

Onde

Prima di parlare di onde, richiamiamo il concetto di “**campo**”.

*In fisica per “**campo**” si intende qualsiasi quantità fisica definita in ogni istante in ogni punto dello spazio.*

Abbiamo come esempi:

-il campo elettrico, il campo magnetico, i vari campi di forze (in particolare il campo gravitazionale); questi sono “**campi vettoriali**” in quanto espressi da un vettore. Per la loro trattazione si ricorre, di solito, alle componenti in un opportuno sistema di coordinate.

-il “**campo di pressione**” (ad es. quella atmosferica) è invece un campo di tipo “**scalare**”, poiché per definirlo definito basta una sola quantità numerica; campi scalari sono anche la *temperatura* e la *densità* di un corpo.

Se siamo in una situazione di equilibrio (per il campo) e perturbiamo il campo in un punto, osserviamo sperimentalmente che questa perturbazione non resta confinata in quel punto, ma si propaga ai punti vicini e via via a tutto il mezzo circostante. In un linguaggio intuitivo diciamo che abbiamo generato un’**onda**.

L’onda è pertanto una perturbazione di un campo, che si propaga nel mezzo.

La velocità di propagazione della perturbazione e quindi dell’onda è in genere misurabile direttamente.

Se io batto le mani perturbo la pressione di quella quantità d’aria che sta tra le mie mani. Questa perturbazione si propaga dando origine ad un’**onda sonora** che altro non è se non un’onda di pressione in un gas.

Se butto un sasso sulla superficie in quiete di uno stagno vedo una serie di cerchi concentrici che partendo dal punto di caduta si allarga sempre più in senso radiale. Ho generato un’**onda superficiale** in un liquido.

Chi è in questo caso il “campo” che si propaga? È un campo di spostamento, una *lunghezza* che esprime di quanto la superficie del liquido si è allontanata (localmente) dalla posizione di equilibrio. L’esperimento fatto con i “sugheri da pescatore” disposti sulla superficie dell’acqua in senso radiale, ci fa vedere che le molecole dell’acqua non si muovono in senso radiale, ma oscillano su e giù in senso verticale. In altre parole nella direzione in cui si propaga l’onda (direzione radiale) non c’è trasporto (propagazione) di materia. Quello che si propaga è “lo stato di moto” delle molecole dell’acqua. La propagazione di uno stato di moto comporta, intuitivamente, la propagazione dell’energia cinetica ad esso associata.

Come possiamo rappresentare matematicamente la propagazione di un campo, se ne abbiamo misurato sperimentalmente la velocità di propagazione?

Limitiamoci ad un campo scalare e ad una sola direzione di propagazione (asse x - che nel caso delle onde sulla superficie di un liquido potrebbe essere una qualsiasi direzione radiale, vista la simmetria circolare della situazione).

Se abbiamo una funzione $f(x)$ che descrive un campo scalare,

$f(x-a)$ rappresenta la stessa funzione traslata della quantità a nel verso positivo delle x .

Infatti, per ottenere in $f(x-a)$ il valore $f(0)$, che $f(x)$ assume nel punto 0 , mi devo mettere nel punto di coordinata $x=a$: $f(x-a)$ in $x=a$ diventa $f(a-a)$ ossia $f(0)$.

Con analogo ragionamento vedo che:

$f(x+a)$ rappresenta la funzione $f(x)$ traslata della quantità a nel verso negativo dell'asse delle x .

A questo punto basta sostituire la costante a con la variabile vt : $a=vt$. Pertanto $f(x-vt)$ rappresenta un campo che, nel tempo t , si è spostato della quantità $+vt$, ossia si è propagato con velocità v nel verso positivo dell'asse x . Ovviamente $f(x+vt)$ rappresenta un campo che si propaga nel verso negativo, sempre con velocità v .

Se per rappresentare un qualsiasi campo scalare, o una componente di un campo vettoriale usiamo il simbolo ξ , $\xi(x-vt)$ rappresenta l'onda che va nel verso positivo, $\xi(x+vt)$ rappresenta l'onda che va nel verso negativo.

Dato un sistema fisico (una corda tesa, una sbarra d'acciaio, un volume d'aria, una massa d'acqua, oppure lo spazio vuoto) come possiamo sapere se in esso si possono propagare onde? E, in caso di risposta positiva, con che velocità?

Se in quel sistema un qualche campo ξ obbedisce ad un'equazione differenziale del tipo

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = v^2 \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2$$

(detta "equazione d'onda" o di d'Alembert)

il sistema è in grado di propagare onde con velocità v .

È facile verificare mediante sostituzione che le funzioni $\xi(x-vt)$ e $\xi(x+vt)$ sono soluzioni particolari dell'equazione d'onda.

La soluzione generale è data dalla combinazione lineare di due soluzioni particolari:

$$\xi(x,t) = A \cdot \xi(x-vt) + B \cdot \xi(x+vt)$$

con A e B costanti da determinarsi in base alle condizioni al contorno date dal sistema.

Da un punto di vista fisico l'ultima equazione ci dice una cosa molto importante: quando un campo si propaga in un sistema, *qualsiasi situazione può essere rappresentata dalla sovrapposizione di due onde, di opportuna ampiezza (data da A e B), una che si propaga in un verso (onda diretta), l'altra nel verso opposto (onda inversa o riflessa) e con la stessa velocità* (il sistema è da considerarsi isotropo).

16.2 Onde armoniche

va bene quanto c'è sul libro di testo

16.3 Onde in una corda tesa

va bene quanto c'è sul libro di testo

16.4 Propagazione dell'energia in una corda tesa

va bene quanto c'è sul libro di testo

Intensità di un'onda

Per *intensità* intendiamo la *potenza per unità di area* trasportata dall'onda:

$$I = P/\Sigma$$

Dall'espressione della potenza trasportata da un'onda trasversale che si propaga in una corda,

$$P = \frac{1}{2} m_l \omega^2 \xi_0^2 \cdot v$$

se scriviamo la massa per unità di lunghezza come $m_l = \rho \Sigma$ (dove ρ è la densità di massa volumica: kg/m^3 e Σ la sezione della corda), la potenza trasmessa è:

$$P = \frac{1}{2} \rho \Sigma \omega^2 \xi_0^2 \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \cdot v \cdot \Sigma.$$

La quantità $w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$, simile a $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ (per l'onda armonica $v = dx/dt = \omega \xi$) rappresenta l'energia del sistema per unità di volume, in quanto ρ è la massa di un volume unitario. Pertanto abbiamo:

$$P = w \cdot v \cdot \Sigma$$

e

$$I = P/\Sigma = w \cdot v$$

e

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v$$

Ne seguono due proprietà importanti, valide per qualsiasi tipo di onda armonica:

1) *l'intensità (media) di un'onda si ottiene moltiplicando la densità di energia per unità di volume (w) per la velocità di propagazione dell'onda: $I = w \cdot v$*

2) *l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo: $I \propto \xi_0^2$.*

Dall'ultima relazione ricaviamo anche l'ampiezza ξ_0 dell'onda in funzione dell'intensità I:

$$\xi_0^2 = 2I/(\rho v \omega^2) \quad \text{e} \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{2I}}{\omega \sqrt{\rho v}} .$$

Onde sonore in un gas

Sono dovute alla propagazione di una perturbazione locale della posizione delle molecole del gas.

Si propaga un **campo di spostamento** (delle molecole dalla loro posizione di equilibrio). Questo spostamento è molto piccolo ($\xi_0 \approx 10^{-10}$ m per suoni di intensità normale) se paragonato alla distanza media tra le molecole del gas.

Nelle onde sonore, con la stessa velocità del campo di spostamento, si propaga anche un **campo di pressione** dovuto alla diversa densità volumica (ρ) locale causata dallo spostamento delle molecole.

Per entrambi la velocità è:

$$v = \sqrt{\beta/\rho}$$

con $\beta = \rho \cdot \partial p / \partial \rho$, *modulo di compressibilità* del gas*.

Se lo spostamento delle molecole avviene in modo rapido (come accade nelle onde sonore), gli scambi di calore possono essere trascurati ed il tipo di trasformazione assimilato ad una **adiabatica reversibile**. Se assimiliamo che il gas reale si comporti come ad gas ideale, vale la

$$pV^\gamma = \text{cost.}$$

Detta M la massa del gas, il suo volume è $V = M/\rho$,

$$\begin{aligned} \text{quindi} \quad p(M/\rho)^\gamma &= \text{cost.} \rightarrow p = \rho^\gamma \cdot \text{cost}^* \rightarrow \partial p / \partial \rho = \gamma \rho^{\gamma-1} \cdot \text{cost}^* \\ \text{e} \quad \beta &= \rho \cdot \partial p / \partial \rho = \rho \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} \cdot \text{cost}^* = \gamma \rho^\gamma \cdot \text{cost}^* = \gamma p. \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$v = \sqrt{\gamma p / \rho} .$$

Dall'equazione di stato di un gas ideale ($pV = nRT$ ossia $p = \rho nRT/M$ e $p/\rho = nRT/M$) otteniamo

$$v = \sqrt{\gamma nR/M} \cdot \sqrt{T} = \alpha \cdot \sqrt{T} .$$

La velocità di propagazione dipende solo dalla temperatura assoluta e dal tipo di gas.

Per l'aria, miscela di gas diversi, α si determina sperimentalmente e si ottiene $\alpha = 20,055$.

La velocità delle onde sonore nell'aria è pertanto

$$v = 20,055 \cdot \sqrt{T} \text{ m/s} .$$

*Se un gas si trova in equilibrio alla pressione p_0 e densità ρ_0 ed opero una compressione infinitesima $p_0 \rightarrow p_0 + dp$, la densità passa da ρ_0 a $\rightarrow \rho_0 + d\rho$. Esperimenti condotti con vari gas mostrano che dp e $d\rho$ sono legati da una relazione del tipo:

$$d\rho/\rho_0 = (1/\beta)dp.$$

β , chiamato **modulo di compressibilità**, è caratteristico del gas ed è determinato in base ai dati sperimentali.

L'onda di pressione

Per l'onda di pressione si dimostra che per la *pressione istantanea* p vale la relazione:

$$p - p_0 = -\beta \cdot \partial \xi / \partial x$$

con p_0 pressione di equilibrio (quella del gas in assenza dell'onda).

Assumendo che nel gas si stia propagando un'onda di spostamento di tipo armonico

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t),$$

abbiamo:

$$\partial \xi / \partial x = k \xi_0 \cos(kx - \omega t), \quad v = \sqrt{\beta / \rho} \rightarrow \beta = v^2 \rho; \quad p - p_0 = -v^2 \rho k \xi_0 \cos(kx - \omega t), \quad p - p_0 = \rho k v^2 \xi_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2).$$

Indicando con $\mathcal{P} = p - p_0$ lo scostamento della pressione dal valore di equilibrio, abbiamo:

$$\mathcal{P} = \rho k v^2 \xi_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2) = \mathcal{P}_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi/2)$$

che rappresenta un'onda *armonica di pressione* di ampiezza

$$\mathcal{P}_0 = \rho k v^2 \xi_0 = \rho \omega v \xi_0.$$

Da $I = \frac{1}{2} \cdot \rho v \omega^2 \xi_0^2$, si ricava:

$$I = \mathcal{P}_0^2 / (2 \rho v).$$

Il decibel

L'orecchio umano è dotato di una vasta dinamica. Ossia può percepire suoni la cui intensità varia da un minimo di circa 10^{-12} W/m^2 (soglia di udibilità) ad un massimo di circa 1 W/m^2 (soglia del dolore).

Per questo fatto non si usa una scala lineare per rappresentare l'intera gamma, bensì una scala logaritmica: l'intensità in **decibel** (dB) è definita come

$$I_{(\text{dB})} = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0)$$

con $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ valore convenzionale assunto come soglia di udibilità.

La soglia del dolore è pertanto situata alla intensità $I_{(\text{dB})} = 120 \text{ dB}$. Una conversazione normale corrisponde a circa 50 dB; mentre negli ambienti di lavoro il livello sonoro non dovrebbe mai superare gli 85 dB.

Nota. Alla soglia di udibilità l'ampiezza dell'onda (armonica) di pressione è

$$\mathcal{P}_0^2 = 2I\rho v = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,3 \cdot 340 = 8,84 \cdot 10^{-10}$$

da cui

$$\mathcal{P}_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa},$$

circa $3 \cdot 10^{-10}$ volte la pressione atmosferica.

L'*ampiezza dell'onda di spostamento* dipende dalla frequenza; a 1000 Hz essa è

$$\xi_0 = \mathcal{P}_0 / (\rho \omega v) \approx 10^{-11} \text{ m}$$

(per confronto le dimensioni stimate dell'atomo di idrogeno sono $\approx 10^{-10} \text{ m}$).

Onde elettromagnetiche

Il punto di partenza per dimostrare l'esistenza di onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto sono le equazioni di Maxwell applicate ad uno spazio vuoto ($\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$), lontano dalle sorgenti del campo e.m. ($\rho=0$, $\mathbf{j}=0$):

- 1) $\text{div } \underline{\mathbf{E}} = 0$
- 2) $\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0$
- 3) $\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\partial \underline{\mathbf{B}} / \partial t$
- 4) $\text{rot } \underline{\mathbf{B}} = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial \underline{\mathbf{E}} / \partial t$

Coordinate cartesiane (x,y,z)

$$1a) \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z = 0$$

$$2a) \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$$

$$\begin{aligned} \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z &= -\partial B_x / \partial t \\ 3a) -\partial E_z / \partial x + \partial E_x / \partial z &= -\partial B_y / \partial t \\ \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y &= -\partial B_z / \partial t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_x / \partial t \\ 4a) -\partial B_z / \partial x + \partial B_x / \partial z &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_y / \partial t \\ \partial B_y / \partial x - \partial B_x / \partial y &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_z / \partial t \end{aligned}$$

Soluzione per onde piane

Cerchiamo una soluzione delle Eq. di Maxwell, che dipenda da una sola coordinata spaziale, ad esempio la x . Nelle 1a-4a) risulta pertanto: $\partial / \partial y = 0$ e $\partial / \partial z = 0$. Se esistono delle soluzioni per i campi $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$, questi avranno identico valore in tutti i punti $x = \text{cost.}$ ossia **su ogni piano ortogonale all'asse x .**

Se inoltre le soluzioni di cui sopra hanno carattere propagatorio, ciascuna componente dei campi obbedisce all'equazione d'onda unidimensionale

$$[\partial^2 \xi / \partial x^2 = (1/v^2) \cdot (\partial^2 \xi / \partial t^2)].$$

Esse prenderanno pertanto il nome di **onde piane.**

Le 1a-4a) diventano:

$$1b) \partial E_x / \partial x = 0$$

$$2b) \partial B_x / \partial x = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial B_x / \partial t \\ 3b) -\partial E_z / \partial x &= -\partial B_y / \partial t \\ \partial E_y / \partial x &= -\partial B_z / \partial t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_x / \partial t \\ 4b) -\partial B_z / \partial x &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_y / \partial t \\ \partial B_y / \partial x &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial E_z / \partial t \end{aligned}$$

Da 1b) e dalla prima delle 4b) risulta $\mathbf{E}_x(\mathbf{x},t) = \text{cost.}$;
 mentre da 2b) e dalla prima delle 3b) risulta $\mathbf{B}_x(\mathbf{x},t) = \text{cost.}$
 Per ragioni legate all' energia finita associata ai campi:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(\mathbf{x},t) &= 0 \\ \mathbf{B}_x(\mathbf{x},t) &= 0\end{aligned}$$

è l'unica soluzione possibile.

I campi $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ non hanno componenti lungo la direzione \mathbf{x} .

Derivando

rispetto a \mathbf{x} la 2^a delle 3b): $\partial^2 E_z / \partial x^2 = \partial^2 B_y / \partial t \cdot \partial x$

e

rispetto a \mathbf{t} la 3^a delle 4b): $\partial^2 B_y / \partial x \cdot \partial t = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_z / \partial t^2$

otteniamo:

$$\partial^2 E_z / \partial x^2 = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_z / \partial t^2$$

ossia *l'equazione d'onda* per la componente E_z con $1/v^2 = \epsilon_0 \mu_0$.

Quindi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Poiché le onde e.m. si propagano con la velocità della luce:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

In modo analogo otteniamo

$$\partial^2 E_y / \partial x^2 = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_y / \partial t^2$$

cosa ovvia poiché la suddivisione del campo elettrico \mathbf{E} in E_y ed E_z dipende dall'orientazione degli assi y e z , che può essere scelta a piacere ruotandoli attorno all'asse x . In altre parole, con opportuna rotazione degli assi il campo $\underline{\mathbf{E}}$ può essere o tutto E_y o tutto E_z .

Derivando

rispetto a \mathbf{x} la 3^a delle 4b): $\partial^2 B_y / \partial x^2 = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_z / \partial t \cdot \partial x$

e

rispetto a \mathbf{t} la 2^a delle 3b): $\partial^2 B_y / \partial t^2 = \partial^2 E_z / \partial x \cdot \partial t$

otteniamo:

$$\partial^2 B_y / \partial x^2 = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 B_y / \partial t^2$$

ossia *l'equazione d'onda* per la componente B_y .

In modo analogo si ha l'equazione d'onda per la componente B_z :

$$\partial^2 B_z / \partial x^2 = (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 B_z / \partial t^2$$

In definitiva si hanno le quattro equazioni d'onda:

$$\begin{aligned}\partial^2 E_y / \partial x^2 &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_y / \partial t^2 & \partial^2 E_z / \partial x^2 &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 E_z / \partial t^2 \\ \partial^2 B_y / \partial x^2 &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 B_y / \partial t^2 & \partial^2 B_z / \partial x^2 &= (\epsilon_0 \mu_0) \cdot \partial^2 B_z / \partial t^2.\end{aligned}$$

Le onde associate si propagano nella direzione \mathbf{x} , tutte con la stessa velocità (di fase)

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

Le **soluzioni** delle quattro equazioni d'onda di cui sopra non sono indipendenti poiché ciascuna di esse deve soddisfare alle Equazioni di Maxwell 1a-4a).

Assumiamo per E_y una soluzione di tipo armonico: $E_y = E_{0y} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$

La terza delle 3b) ci dà:

$$kE_{0y} \cdot \cos(kx - \omega t) = -\partial B_z / \partial t,$$

da cui

$$B_z = -kE_{0y} \int \cos(kx - \omega t) dt \rightarrow B_z = (k/\omega) E_{0y} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$$

ossia

$$B_z = (k/\omega) E_y \rightarrow B_z = E_y / c$$

In modo simile si ottiene

(si ricordi che $\omega = kv = kc$)

$$B_y = -(k/\omega) E_z \rightarrow B_y = -E_z / c$$

Da $E^2 = E_y^2 + E_z^2$ e $B^2 = B_y^2 + B_z^2$, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}/v = \mathbf{E}/c$$

Come si vede, il campo magnetico \mathbf{B} è completamente determinato se si conosce il campo elettrico \mathbf{E} . Non abbiamo pertanto quattro onde distinte che si propagano con la stessa velocità, bensì una sola "*onda elettromagnetica*".

Il *prodotto interno*

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = 0 \cdot 0 + E_y \cdot [-(k/\omega) E_z] + E_z \cdot (k/\omega) E_y = 0$$

risulta in

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

I vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} quindi sono **ortogonali tra loro**, oltre che **alla direzione di propagazione** ($E_x=0, B_x=0$).

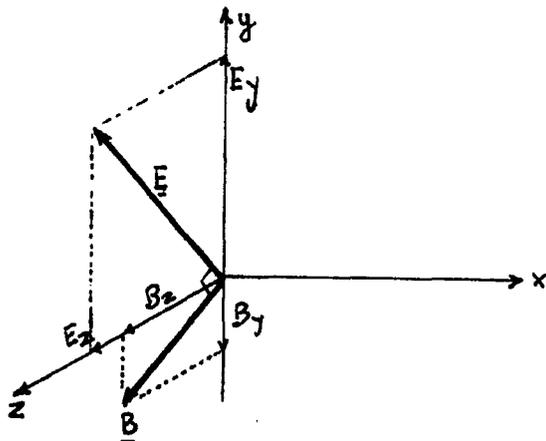
Il *prodotto esterno* tra \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{u}_x \cdot E^2 / c$$

risulta in:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{u}_x \cdot E^2 / c$$

che fornisce anche la *direzione di propagazione dell'onda*.



Rappresentazione schematica di un'onda elettromagnetica piana

L'energia trasportata da un'onda e.m. piana

Possiamo definire l'*intensità* di un'onda e.m. piana utilizzando la relazione generale:

$$\mathbf{I} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

che per la propagazione nel vuoto diventa

$$\mathbf{I} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{c}$$

con *u densità volumica* di energia associata all'onda e.m. .

\mathbf{u} è la somma della densità di energia del campo elettrico e di quella del campo magnetico:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_m .$$

Ammettendo che per \mathbf{u}_e e \mathbf{u}_m valgano le relazioni:

dell'elettrostatica

$$u_e = (\frac{1}{2})\epsilon_0 E^2 ,$$

e della magnetostatica

$$u_m = (\frac{1}{2})B^2/\mu_0 ,$$

abbiamo (si ricordi che $B=E/c \rightarrow B^2=E^2\epsilon_0\mu_0$)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_m = (\frac{1}{2})\epsilon_0 E^2 + (\frac{1}{2})B^2/\mu_0 = \epsilon_0 E^2$$

e

$$\boxed{\mathbf{I} = c\epsilon_0 E^2}$$

Per un'onda armonica $E=E_0\text{sen}(kx-\omega t)$ $\rightarrow\rightarrow$

$$\mathbf{I} = c\epsilon_0 E_0^2 \cdot \text{sen}^2(kx-\omega t) .$$

Il termine di fase $(kx-\omega t)$ ci dice che \mathbf{I} è una quantità che si propaga (con la stessa velocità dell'onda, $v=\omega/k$), assicurando così la trasmissione dell'energia. La funzione sen^2 , essendo sempre positiva o nulla, ci assicura che il valore medio di \mathbf{I} è $\mathbf{I}_{\text{med}} > 0$, ossia che c'è un flusso netto di energia nella direzione in cui viaggia l'onda:

$$\boxed{\mathbf{I}_{\text{med}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2}$$

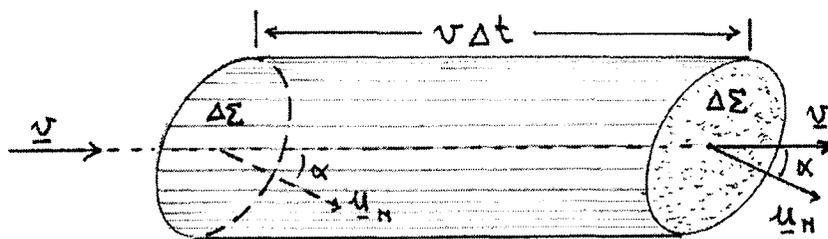
Quando si parla di *intensità* di *un'onda e.m.* di solito si intende l'*intensità media*. Pertanto d'ora in poi scriveremo sempre

$$\boxed{\mathbf{I} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2}$$

Si noti che nella precedente espressione E_0 non è il valore istantaneo del campo elettrico bensì la sua *ampiezza*.

Per poter “ricevere” un’onda e.m. noi “catturiamo” la potenza (trasportata dall’onda) che passa attraverso una certa superficie $\Delta\Sigma$, interposta sul cammino dell’onda stessa (nelle ricezioni delle onde radio questa funzione è svolta dall’ antenna, ed infatti si chiama “area efficace” di un’ antenna l’area Σ della superficie d’onda che trasporta la potenza che l’ antenna, pensata come un generatore di f.e.m., trasferisce al carico).

Per il calcolo dell’intensità attraverso una qualsiasi superficie $\Delta\Sigma$, la cui normale \underline{u}_N forma un certo angolo α con la direzione di propagazione dell’onda, partiamo dal calcolo della quantità di energia ΔU trasportata dall’onda e.m. attraverso (intercettata da) $\Delta\Sigma$ in un dato intervallo di tempo Δt . Essa è l’energia contenuta (“intrappolata”) nel volume $\Delta\tau$ del cilindro a basi oblique (di area $\Delta\Sigma$) di lunghezza $v\Delta t$.



Con riferimento alla figura sovrastante, abbiamo:

$$\Delta\tau = \Delta\Sigma \cdot v\Delta t \cdot \cos\alpha$$

e

$$\Delta U = \mathbf{u} \cdot \Delta\tau = \epsilon_0 E^2 \cdot \Delta\Sigma \cdot v\Delta t \cdot \cos\alpha.$$

La *potenza* ΔP attraverso $\Delta\Sigma$ è :

$$\Delta P = \Delta U / \Delta t = \epsilon_0 E^2 \cdot v \cdot \cos\alpha \cdot \Delta\Sigma$$

e l’intensità

$$\mathbf{I}_\Sigma = \Delta P / \Delta\Sigma = \epsilon_0 E^2 \cdot v \cdot \cos\alpha = \epsilon_0 E^2 \cdot \mathbf{v} \cdot \underline{u}_N .$$

Come si può vedere \mathbf{I}_Σ coincide con l’intensità dell’onda se la superficie $\Delta\Sigma$ è ortogonale alla direzione di propagazione dell’onda. E anzi potremmo assumere come definizione dell’intensità di un’onda l’energia per unità di tempo e di superficie che attraversa una superficie piana, posta ortogonalmente alla direzione di propagazione dell’onda.

Il vettore di Poynting

Alla quantità $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 \cdot \underline{\mathbf{v}}$ si dà il nome di "vettore di Poynting"

$$\underline{\mathbf{S}} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \cdot \underline{\mathbf{v}}$$

(il modulo del vettore di Poynting altro non è che l'*intensità dell'onda* ($v=c$))

L'*intensità* attraverso $\Delta\Sigma$ può pertanto essere scritta come:

$$\mathbf{I} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_N$$

e la potenza attraverso una superficie finita Σ :

$$\mathbf{P} = \int_{\Sigma} d\mathbf{P} = \int_{\Sigma} \mathbf{I} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma} \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_N \cdot d\Sigma$$

che risulta quindi essere il *flusso del Vettore di Poynting attraverso Σ* .
È facile vedere che valgono le seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{S}} = (1/\mu_0) \cdot \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{B}}$$

e

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}$$

isotropo (isos→ identico, tropos→direzione) *non dipende dalla direzione*
omogeneo (omos→ simile, genos→origine) *non dipende dalla posizione*

Onde sferiche

Se la sorgente (sonora o altro) si può considerare puntiforme, essa irradia in modo isotropo. Se anche il mezzo circostante è *isotropo* e *omogeneo*, la perturbazione si trasmette in tutte le direzioni e con la stessa velocità.

Dopo un intervallo di tempo t , la perturbazione avrà raggiunto tutti i punti che distano $r=v \cdot t$ dalla sorgente, ossia i punti di una superficie sferica di raggio $v \cdot t$.

Noi definiamo:

superficie d'onda il luogo dei punti raggiunti dalla perturbazione in uno stesso istante.

Nel caso di cui sopra pertanto la *superficie d'onda* è *sferica*.

Noi "battezziamo" le onde a seconda del tipo di superficie d'onda: nel caso precedente pertanto siamo di fronte ad un' *onda sferica*.

Detto questo è immediato il concetto di onda piana ed anche quello di onda cilindrica. Richiamiamo tuttavia l'attenzione sul fatto che questi ultimi due tipi di onde sono un'astrazione matematica, comoda, ma non fisica in quanto le superfici d'onda hanno estensione infinita (e un'onda di intensità finita dovrebbe trasportare una potenza infinita). Le onde sferiche, viceversa, rappresentano casi reali, tutte le volte che le dimensioni delle sorgenti sono piccole rispetto alla distanza di osservazione.

Oltre alla proprietà topologica appena descritta, l'onda sferica ne possiede altre. Tenuto conto che il mezzo è isotropo e omogeneo e la sorgente irradia uniformemente in tutte le direzioni, l'ampiezza dell'onda e quindi la sua intensità sono le medesime su ogni punto della stessa superficie d'onda.

Se P è la potenza emessa dalla sorgente, P è anche la potenza che attraversa qualsiasi superficie chiusa che contiene la sorgente (noi ammettiamo che il mezzo in cui si propaga l'onda *non sia dissipativo*). Se questa superficie è una sfera di raggio r centrata sulla sorgente abbiamo:

$$I = P/\Sigma = P/4\pi r^2 \propto 1/r^2$$

L'*intensità* è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza

$$E \text{ da } I \propto \xi_0^2 \qquad \xi_0 \propto 1/r$$

L'*ampiezza* è proporzionale all'inverso della distanza.

Se volessimo rappresentare un'onda sferica armonica dovremmo scrivere

$$\xi(r,t) = (B_0/r) \cdot \text{sen}(kr - \omega t) .$$

Interferenza

Interferenza tra due sorgenti

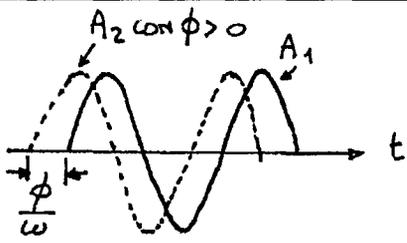
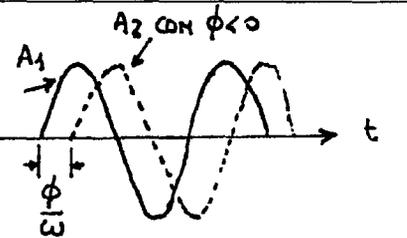
Consideriamo due sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 , che oscillano di moto armonico alla stessa frequenza (angolare) ω :

$$A_1 = A_{01} \cdot \text{sen}(\omega t) \quad \text{e} \quad A_2 = A_{02} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$$

-se $\phi=0$ le sorgenti sono dette *sincrone*,

-se $\phi=\text{costante}$ sono dette *coerenti*

-se $\phi=\phi^*(t)$ con ϕ^* funzione aleatoria del tempo esse sono semplicemente *incoerenti*.

<p>Se $\phi=\text{costante}$,</p> <p>con $\phi > 0$ $A_2 = A_{02} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$ rappresenta una oscillazione che è <i>in anticipo</i> (nel tempo) rispetto ad $A_1 = A_{01} \cdot \text{sen}(\omega t)$</p>	 <p style="text-align: center;">A_2 con $\phi > 0$</p>
<p>Se $\phi=\text{costante}$,</p> <p>con $\phi < 0$ $A_2 = A_{02} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$ rappresenta una oscillazione che è <i>in ritardo</i> (nel tempo) rispetto ad $A_1 = A_{01} \cdot \text{sen}(\omega t)$</p>	 <p style="text-align: center;">A_2 con $\phi < 0$</p>

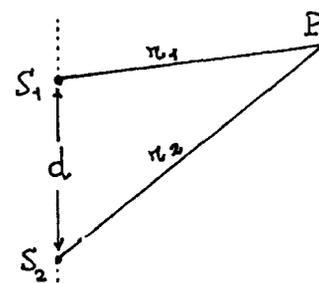
Nel caso in cui il mezzo che circonda le sorgenti sia omogeneo ed isotropo, le onde emesse dalle sorgenti sono di tipo sferico:

$$\xi_1 = B_{01} \cdot (1/r_1) \cdot \text{sen}(kr_1 - \omega t) \quad \text{e} \quad \xi_2 = B_{02} \cdot (1/r_2) \cdot \text{sen}(kr_2 - \omega t - \phi).$$

La seconda si ottiene sostituendo a $(\omega t) \rightarrow (\omega t + \phi)$ nell'espressione dell'onda armonica $\xi = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$. Se $\phi > 0$ pertanto, l'onda ξ_2 è *in anticipo* su ξ_1 . Viceversa, se $\phi < 0$ l'onda ξ_2 è *in ritardo* su ξ_1 .

Se il punto di osservazione P è individuato dalle distanze r_1 dalla sorgente S_1 ed r_2 dalla sorgente S_2 , che distano tra loro della quantità d , possiamo sostituire, per semplicità di scrittura, le ampiezze locali $B_{01} \cdot (1/r_1)$ e $B_{02} \cdot (1/r_2)$ con i simboli

$$\xi_{01} = B_{01} \cdot (1/r_1) \quad \text{e} \quad \xi_{02} = B_{02} \cdot (1/r_2)$$



ottenendo

$$\xi_1(P) = \xi_{01} \cdot \text{sen}(kr_1 - \omega t) \quad \text{e} \quad \xi_2(P) = \xi_{02} \cdot \text{sen}(kr_2 - \omega t - \phi).$$

Nel punto **P** le due onde “*interferiscono*” e per il calcolo dell’ampiezza risultante, si applica il *principio di sovrapposizione*. Il campo in **P** risulta:

$$\xi(P) = \xi_1(P) + \xi_2(P)$$

ossia

$$\xi(P) = \xi_{01} \cdot \text{sen}(kr_1 - \omega t) + \xi_{02} \cdot \text{sen}(kr_2 - \omega t - \phi)$$

La *differenza di fase* delle onde che giungono in **P** è:

$$\delta = kr_2 - \omega t - \phi - (kr_1 - \omega t) = k(r_2 - r_1) - \phi = (2\pi/\lambda) \cdot (r_2 - r_1) - \phi.$$

Come caso più semplice, possiamo supporre $\phi=0$, ossia sorgenti non solo coerenti ma anche *sincrone*.

La somma delle due quantità armoniche che compaiono in $\xi(P)$ si fa con il *metodo dei fasori* o *metodo dei vettori rotanti* (vedi testo). Risulta:

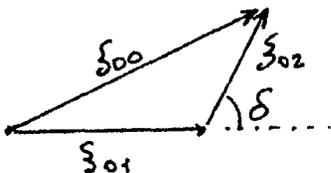
$$\xi(P) = \xi_{00} \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha).$$

Questo è un moto armonico di ampiezza ξ_{00} e fase iniziale α .

L’ampiezza ξ_{00} risulta data da (teor. di Pitagora generalizzato):

$$(\xi_{00})^2 = (\xi_{01})^2 + (\xi_{02})^2 + 2 \cdot (\xi_{01}) \cdot (\xi_{02}) \cdot \cos\delta$$

dove $\delta = k(r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda) \cdot (r_2 - r_1)$.



La fase iniziale α non ha interesse per il calcolo delle intensità

(per i più curiosi essa è data da: $\text{tg}\alpha = [\xi_{01} \cdot \text{sen}(kr_1) + \xi_{02} \cdot \text{sen}(kr_2)] / [\xi_{01} \cdot \text{cos}(kr_1) + \xi_{02} \cdot \text{cos}(kr_2)]$)

L’intensità di un’onda è proporzionale al quadrato dell’ampiezza (locale). Ad esempio:

per le onde (armoniche) elettromagnetiche piane abbiamo

$$I = (1/2) \cdot c \epsilon_0 E_0^2 ;$$

per le onde trasversali in una corda

$$I = (1/2) \cdot \rho \omega^2 v \cdot (\xi_0)^2 .$$

Quindi

$$I_{00} = I_{01} + I_{02} + 2 \cdot (I_{01})^{1/2} \cdot (I_{02})^{1/2} \cdot \cos\delta .$$

L’intensità è:

-**massima** per $\cos\delta=+1$ ossia per $\delta = m \cdot 2\pi$, con $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ quindi per

$$(2\pi/\lambda) \cdot (r_2 - r_1) = m \cdot 2\pi \quad \rightarrow \quad r_2 - r_1 = m\lambda \quad \text{massimi}$$

mentre è

-**minima** per $\cos\delta= -1$ ossia per $\delta = (2m+1) \cdot \pi$, con $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ quindi per

$$(2\pi/\lambda) \cdot (r_2 - r_1) = (2m+1) \cdot \pi \quad \rightarrow \quad r_2 - r_1 = (2m+1)\lambda/2. \quad \text{minimi}$$

Si noti come sia sufficiente una differenza di cammino di soli $\lambda/2$ per passare da un massimo ad un minimo. Per le onde luminose questo corrisponde a $0,2-0,4 \mu\text{m}$!

Sorgenti uguali

Se le sorgenti sono uguali ed $r_2, r_1 \gg d$, (d è la distanza tra le sorgenti) si ha: $\xi_{01} \approx \xi_{02} = \xi_0$ e

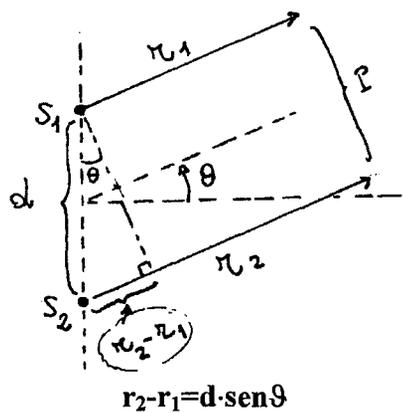
$$I_{00} = 2I_0 \cdot (1 + \cos\delta) = 4 I_0 \cdot \cos^2(\delta/2)$$

dove I_0 è l'intensità prodotta in P da ciascuna delle due sorgenti, in assenza dell'altra.

Nelle condizioni di **massimo** abbiamo $I_{00} = 4I_0$ mentre

nelle condizioni di **minimo** abbiamo $I_{00} = 0$.

a) Caso in cui il punto di osservazione è all'infinito (in pratica $r_2, r_1 \gg d$).



Abbiamo $r_2 - r_1 = d \cdot \sin\theta$ e $\delta = k(r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda) \cdot d \cdot \sin\theta$.

Quindi

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot d \cdot \sin\theta.$$

Le **posizioni angolari dei massimi** si hanno per

$$\delta = m \cdot 2\pi, \text{ con } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow m \cdot 2\pi = (2\pi/\lambda) \cdot d \cdot \sin\theta_M$$

ossia nelle direzioni date da:

$$\sin\theta_M = m\lambda/d \quad \text{con } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Il numero m individua l'**ordine** del massimo.

L'**intensità** dei massimi è sempre: $I_{00} = 4I_0$.

Si noti che il **più elevato ordine misurabile** è limitato dal fatto che $\sin\theta_M \leq 1$. In particolare se $d < \lambda$ esistono solo i massimi di ordine zero: $\theta_M = 0, \pi$.

Le **posizioni angolari dei minimi** si ricavano in modo analogo:

da

$$\delta = (2m+1) \cdot \pi, \text{ con } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

si ha

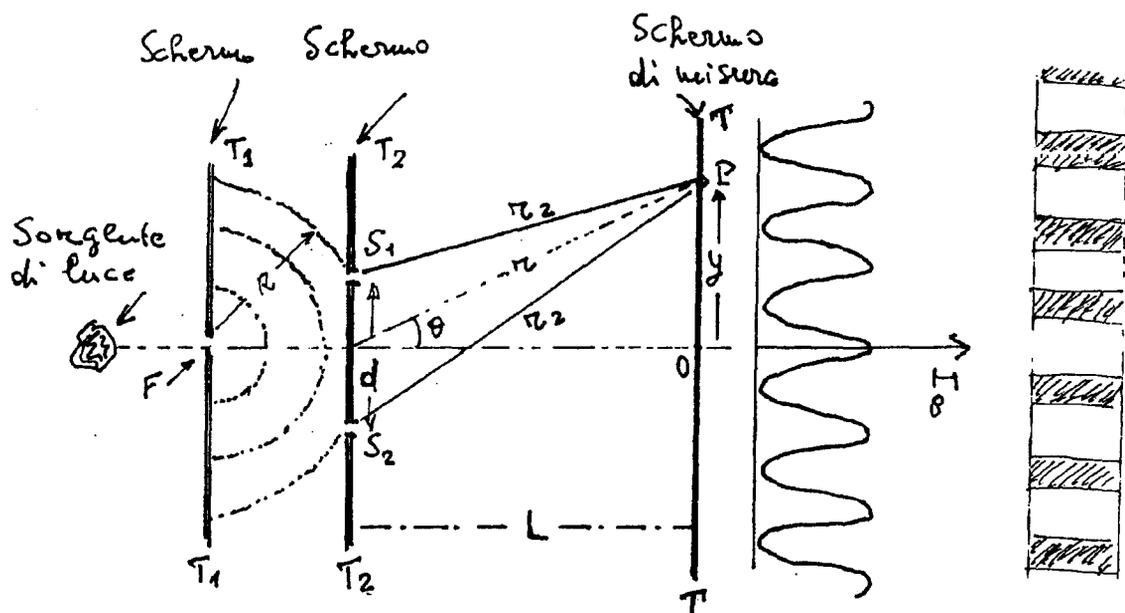
$$\sin\theta_m = (2m+1)\lambda/(2d) \text{ con } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

L'**intensità** nelle direzioni di **minimo** è $I_{00} = 0$.

b) Punto di osservazione a distanza finita: esperimento dei Fori di Young (anno 1801).

La necessità di disporre di due sorgenti coerenti fu risolta da Young con un ingegnoso metodo. Partendo da un'unica sorgente estesa di luce (lampada, fascio di luce solare) Young interpose un primo schermo (T_1) con un piccolo foro centrale F . Il foro F costituisce una sorgente di luce puntiforme che irradia onde sferiche.

Di fronte a T_1 e parallelamente a questo pose un secondo schermo T_2 con due fori (S_1 ed S_2) simmetrici rispetto all'asse passante per F . Tutti i punti del fronte d'onda (di raggio R) che passa per i fori S_1 ed S_2 hanno la stessa fase. I fori S_1 ed S_2 costituiscono pertanto due sorgenti coerenti, anzi in fase.



Il fenomeno di interferenza viene osservato su di un terzo schermo (senza fori!) T posto a distanza L dalle sorgenti.

La differenza di fase delle onde che giungono in P a distanza y dal centro O è come sempre

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot (r_2 - r_1) .$$

Questa volta però $r_2 - r_1$ non vale esattamente $d \cdot \sin\theta$. Tuttavia nell'ipotesi $L \gg d$ (valori tipici potrebbero essere $L=50$ cm, $d=1$ mm) possiamo scrivere

$$r_2 - r_1 \approx d \cdot \sin\theta \approx d \cdot \tan\theta \approx d \cdot y/L .$$

La differenza di fase risulta pertanto

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot d \cdot y/L .$$

Per il calcolo dell'intensità possiamo usare la relazione precedentemente scritta

$$I_{00} = 4 I_0 \cdot \cos^2(\delta/2)$$

Che diventa

$$I_{00} = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2[\pi \cdot d \cdot y / (\lambda L)].$$

I **massimi d'intensità** si hanno per

$$[\pi \cdot d \cdot y / (\lambda L)] = m\pi \quad \text{con } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ossia per

$$y = m \cdot \lambda L / d \quad \text{massimi .}$$

I **minimi** sono invece situati a

$$y = (2m+1) \cdot \lambda L / (2d) \quad \text{minimi .}$$

Allo spostarsi lungo lo schermo (y variabile), l'intensità varia col coseno quadrato della posizione y, come appare nel disegno allegato. Questo è quanto si osserva se ad esempio noi spostiamo un fotodiode lungo la direzione y e ne registriamo il segnale.

Young non aveva a disposizione mezzi d'indagine così sofisticati, doveva accontentarsi di osservare direttamente la luce sullo schermo (T). Quello che appare sullo schermo è una serie di zone chiare in corrispondenza dei massimi intercalate da zone scure che corrispondono ai minimi.

Questo esperimento riesce meglio se al posto dei fori sugli schermi si impiegano delle **fenditure** parallele (di cui F, S₁ ed S₂ in figura sono le sezioni). Oltre ad avere a disposizione una maggior quantità di luce, la figura di interferenza che appare sullo schermo dipende da una sola variabile, la y, ed è costituita da una successione di righe chiare e scure, le **frange d'interferenza**.

La distanza che separa due successive **frange chiare** è la stessa che separa due successive **frange scure** e vale

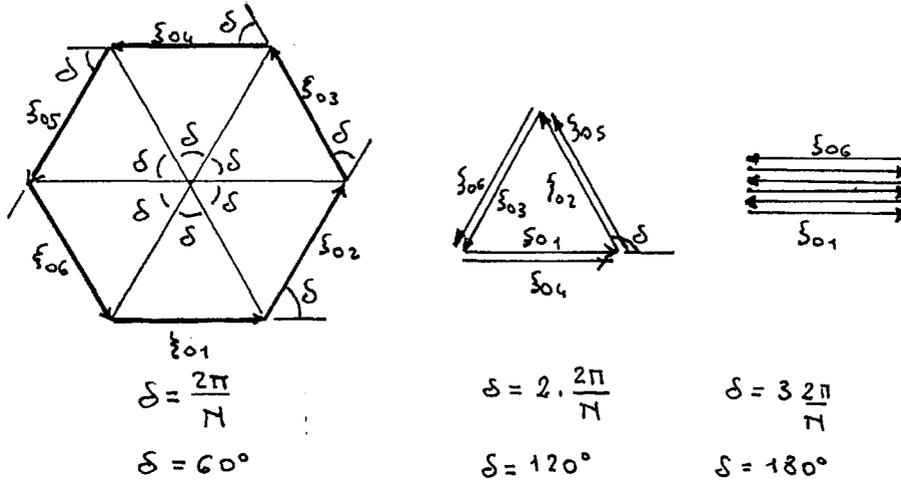
$$\Delta y = \lambda L / d .$$

Δy , L e d sono quantità direttamente misurabili, per cui dalla relazione precedente è possibile ricavare la lunghezza d'onda λ .

Questo esperimento costituisce una tappa fondamentale nella storia della fisica poiché fornì la prima prova sperimentale della natura ondulatoria della luce.

Condizioni di minimo nullo: $\xi_{00} = 0$

Caso di $N=6$ sorgenti (uguali)

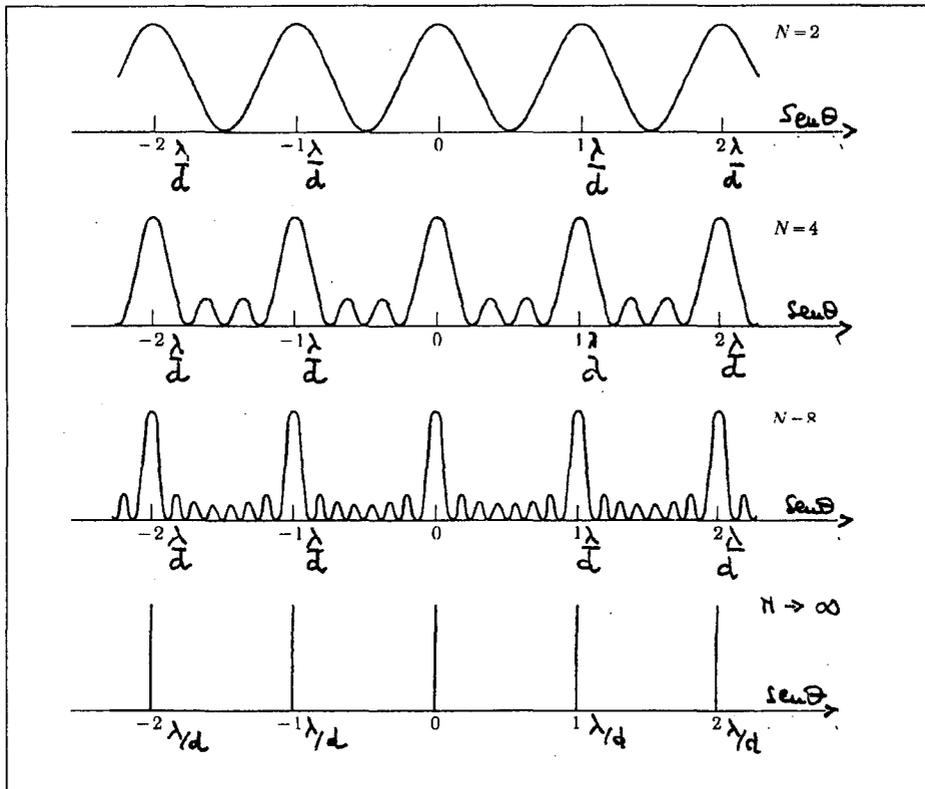


Si ha $\xi_{00} = 0$ tutte le volte che i vettori rotanti si dispongono a formare un poligono chiuso ossia tutte le volte che

$$\delta = n' \cdot 2\pi/N \quad \text{con } n'=1,2,\dots,N-1, N+1,\dots,2N-1,2N+1,\dots$$

Da $\delta = [2\pi/\lambda] \cdot d \cdot \text{sen}\theta$, risulta

$$[2\pi/\lambda] \cdot d \cdot \text{sen}\theta_m = n' \cdot 2\pi/N \quad \text{ossia} \quad \text{sen}\theta_m = [n'/N] \cdot \lambda/d$$



n' non può assumere i valori $N, 2N, 3N, \dots$ poiché risulterebbe $\text{sen}\theta_m = \lambda/d, 2\lambda/d, 3\lambda/d, \dots$ **corrispondenti ad un massimo principale**. Quindi $n'=N, n'=2N, n'=3N$ individuano i massimi principali del 1° ordine ($m=1$), del 2° ordine ($m=2$), del 3° ordine ($m=3$), ecc.

Tra $0 < n' < N$, $N < n' < 2N$, $2N < n' < 3N$, ... ecc., n' individua un numero di **minimi nulli** pari a $N-1$.

Poiché tra due minimi ci deve essere un massimo e questo non è un massimo principale, vuol dire che sarà un **massimo secondario**. Tra due massimi principali pertanto ci sono anche $N-2$ **massimi secondari** (vedi figura precedente).

Applicazione

1) Con $N=4$ sorgenti poste alla distanza $d=\lambda$ dalla successiva, calcoliamo la posizione angolare dei massimi principali e dei minimi nulli. Abbiamo:

massimi principali:

$$\text{sen}\theta_M = m \cdot \lambda / d \rightarrow \text{sen}\theta_M = m \cdot \lambda / \lambda \rightarrow \text{sen}\theta_M = m \text{ che ammette le soluzioni}$$

$$\text{sen}\theta_M = 0 \rightarrow \theta_M = 0, \pi$$

$$\text{sen}\theta_M = \pm 1 \rightarrow \theta_M = \pm \pi/2$$

minimi nulli:

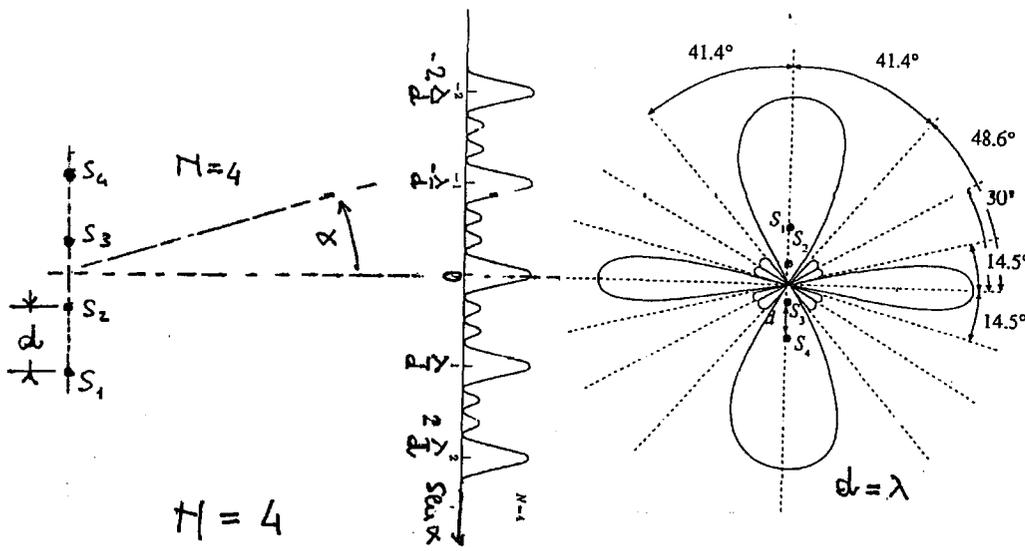
$$\text{sen}\theta_m = [n'/N] \cdot \lambda / d \rightarrow \text{sen}\theta_m = [n'/4] \cdot \lambda / \lambda \rightarrow \text{sen}\theta_m = n'/4$$

le cui soluzioni sono

$$\text{sen}\theta_{m1} = \pm 1/4 \rightarrow \theta_{m1} = \pm 14,47^\circ$$

$$\text{sen}\theta_{m2} = \pm 2/4 \rightarrow \theta_{m2} = \pm 30^\circ$$

$$\text{sen}\theta_{m3} = \pm 3/4 \rightarrow \theta_{m3} = \pm 48,59^\circ$$



2) Con $N=6$ sorgenti poste alla distanza $d=4\lambda$ dalla successiva, calcoliamo la posizione angolare dei minimi nulli adiacenti al massimo principale di ordine zero e il massimo del 1° ordine.

Massimo di ordine zero: situato a $\theta=0$.

Minimi nulli attorno a $\theta=0$ ($n'=\pm 1$):

$$\text{sen}\theta_{m1} = \pm 1 \cdot 1/6 \cdot \lambda / (4\lambda) = \pm 1/24 = \pm 0,041 \rightarrow \text{sen}\theta_{m1} = \pm 0,041 \rightarrow \theta_{m1} \pm 2,38^\circ$$

L'angolo compreso tra i due minimi adiacenti è pertanto

$$\Delta\theta = 2 \cdot 2,38^\circ = 4,76^\circ.$$

Massimi del primo ordine ($m=\pm 1$):

$$\text{situati a } \text{sen}\theta_{M1} = \pm 1 \cdot \lambda / d = \pm \lambda / (4\lambda) = \pm 1/4 = \pm 0,25 \rightarrow \theta_{M1} = \pm 14,47^\circ$$

Lavoriamo solo sul massimo a $+14,47^\circ$, l'altro dà un risultato simmetrico.

Minimi adiacenti il massimo del 1° ordine ($n'=N-1$; $n'=N+1$):

$$n'=N-1=5 \rightarrow \text{sen}\theta_{m5} = (5/6)\lambda / (4\lambda) = 0,208 \rightarrow \theta_{m5} = 12,02^\circ$$

$$n'=N+1=7 \rightarrow \text{sen}\theta_{m7} = (7/6)\lambda / (4\lambda) = 0,291 \rightarrow \theta_{m7} = 16,95^\circ$$

L'angolo compreso tra i due minimi adiacenti è pertanto

$$\Delta\theta = 4,93^\circ.$$