$

Per il flusso termico devo capire se sono interessato al flusso nello scambiato (in accumulo) dall'istante $\tau=0$ fino a $\tau = 120$ sec oppure se considero il valore istantaneo del flusso a $\tau = 120$ alla temperatura T_P pari a $T_P = 38{,}57°$ (caso semplice)

nel caso dinamico dovrei derivare la funzione $T(\tau)$ e inserirla nella legge della conduzione

$$\frac{\partial q}{\partial t} = h\left(\frac{\partial T_P}{\partial \tau} - T_F\right)$$

caso istantaneo

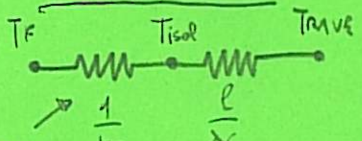
$$q = h\left(T_{P_{120}} - T_F\right) = 350\,(38{,}57 - 350) = -109000.8 \text{ WATT}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

ALLA TEMPERATURA $T_F = 750°C$ OVVERO ALLA TEMPERATURA DELLA TRAVE DI 61.08 °C dopo 120 sec si ha

$$q = 750\,(61{,}08 - 750) = -516\,680\ W$$

SPESSORE ISOLANTE



il testo chiede di trascurare la R superficiale nel calcolo dello spessore dell'isolante

$$q = \frac{T_{isol} - T_{trave}}{\frac{l}{\lambda_S}}$$

SI ESEGUE UN BILANCIO ENERGETICO DEDOTTO DALLA PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

$$dQ = dU$$

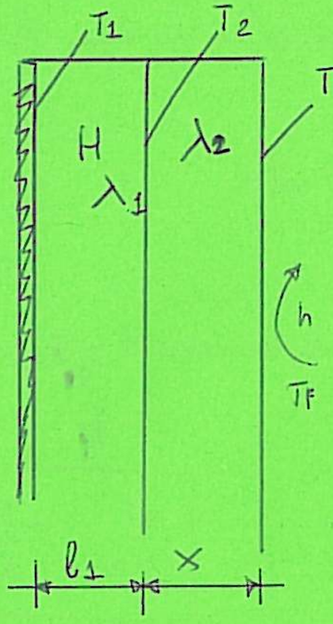
Tutto questo calore va dal aumentare l'energia interna della trave $\quad u = \rho c V \frac{dT}{d\tau}$

$$\frac{T_{isol} - T_{trave}}{\frac{l}{\lambda}} = \rho c V \frac{dT}{d\tau}$$

da cui ricavo lo spessore l.

12/08/2005 16:30

ESERCIZIO



$l_1 = 0{,}05\,m$

$\lambda_1 = 10\ \frac{W}{mK}$

$\lambda_2 = 1\ \frac{W}{mK}$

$H = 2{,}5 \cdot 10^4\ \frac{W}{m^3}$

$T_F = 30°$

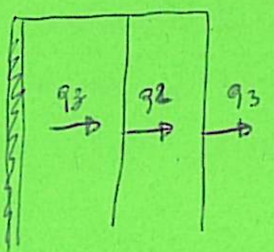
$h = 45\ \frac{W}{mK}$

si impone che la temperatura della superficie centrale non superi mai i 79°C

$$T_2 < 79°C$$

* calcolare X
* trovare t max in tutto il sistema

soluzione: si ipotizza il regime stazionario con λ_1 e λ_2 indipendenti da T si verifica che i flussi calorici attraverso le superfici sono uguali e che tutto quanto il calore generato da H sia smaltito per convezione dal lato sinistro. Posso quindi scrivere



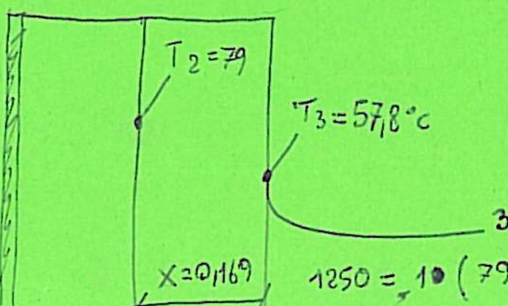
$q_g = q_2 = q_3$ dove
$$\begin{cases} q_3 = h\,(T_3 - T_F) \\ q_2 = \dfrac{\lambda\,(T_2 - T_3)}{X} \\ q_g = H \cdot S \cdot l_1 \end{cases}$$
(per una superficie unitaria)

Il valore del flusso è quello generato su metro quadro

$q_g = 2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 1\,m^2 \cdot 0{,}05 = 1250$ Watt quindi posso trovare subito il valore della temperatura della parete T_3

$$q_3 = h\,(T_3 - T_F) \qquad \frac{q_3}{h} = T_3 - T_F$$

da cui $\boxed{\dfrac{q_3}{h} + T_F = T_3}$ $\qquad \dfrac{1250}{45} + 30 = T_3$ $\qquad \boxed{T_3 = 57{,}8\ °C}$



$$1250 = \frac{10\,(79 - 57{,}8)}{X}$$
$\lambda_2 = 1$

t_2 è vincolata dai dati del problema quindi per conduzione conosco tutto in quel tratto

ORA STUDIO L'ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA ANNULLANDO L'EQUAZIONE DI POISSON "PER I SISTEMI CON GENERAZIONE INTERNA H" $\boxed{X = 0{,}169}$

A

Dall'equazione generale della conduzione annullo il termine che lega la dipendenza di T dal tempo e rimane

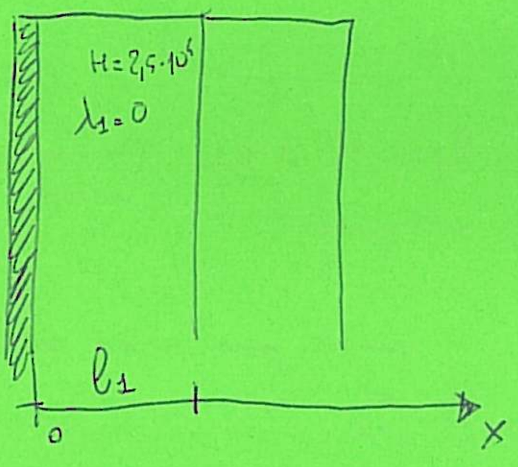
$$\nabla^2 t + \frac{H}{\lambda} = 0 \qquad \nabla^2 t = -\frac{H}{\lambda}$$ integro due volte

$$\int \frac{d^2 t}{dx} = -\frac{H}{\lambda} x + c_1$$ integro ancora e ottengo:

$$\boxed{t(x) = -\frac{H}{\lambda}\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2} \qquad \boxed{\frac{dt}{dx} = -\frac{H}{\lambda} x + c_1}$$

cerchiamo il punto in cui c'è il massimo ovvero dove si annulla la derivata prima

$$-\frac{H}{\lambda} x + c_1 = 0 \qquad \frac{H}{\lambda} x = c_1$$



con il riferimento delle x con origine sulla superficie adiabatica si ha

$$c_1 = \frac{H}{\lambda} \cdot (0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Sostituisco nell'equazione di $t(x)$ e trovo c_2 fissando la seconda condizione al contorno $t(l_1) = 79°C$ come dato dal testo

$$79 = -\frac{H}{\lambda_1}\frac{l_1^2}{2} + \underbrace{c_1}_{c_1=0} l_1 + c_2$$

$$79 = -\frac{2{,}5 \cdot 10^4}{10}\frac{0{,}05^2}{2} + c_2$$

$$79 = -3{,}125 + c_2 \qquad \boxed{c_2 = 82{,}125}$$

Posso quindi trovare la temp. max in $x = 0$

$$t(0) = -\frac{2{,}5 \cdot 10^4}{10}\frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + \underbrace{c_2}_{82{,}125}$$

$$t(0) = 82{,}125\ °C$$