Teoremi della Trasformata assoluta di Laplace

Sia f(t) L – trasformabile. Posto $F(s) = L[f(t)]$ con $Re[s] > \rho$, ρ = ascissa di convergenza di $L[f(t)]$, si ha :

1. **Teorema della linearità :**
   Siano ρ_1 , ρ_2 le ascisse di convergenza di $L[f_1(t)]$ e $L[f_2(t)]$, allora $\forall\ c_1 \in \Re$ e $\forall\ c_2 \in \Re$ si ha

$$L\,[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] \qquad Re[s] = \max\{\rho_1 , \rho_2\}$$

2. **Teorema del cambiamento di scala :**
   Sia $a \in \Re^+$ allora

$$L\,[f(a\,t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad Re[s] > \rho\, a$$

3. **Teorema del ritardo (o della traslazione nel tempo)**
   Sia $a \in \Re^+$ allora

$$L\,[f(t - a)] = e^{-as} L[f(t)] \qquad Re\,[s] > \rho$$

4. **Teorema dello smorzamento (o della traslazione in frequenza)**

$\forall\ a \in \mathbf{C}$

$$L\,[e^{at} f(t)] = F(s-a) \qquad Re\,[s] > \rho + Re\,[a]$$

5. **Prima formula fondamentale (o della derivazione in frequenza) :**

$$L\,[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \forall\ n \geq 1 \qquad Re[s] > \rho$$

6. **Teorema della divisione per t (o di integrazione della trasformata)**

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma \qquad Re[s] > \rho \quad \text{e} \quad F(\sigma) = L[f(t)]$$

7. **Seconda formula fondamentale :**
   se f (t) e f '(t) sono L-trasformabili allora

$$L\,[f'(t)] = s\,L\,[f(t)] - f(0) \qquad Re[s] > \rho$$

Generalizzazione

$$L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - s f(0) - f'(0) \qquad \mathrm{Re}[s] > \rho$$

.

.

.

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ovvero $$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

8. **Teorema dell'integrale (o della divisione della trasformata)**

$$L\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{L(f)}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[s_0]$$

s_0 punto singolare più a destra nel secondo membro.

<u>*Ricordare*</u> :

$$L[e^t] = \frac{1}{s-1} \quad \text{dove } \mathrm{Re}[s] > 1 \;;$$

$$L[H(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{dove } \mathrm{Re}[s] > 0 \;;$$

$$L[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{e} \quad L[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1} \qquad \text{dove } \mathrm{Re}[s] > 0 \;;$$

$$L[\sinh(t)] = \frac{1}{s^2-1} \quad \text{e} \quad L[\cosh(t)] = \frac{s}{s^2-1} \qquad \text{dove } \mathrm{Re}[s] > 1 \;;$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{dove } \mathrm{Re}[s] > 0 .$$