• ALGEBRA LINEARE: si studiano i vettori, gli spazi vettoriali, i numeri, le equazioni lineari algebriche di 1° e 2° grado in più incognite, matrici, determinanti; in generale si studiano le proprietà degli spazi con n-dimensioni cioè $\mathbb{R}^n$.

• GEOMETRIA NELLO SPAZIO: proprietà delle rette, dei punti e dei piani nello spazio $\mathbb{R}^3$.

* Questi due linguaggi suddetti trattano i medesimi problemi.
* Perché si studiano gli spazi n-dimensionali? Un esempio molto concreto che ne illustra l'utilità è il seguente: si debba studiare il comportamento o meglio il moto nello spazio $\mathbb{R}^3$ di un punto materiale; per determinare in modo univoco la sua posizione e la sua velocità occorrono 6 coordinate cioè occorre risolvere un sistema di equazioni in uno spazio $\mathbb{R}^6$.

• CAPITOLO N° 1 (NOZIONI PRELIMINARI):

• CONCETTO DI INSIEME E CALCOLO INSIEMISTICO:

- DEFINIZIONE 1 (INSIEME): si definisce insieme una collezione, raccolta di numeri oppure di oggetti che soddisfano una determinata proprietà. In realtà il concetto di insieme ed elemento di un insieme è primitivo.
Un insieme può essere rappresentato in 3 modi distinti:

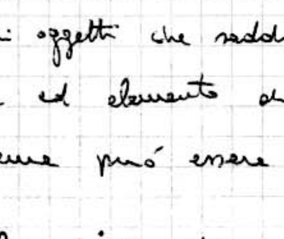
1 - Per elencazione dei propri elementi; ad esempio:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ (insieme dei numeri naturali);

2 - Per proprietà caratteristica; ad esempio:

$P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ (insieme dei numeri pari);

3 - Per via grafica (diagrammi di Eulero-Venn);



(+) alcuni simbolismi:

$\heartsuit \in A$ "$\in$" = simbolo di appartenenza

$\pi \notin A$ "$\notin$" = non appartenenza

$\exists\, x \in A : x \in A$ e $x \in B$ ":" o "|" = tale che

$\exists$ = esiste $\nexists$ = non esiste

$\exists!$ = esiste ed è unico $\forall$ = per ogni

i simboli $\forall$ ed $\exists$ sono detti rispettivamente quantificatore universale ed esistenziale.
Sia P l'insieme dei numeri pari ed $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali allora si ha che: $P \subset \mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N} \supset P$ cioè "$\subset$" è il simbolo di inclusione dove nel primo caso si legge "P è incluso in $\mathbb{N}$" nel secondo "$\mathbb{N}$ include P"; in generale con le notazioni:

$A \subset B$ ed $A \subseteq B$ si intende che l'insieme A è sottoinsieme proprio ed improprio di B; nel secondo caso si intende anche che possa essere $A = B$.

$\subset$ = inclusione stretta $\quad \subseteq$ = inclusione larga.

- se $A \subseteq B \iff \forall a \in A,\ a \in B$ $\quad \iff$ = "se e solo se" coimplicazione logica.
- se $A \subset B \iff \forall a \in A,\ a \in B$ ed $\exists b \in B : b \notin A$
- se $A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ (uguaglianza di due insiemi).

- <u>DEFINIZIONE 2 (INTERSEZIONE):</u> se $A, B \subset U$ allora:

$$A \cap B := \{ x \in U : x \in A \wedge x \in B \}$$ e si dice intersezione di A con B.

$\cap$ = intersezione, $:=$ per definizione, $\wedge$ = "et" cioè congiuntivo "e".
Due insiemi A e B si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune cioè si pone per convenzione $A \cap B = \emptyset$ (insieme vuoto).

- <u>DEFINIZIONE 3 (UNIONE):</u> se $A, B \subset U$ allora

$$A \cup B := \{ x \in U : x \in A \vee x \in B \}$$ e si dice unione di A con B.

$\cup$ = unione, $\vee$ = "oppure" cioè congiuntivo "o".

- <u>DEFINIZIONE 4 (DIFFERENZA):</u> se $A, B \subset U$ allora

$$A \setminus B := \{ x \in U : x \in A \wedge x \notin B \}$$ e si dice differenza di A da B.

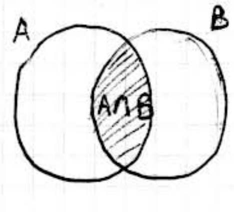
- <u>DEFINIZIONE 5 (PRODOTTO CARTESIANO):</u> siano A, B due insiemi; si chiama prodotto cartesiano di A con B (nell'ordine indicato), l'insieme

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A,\ b \in B \}$$ dove con (a, b) si denota una coppia ordinata di elementi.

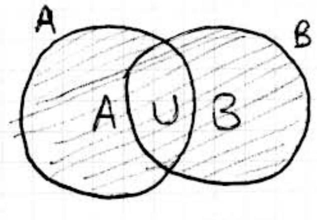
→ OSSERVAZIONI GRAFICHE (DIAGRAMMI DI EULERO-VENN):

- Siano A, B due insiemi

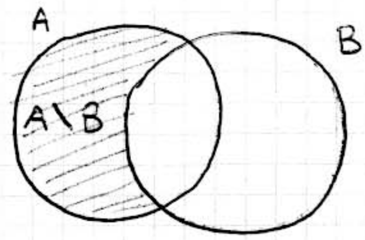
①



②



③



- Proprieta' dell'intersezione: sia $A, B, C \subset U$ allora

i) $A \cap U = A$;

ii) $A \cap B = B \cap A$ (proprieta' commutativa) ;

iii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (proprieta' associativa) ;

iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (proprieta' distributiva dell'intersezione rispetto l'unione).

- Proprieta' dell'unione: sia $A, B, C \subset U$ allora:

i) $A \cup U = U$;

ii) $A \cup B = B \cup A$ (proprieta' commutativa) ;

iii) $A \cup \emptyset = A$;

iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (proprieta' associativa).

* osservazione: $A \setminus B \neq B \setminus A$ (non commutativita' della differenza) ; inoltre $A \times B \neq B \times A$ (non commutativita' del prodotto cartesiano.

v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (proprieta' distributiva dell'unione rispetto l'intersezione).

• Insiemi numerici:

Naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Interi relativi $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Razionali $\mathbb{Q} = \{ m, n \in \mathbb{Z} : r = \frac{m}{n} \text{ con } n \neq 0 \}$.

Reali $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$.

- ESERCIZIO N° 1.1 :

Sia $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 6, 7\}$

Determinare $A \cap B$, $A \cup C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$, $(A \cup B) \cap C$;

1 - $A \cap B$:

$A \cap B = \{2, 6\}$

2 - $A \cup C$:

$A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

3 - $B \setminus C$:

$B \setminus C = \{2, 4, 8\}$

4 - $C \setminus B$:

$C \setminus B = \{3, 7\}$ si osserva che $B \setminus C \neq C \setminus B$

5 - $(A \cup B) \cap C$:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; $(A \cup B) \cap C = \{3, 6\}$

Determinare ora il prodotto cartesiano $B \times C$:

$$B \times C = \{(2,3), (2,6), (2,7), (4,3), (4,6), (4,7), (6,3), (6,6), (6,7), (8,3), (8,6), (8,7)\}$$

- ESERCIZIO N° 1.3 :

Dimostrare che $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ qualunque che siano gli insiemi A, B, C.
Per fare ciò occorre far vedere che risultano simultaneamente verificate le condizioni : $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ed anche $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

1) $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$:

$x \in (A\cap B)\cup C \iff x\in C$ oppure $x \in A\cap B$; se $x\in C \Rightarrow$ a maggior ragione $x\in A\cup C$ e $x\in B\cup C$ quindi si avrà in definitiva $x\in (A\cup C)\cap(B\cup C)$; se invece $x\in A\cap B \iff x\in A$ e $x\in B$ a maggior ragione si avrà che $x\in A\cup C$ e $x\in B\cup C$.

2) $(A\cup C)\cap(B\cup C)\subseteq (A\cap B)\cup C$:

si avrà allora dalle prime che $x\in A\cup C$ e $x\in B\cup C$
se $x\in C \Rightarrow$ a maggior ragione $x\in(A\cap B)\cup C$ mentre
se $x\notin C \Rightarrow x\in A\cap B$.

• ELEMENTI DI LOGICA :

Convenzioni sui simboli : $\Rightarrow$ significa "implica, allora" mentre $\iff$ significa doppia implicazione o coimplicazione o "se e solo se...", "è equivalente a...".
I simboli $|$, $:$ indicano "tale che...".
Si consideri la seguente proposizione :

p = "ogni gatto è verde" la negazione di P che si indica con il simbolo :

$\neg(p) = \neg p$ = "esiste un gatto non verde"

talvolta la negazione si indica oltre che con $\neg p$ anche con $\bar{p}$.

Sia ora data la seguente proposizione : q = "esiste la vita su un pianeta del sistema solare" $\Rightarrow$ $\bar{q}$ = "su nessun pianeta del sistema solare esiste la vita".

- Legame tra i quantificatori $\exists$ e $\forall$:

$\forall x\in I : p(x)$ sia vero $\iff \nexists x\in I : \neg p(x)$ sia vero.
$\exists x\in I : p(x)$ sia vero $\iff \not\forall x \in I : \neg p(x)$ sia vero.

quindi la negazione di "...$\forall$..." è "...$\exists$..." mentre per "...$\exists$..." è "...$\forall$...".

- Esempio : dimostrare che è falsa la seguente proposizione : "Se piove allora è bagnato" "è bagnato ma non ha piovuto". La negazione della frase precedente è invece : "non è bagnato e non ha piovuto".

In generale se $A \Rightarrow B$ si hanno i seguenti casi :

1) l'implicazione è vera se A è vera e B è vera cioè accade o si verifica A e si

verifica B ;

2) è falsa se A è vera e B è falsa cioè se A si verifica e B non si verifica.

3) è sempre vera se A non si verifica cioè A è falsa.

La negazione di $A \Rightarrow B$ è A è vera e B è falsa.

- FUNZIONI :

- Definizione 1 (concetto di funzione) : una funzione (o applicazione) fra due insiemi A e B è una legge che associa ad ogni elemento di A (insieme di partenza) uno ed un solo elemento di B (insieme di arrivo). In simboli, una funzione f di dominio A e codominio B viene indicata con $f: A \rightarrow B$.
Indicando con $a \in A$ un elemento del dominio e $b \in B$ un elemento del codominio allora si avrà che :

$$f: A \rightarrow B \iff \forall a \in A, \exists ! b \in B : b = f(a)$$

$b = f(a)$ è l'immagine attraverso f di $a \in A$ mentre a è la controimmagine dell'elemento $b \in B$.

- Esempi :

a) la legge che associa ad ogni benzinaio il prezzo al litro della benzina giornaliero è una funzione ;

b) la legge che associa ad ogni giorno dell'anno 2005 il prezzo al litro della benzina in Italia non è una funzione infatti il prezzo non è univocamente determinato in quanto varia da benzinaio a benzinaio.
Se invece si considera la legge che associa ad ogni giorno dell'anno 2005 il prezzo medio al litro della benzina in Italia è funzione.

c) particolari tipi di funzioni sono quelle trigonometriche, esponenziali, logaritmiche e polinomiali.

- Definizione 2 (funzione iniettiva) : sia $f: A \rightarrow B$ se $\forall a_1, a_2 \in A$ si ha che

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{oppure se analogamente da}$$
$$a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

allora si dirà che f è iniettiva.

- Definizione 3 (funzione suriettiva) : se $f: A \rightarrow B$; si dice che f è suriettiva se $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$ cioè se ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A cioè del dominio.

- Definizione 4 (funzione biettiva o biunivoca): sia $f: A \to B$ se f è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow f$ si dice che è biettiva (o una corrispondenza biunivoca); quindi si può dire che: $\forall b \in B,\ \exists!\, a \in A : f(a) = b$.

- Esempi:

a) Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2 \cdot n$; la funzione è iniettiva infatti sia $f(n_1) = 2 \cdot n_1$ e $f(n_2) = 2 n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2) \Leftrightarrow 2 \cdot n_1 \neq 2 \cdot n_2$ cioè $n_1 \neq n_2$. La funzione non è suriettiva infatti $f(\mathbb{N}) = P$ con P l'insieme dei numeri pari che risulta essere un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ cioè $P \subset \mathbb{N} \Rightarrow$ $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

b) Sia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita dalla legge $f(m) = -m$; la funzione considerata come si può facilmente verificare è iniettiva e suriettiva quindi biettiva.

c) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $f(x) = x^2$; la funzione non è iniettiva né suriettiva infatti $f(x_1) = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{x_1^2} = \pm x_1$ mentre $f(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^+$ dove $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

• Alcune nozioni sui numeri reali ($\mathbb{R}$):

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sono definite le due operazioni di somma e prodotto indicate rispettivamente con i simboli $(+)$, $(\cdot)$ che godono di alcune delle seguenti proprietà:

1) Proprietà della somma:

i) commutativa: cioè $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$;

ii) associativa: cioè $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)$ e quindi si può scrivere senza parentesi $a+b+c$;

iii) esistenza dell'elemento neutro: cioè $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R},\ a+0 = 0+a = a$;

iv) esistenza dell'opposto: cioè $\exists\, b \in \mathbb{R} : a+b = b+a = 0$ quindi $b = -a$;

** v) proprietà distributiva del ~~~~ rispetto alla ~~~~: cioè $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha che $a \cdot (b+c) = (b+c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c = b \cdot a + c \cdot a$

* Osservazione al punto iv): si definisce differenza $(-)$ l'operazione seguente $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a - b = a + (-b)$ dove $-b$ è l'opposto di b; si deve inoltre notare che la differenza non è associativa.

** è una proprietà del prodotto!

2) Proprietà del prodotto :

i) commutativa : cioè $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $a \cdot b = b \cdot a$;

ii) associativa : cioè $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ quindi si può scrivere senza parentesi $a \cdot b \cdot c$;

iii) esistenza dell'elemento neutro : cioè $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

iv) esistenza dell'inverso (o reciproco) : cioè $\exists\, b \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \cdot b = b \cdot a = 1$ cioè $a \cdot b = b \cdot a = 1$ dove 1 è l'elemento neutro del prodotto stesso ; in generale si pone $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$;

* Osservazione al punto iv) : si definisce rapporto $\frac{b}{a}$, $\forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ la seguente operazione : $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$ cioè il prodotto di b per l'inverso "o il reciproco" di "a".

- Esempi :

1) Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali $\nexists$ l'elemento opposto ad esempio $1 \in \mathbb{N}$ ma $\nexists\, m \in \mathbb{N} : m + 1 = 0$.

2) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi $\exists$ l'elemento opposto ad esempio $1 \in \mathbb{Z}$ $\exists\, m \in \mathbb{Z} : m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$.

3) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi $\nexists$ in generale l'elemento inverso (o il reciproco) infatti ad esempio $2 \in \mathbb{Z}$ ma $\nexists\, m \in \mathbb{Z} : m \cdot 2 = 1$ in quanto $m = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$.

4) Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali $\exists$ l'opposto e l'inverso .

* Osservazione : sia la somma che il prodotto di numeri reali si possono vedere come funzioni infatti $(+) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si vedranno ora alcune definizioni dovute alle proprietà appena analizzate .

- Definizione 1 (legge di composizione interna) : si chiama legge di composizione interna binaria (od operazione interna binaria) in un insieme non vuoto I, un procedimento qualsiasi che fa corrispondere ad ogni coppia ordinata (a, b) di elementi di I, distinti o no, uno ed uno solo elemento $c \in I$.

* Osservazioni : si noti che la def. 1 sia del tutto analoga a quella di funzione avente come dominio $I \times I$ e codominio I ; le operazioni $(\cdot)$, $(+)$ sono leggi di composizione interne per l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali .

- Definizione 2 (struttura algebrica): si chiama struttura algebrica un insieme non vuoto I nel quale siano definite una o più leggi di composizione interne binarie.
Le strutture algebriche assumono nomi diversi a seconda del numero di leggi di composizione interne e delle loro proprietà; qui di seguito ne analizzeremo principalmente tre: il gruppo, l'anello e il campo.

- Definizione 3, (gruppo): si chiama gruppo ogni insieme G non vuoto dotato di una legge di composizione interna $(*)$, che gode delle seguenti proprietà:
i) è associativa: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a,b,c \in G$;
ii) possiede l'elemento neutro "e": $e*a = a*e = a$, $\forall a \in G$;
iii) $\forall a \in G$ esiste l'elemento simmetrico a' rispetto $*$ tale che $a*a' = a'*a = e$ dove "e" è l'elemento neutro.
Se la legge $*$ gode anche della proprietà commutativa allora il gruppo si dice commutativo o abeliano (in onore del matematico N. E. Abel).

- Definizione 4, (anello): si chiama anello ogni insieme non vuoto A dotato di due operazioni interne binarie, $(*)$ e (Δ), tali che siano soddisfatte le seguenti proprietà:
i) la legge $(*)$ sia associativa, commutativa, dotata di elemento neutro e simmetrico;
ii) la legge (Δ) sia associativa, distributiva rispetto a $(*)$;
Se la legge (Δ) gode della proprietà commutativa allora l'anello si dice commutativo mentre se la legge (Δ) è dotata di elemento neutro allora l'anello si dice unitario.

- Definizione 5, (campo): si chiama campo ogni insieme non vuoto C, dotato di due operazioni interne binarie $(*)$ e (Δ), tali che risultino verificate le seguenti proprietà:
i) la legge $(*)$ sia associativa, commutativa, possiede l'elemento neutro, esiste l'elemento simmetrico; in altri termini l'insieme C è un gruppo commutativo rispetto a $(*)$;
ii) l'insieme C, privato dell'elemento neutro rispetto $(*)$ è un gruppo commutativo rispetto alla legge (Δ);
iii) la legge (Δ) è distributiva rispetto l'operazione $(*)$.

- Esempi:
1) l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è un gruppo in quanto l'operazione $(+)$ è associativa, ammette elemento neutro che è $0 \in \mathbb{N}$ ma non esiste simmetrico. $\mathbb{N}$ non è un gruppo neanche rispetto la $(\cdot)$ in quanto $\nexists$ elemento simmetrico.
2) l'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z}$ è un gruppo commutativo rispetto la somma $(+)$ mentre non è un gruppo rispetto la moltiplicazione $(\cdot)$ perché $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ non esiste l'elemento simmetrico (cioè l'inverso o il reciproco).
3) l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un gruppo rispetto $(+)$ ma non rispetto $(\cdot)$

in quanto $\nexists$ l'inverso di 0 cioè $\frac{1}{0}$; si può verificare invece che $\mathbb{Q}^*$ è un gruppo anche rispetto $(\cdot)$ $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\})$; inoltre come si può facilmente provare, l'insieme $\mathbb{Q}$ è anche un campo.

4) l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un gruppo commutativo rispetto $(+)$ mentre non è un gruppo rispetto $(\cdot)$ perché $\nexists$ simmetrico di 0 cioè $\frac{1}{0}$; si può osservare invece che $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ è un gruppo commutativo rispetto la $(\cdot)$.

L'insieme $\mathbb{R}$ risulta essere inoltre un campo ordinato (come $\mathbb{Q}$) ed inoltre archimedeo e continuo infatti rispetto l'insieme $\mathbb{Q}$ valgono inoltre le seguenti proprietà:

a) <u>ordinamento totale (o proprietà di tricotomia)</u>: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a = b$ oppure $a < b$ oppure $a > b$ l'una eventualità escludendo le altre;

b) <u>Transitività dell'ordinamento</u>: se $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$;

c) <u>Invarianza dell'ordinamento rispetto alla somma</u>: se $a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall c \in \mathbb{R}$;

d) <u>Invarianza dell'ordinamento rispetto al prodotto</u>: se $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ mentre se $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$;

e) <u>Proprietà di Archimede (o Archimedea)</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot x > 1$; come conseguenza si avrà che $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, con $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot a > b$ (la proprietà appena enunciata è equivalente all'assioma dell'esistenza dell'estremo inferiore).

f) <u>Esistenza dell'estremo inferiore (o proprietà di CANTOR)</u>: ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto ed inferiormente limitato ammette estremo inferiore indicato con $\alpha := \inf A$.

5) l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} := \{ a + \sqrt{-1} \cdot b : a, b \in \mathbb{R} \}$ o meglio cioè $\mathbb{C} := \{ a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$ è un campo non ordinato in quanto non si possono stabilire i concetti di $>$, $<$ tra numeri.

- <u>RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI 1° GRADO RIDOTTE IN FORMA NORMALE</u>:

Come applicazione delle proprietà delle $(+)$ e $(\cdot)$ appena viste per l'insieme $\mathbb{R}$ vediamo la risoluzione di un'equazione di 1° grado ridotta in forma normale.

Sia:

$$a x + b = 0 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a x + b - b = -b$$

$$\exists -b : b + (-b) = 0 \Rightarrow a x = -b$$

Discussione:

1) $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi è indeterminata;

2) $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = -b$ è impossibile in quanto $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $0 = -b$ quindi $b = 0$ contro l'ipotesi che $b \neq 0$;

3) $a \neq 0$ e $b = 0 \Rightarrow a \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$

4) $a \neq 0$ e $b \neq 0$ $(b \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $ax = b$ $\Rightarrow$ $ax \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow$ $x = \frac{b}{a}$; infatti se $a \neq 0 \Rightarrow \exists a' : a' \cdot a = 1$ cioè $a' = \frac{1}{a}$.

L'equazione appena vista può essere risolta in qualsiasi "campo" numerico come ad esempio i numeri complessi $\mathbb{C}$; è da osservare che l'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo ma se $a, b \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ la soluzione cioè $x = \frac{b}{a}$ può non appartenere a $\mathbb{Q}$.

- RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI 2° GRADO RIDOTTE IN FORMA NORMALE:

Sia:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0);$$

Discussione:

1) $b = 0$ e $c \neq 0$ (equazione pura):

$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c - c = -c \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow ax^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = -c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} \leq 0$ in caso contrario nel campo dei reali $\mathbb{R}$ non esiste soluzione ma bensì $x \in \mathbb{C}$ (complessi).

2) $b \neq 0$ e $c = 0$ (equazione spuria):

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$ (caso precedente).

3) $b = 0$ e $c = 0$ (equazione monomia):

$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (soluzione conteggiata due volte).

4) $b \neq 0$ e $c \neq 0$ (equazione completa):

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$, cercando ora di completare il quadrato del binomio a 1° membro si ottiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

posto $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante) $\Rightarrow x \in \mathbb{R} \iff \Delta \geq 0$

in tal caso se $\Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se invece $\Delta = 0 \Rightarrow$

$x = -\dfrac{b}{2a}$ (conteggiata due volte); se $\Delta < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{C}$ (complessi).

* Osservazione: dato il polinomio $ax^2 + bx + c$ esso può essere scritto in forma di prodotti (scomposizione in fattori) nel seguente modo:

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ dove α e β sono le soluzioni se $\exists$ dell'eq. associata $ax^2 + bx + c = 0$ se $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il trinomio $ax^2 + bx + c$ si dice irriducibile e quindi non scomponibile.

- RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI 1° GRADO CON COEFFICIENTI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO REALE:

Sia da risolvere la seguente eq. di 1° grado con $K \in \mathbb{R}$:

$$(x + 2k) \cdot (2 - x) + (x + k) \cdot x = 2k + k^2$$

Discussione dell'eq. al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$2x - \cancel{x^2} + 4k - 2kx + \cancel{x^2} + kx = 2k + k^2 \iff 2x - kx + 4k = 2k + k^2$$

$(2 - k)\, x = k^2 - 2k$ è di 1° grado del tipo $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e dipendenti da k;

1) se $(2 - k) \neq 0 \iff k \neq 2$ allora l'eq. ha una ed una sola soluzione data da:

$$x = \frac{k^2 - 2k}{2 - k} = \frac{k \cdot (k-2)}{2 - k} = -\frac{k \cdot \cancel{(k-2)}}{\cancel{k-2}} = -k$$

2) se $k = 2$, sostituendo a k il valore 2 si ottiene:

$$(2 - 2)\, x = 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow 0x = 0 \text{ che è indeterminata}$$

Riassumendo l'eq. sopra appena analizzata ha soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$, se $k = 2$ le soluzioni sono infinite mentre per $k \neq 2$, $\exists!$ la soluzione $x = -k$.

* Quesito: $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $x = \dfrac{1}{2}$ sia soluzione dell'equazione appena analizzata?

1° Metodo: dalla precedente discussione si deduce che $x = \dfrac{1}{2}$ per $k = -\dfrac{1}{2}$ e $k = 2$;

2° Metodo: sostituendo $x = \frac{1}{2}$ all'equazione data si ottiene:

$$\left(\frac{1}{2}+2k\right)\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot\frac{1}{2}=2k+k^2$$ quindi:

$$\left(\frac{1}{2}+2k\right)\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{k}{2}=2k+k^2$$

$$\frac{3}{4}+3k+\frac{1}{4}+\frac{k}{2}=2k+k^2 \iff 1+\frac{7}{2}k=2k+k^2$$

$$\iff k^2+\left(\frac{4-7}{2}\right)k-1=0 \iff k^2-\frac{3}{2}k-1=0 \iff 2k^2-3k-2=0$$

cioè $k=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{3\pm5}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\\ 2\end{array}\right.$ soluzioni analoghe a quelle determinate nel 1° metodo.

- ELEMENTI DI GEOMETRIA EUCLIDEA:

- Alcune proprietà dei triangoli:

a) Teorema: la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è un angolo piatto (cioè 180°);

b) Teorema di Pitagora: in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti;

c) Teorema (disuguaglianza triangolare): siano a, b, c i lati di un triangolo qualsiasi $\Rightarrow a+b>c$;

- Alcune proprietà dei quadrilateri e delle rette:

d) Teorema (di Talete): tre rette parallele tagliano su due rette trasversali coppie di segmenti di lunghezza proporzionale;

e) Teorema: un quadrilatero è un parallelogramma $\iff$ ha due lati opposti paralleli e congruenti.

- Altri teoremi:

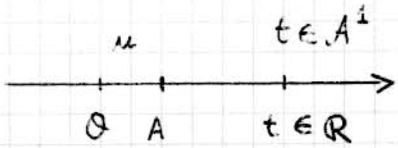
f) Teorema dei seni (o di Eulero): in ogni triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli ad essi opposti;

g) Teorema del coseno (o di Carnot): in ogni triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuito del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.

CAPITOLO N°2 - VETTORI GEOMETRICI :

- VETTORI APPLICATI :

Sia A^1 la retta euclidea; fissato un punto di origine $O \in A^1$ e una unità di misura, cioè un segmento $\overline{OA}$, si ottiene una applicazione biiettiva fra i punti della retta ed i numeri reali $\mathbb{R}$ cioè $\varphi : A^1 \to \mathbb{R}$.



* si introduce su A^1 la $(+)$ e il $(\cdot)$ che la rendono un campo.

Sia A^2 il piano euclideo fissato un punto $O \in A^2$ (origine) si ha:

- Definizione 1 (vettore applicato): un vettore applicato in O è un segmento orientato con primo estremo O e secondo estremo un punto $A \in A^2$ che sarà rappresentato da una freccia come nella fig. 1.

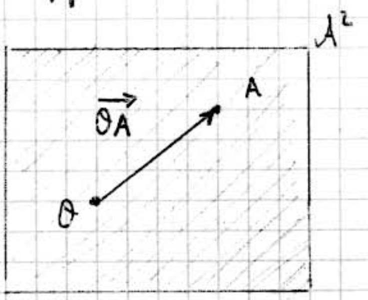


fig. 1.

- Definizione 2 (insieme di vettori): con la notazione V_O^2 si indica l'insieme dei vettori applicati in O cioè $V_O^2 = \{ \text{vettori } \overrightarrow{OA} : A \in A^2 \}$

Da questa definizione si può notare che è possibile definire una funzione biiettiva $\Phi_O : A^2 \to V_O^2$ infatti $\forall A \in A^2$ è possibile determinare uno ed uno solo vettore $\overrightarrow{OA}$ per cui si pone $\Phi_O(A) = \overrightarrow{OA}$, $\forall A \in A^2$; in particolare, all'origine O si associa il vettore $\overrightarrow{OO} = \Phi_O(O)$.

- Definizione 3 (somma di vettori): dati due vettori applicati $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$, la loro somma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ dove $\overrightarrow{OC}$ è il vettore applicato con origine O e secondo punto C ottenuto come quarto vertice del parallelogramma individuato da O, A e B (fig. 2).

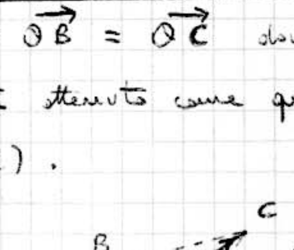


fig. 2

Regola del parallelogramma:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

somma di vettori non allineati.

Con la def. 3 è stato introdotto il concetto di somma nell'insieme V_O^2 che gode delle stesse proprietà di quella usuale per i numeri reali $\mathbb{R}$.

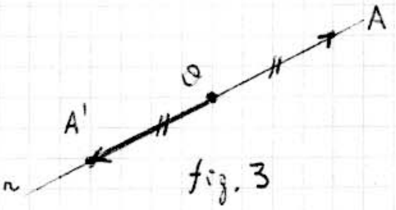
- Proprietà della somma :

i) è commutativa : cioè $\forall\, A, B \in \mathbb{A}^2$ si ha che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$;

ii) è associativa : cioè $\forall\, A, B, C \in \mathbb{A}^2$ si ha che $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$;

iii) esistenza dell'elemento neutro : è il vettore nullo $\overrightarrow{OO}$ infatti $\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA}$ $\forall A \in \mathbb{A}^2$ cioè $\forall\, \overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_0^2$;

iv) esistenza dell'elemento opposto : $\exists\, \overrightarrow{OA'}$ tale che $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO} = 0$ (vettore nullo) ; infatti A' è il punto simmetrico di A rispetto a O sulla retta passante per O e A (fig. 3)



$$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}.$$

fig. 3

Le proprietà appena enunciate si possono dimostrare con tutto rigore ; le i), iii), iv) sono evidenti, la ii) richiede l'applicazione reiterata della regola del parallelogramma e delle relative proprietà.

Da quanto detto segue la seguente :

- Proposizione : $\mathcal{V}_0^2$ rispetto la somma di cui alla def. 3 è un gruppo commutativo.

Un'altra operazione possibile in $\mathcal{V}_0^2$, oltre la somma appena vista, è il prodotto di un vettore per uno scalare, cioè per un numero reale.

- Definizione 4 : se $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_0^2$ allora il prodotto $\lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ dove C è il punto appartenente alla retta r passante per O e A, cioè $C \in r$, tale che il rapporto tra la misura di $\overline{OC}$ e quella di $\overline{OA}$ sia pari a $|\lambda|$; inoltre il punto C giace sulla semiretta OA se $\lambda > 0$ mentre giace su quella opposta se $\lambda < 0$ (fig. 4).

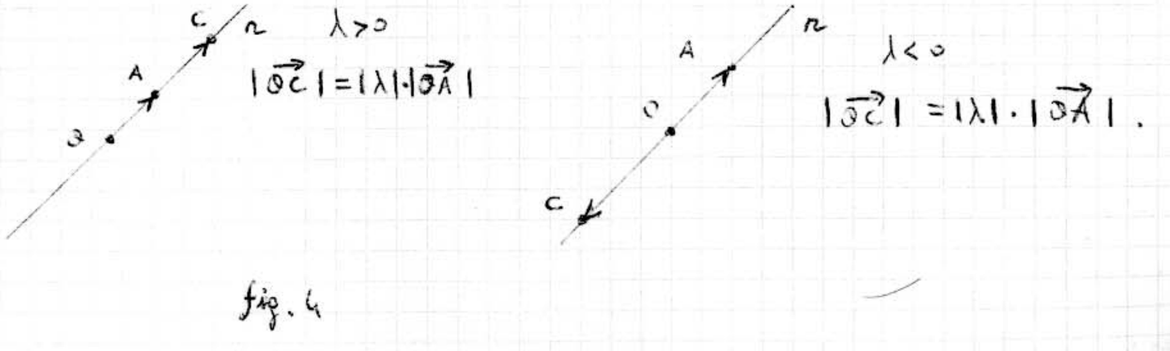


fig. 4

è chiaro che se $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO} = 0$ mentre se $\lambda = 1$ si ha che $1 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$.

* Osservazione : il vettore $0 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$ cioè il vettore nullo è privo di direzione ed ha modulo nullo ; alcuni autori ritengono invece che assuma infinite direzioni.

- Proprietà del prodotto vettore × scalare: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ed $\vec{OA}, \vec{OB} \in V_o^2$ si ha che:

i) $\lambda \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \lambda \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB}$;

ii) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{OA} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OA}$;

iii) $(\lambda \cdot \mu)\vec{OA} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{OA})$;

iv) $1 \cdot \vec{OA} = \vec{OA}$ ed $0 \cdot \vec{OA} = \vec{OO}$.

Le ii), iii) e iv) sono evidenti ed ovvie mentre la i) richiede qualche considerazione in più.

Dim. prop. iv): si pone $\lambda \cdot \vec{OA} = \vec{OA_1}$, $\lambda \cdot \vec{OB} = \vec{OB_1}$ ed inoltre $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$; occorre provare che $\lambda \vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$.

Sia per semplicità di rappresentazione $\lambda > 0$ (analogo discorso vale per $\lambda < 0$) nella fig. 5 è noto che OACB è un parallelogramma in quanto si è posto $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ (definizione di somma).

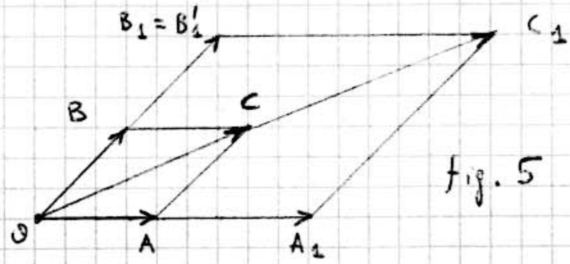


fig. 5 (proprietà distributiva).

tracciando le rette parallele al segmento $\overline{OB}$ passanti per A ed A_1 queste intersecano la retta passante per O e C nei punti C e C_1; ora per il teorema di Talete risulta che $|\vec{OA_1}| : |\vec{OA}| = |\vec{OC_1}| : |\vec{OC}|$; essendo $|\vec{OA_1}| : |\vec{OA}| = \lambda$ $\Rightarrow |\vec{OC_1}| : |\vec{OC}| = \lambda$ quindi $\vec{OC_1} = \lambda \vec{OC}$.

Tracciando ora le rette parallele ad $\vec{OA}$ passanti per i punti C e C_1 si viene ad intersecare la retta passante per O e B nei punti B (poiché OACB è un parallelogramma) e B_1'; per il teorema di Talete risulta che

$|\vec{OC_1}| : |\vec{OC}| = |\vec{OB_1'}| : |\vec{OB}|$ essendo $|\vec{OC_1}| : |\vec{OC}| = \lambda$

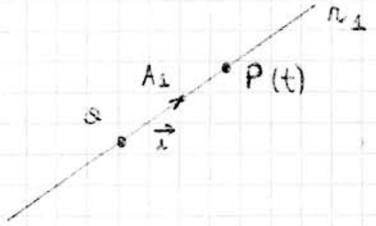
$\Rightarrow |\vec{OB_1'}| : |\vec{OB}| = \lambda$ quindi $\vec{OB_1'} = \lambda \cdot \vec{OB} = \vec{OB_1}$ quindi si ha che $B_1' \equiv B_1$ allora $OA_1C_1B_1$ è un parallelogramma per cui $\vec{OC_1} = \vec{OA_1} + \vec{OC_1}$

c.v.d.

- Definizione 5: V_o^2 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ in quanto la (+) e il (·) per scalari godono delle proprietà appena analizzate.

* Osservazione: la somma di vettori è un'applicazione: $V_o^2 \times V_o^2 \rightarrow V_o^2$ mentre il prodotto di un vettore per uno scalare è un'applicazione: $\mathbb{R} \times V_o^2 \rightarrow V_o^2$; entrambe sono leggi di composizione interne per V_o^2.

- COORDINATE: fissato un singolo vettore $\vec{i} = \vec{OA_1} \in V_0^2$ e si consideri la retta r_1 passante per O ed A_1 (fig. 6);



$\forall t$ corrisponde un punto $P \in r_1$

$\vec{OA_1} = \vec{i}$ e' l'unita' di misura di tutti i vettori applicati in O.

tutti i vettori di questa retta aventi punto di applicazione in O sono della forma $t \cdot \vec{i} = t \cdot \vec{OA_1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ovvero sono multipli di $\vec{i}$.

In tal modo si sono definite delle coordinate sulla retta r_1: fissato l'origine O e il vettore unitario $\vec{i}$ (chiamato anche versore), $\forall P \in r_1 \to t \in \mathbb{R}$: $\vec{OP} = t \cdot \vec{i}$; il numero reale t e' la coordinata di $\vec{OP}$ rispetto ad $\vec{i}$.

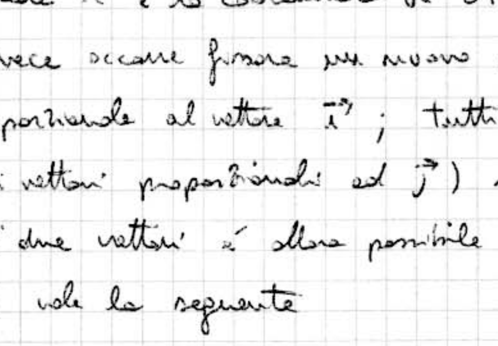
Nel piano invece occorre fissare un nuovo vettore $\vec{j} = \vec{OA_2}$ che non appartiene ad r_1 cioe' non proporzionale al vettore $\vec{i}$; tutti i vettori della retta r_2 passante per O e A_2 (cioe' tutti i vettori proporzionali ad $\vec{j}$) sono multipli di $\vec{j}$.

Fissati questi due vettori e' allora possibile esprimere rispetto $\vec{i}$ e $\vec{j}$ tutti i vettori del piano infatti vale la seguente

- Proposizione: fissata l'origine $O \in A^2$ e due vettori $\vec{i}, \vec{j} \in V_0^2$ tra loro non proporzionali $\Rightarrow \forall \vec{OP} \in V_0^2$, $\exists!\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} \qquad (\forall P \in A^2).$$

Dim: fissati $P \in A^2$, $\vec{j}$ e $\vec{i}$ con le relative rette r_1 ed r_2 (fig. 7)



$\vec{i} = \vec{OA_1}$, $\vec{j} = \vec{OA_2}$, $P \in A^2$

fig. 7

Tracciando le parallele ad r_1 ed r_2 passanti per P si individuano rispettivamente i punti P_1 e P_2; per costruzione quindi OP_1PP_2 e' un parallelogramma quindi per la def. di somma risulta che $\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$ d'altra parte si ha che:

$P_1 \in r_1 \Rightarrow \exists!\ x_1 \in \mathbb{R} : \vec{OP_1} = x_1 \cdot \vec{i}$

$P_2 \in r_2 \Rightarrow \exists!\ x_2 \in \mathbb{R} : \vec{OP_2} = x_2 \cdot \vec{j}$

quindi in definitiva si ottiene $\vec{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ c.v.d.

Una volta fissati i due vettori non proporzionali (o multipli) $\vec{i}$ e $\vec{j}$ di V_0^2, cioè una volta fissata la base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ di V_0^2, per ogni vettore di V_0^2 si possono associare in modo univoco una coppia di numeri reali cioè le sue coordinate rispetto alla base B. In tal modo si è stabilita una corrispondenza $\Phi_B : V_0^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) cioè tra i vettori di V_0^2 e le coppie (x_1, x_2) di numeri reali quindi si può scrivere:

$$\Phi_B : V_0^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

* <u>Osservazione</u>: le coppie di numeri reali (x_1, x_2) verranno scritte per colonna e non per riga.

- <u>Esempi</u>:

1) Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di V_0^2 posto $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{OB} = -\vec{i} + \vec{j}$ risulta allora:

$$\Phi_B(\vec{OA}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Phi_B(\vec{OB}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \Phi_B(\vec{OA}) + \Phi_B(\vec{OB}) = \Phi_B(\vec{OA} + \vec{OB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ cioè } \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{i} + 5\vec{j}.$$

Riassumendo quanto detto si sono viste le seguenti corrispondenze biunivoche:

a) $\mathcal{A}^1$ (retta, o meglio punti della retta) $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}$ (numeri reali)

b) $\mathcal{A}^2$ (piano, o meglio punti del piano) $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (coppie di numeri reali)

c) $\mathcal{A}^2$ (piano) $\longleftrightarrow V_0^2 = \{$vettori applicati in O, cioè $\vec{OP} : P \in \mathcal{A}^2\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

Resta da definire ora una corrispondenza evidente tra V_0^3 ed $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè le terne di numeri reali.

A tal proposito sia $\mathcal{A}^3$ lo spazio, o meglio l'insieme dei punti appartenenti allo spazio; si fissi un punto origine $O \in \mathcal{A}^3$ e si da la seguente:

- <u>Definizione 1</u>: con la notazione V_0^3 si indicano l'insieme dei vettori applicati in O con secondo estremo $A \in \mathcal{A}^3$ cioè si scrive $V_0^3 := \{\vec{OA} \mid A \in \mathcal{A}^3\}$.

Sia $\vec{i} = \vec{OA_1}$ un vettore applicato in O, non nullo ed $\vec{i} \in V_0^3$ (dire che $\vec{i}$ non è nullo equivale a dire che $A_1 \neq O$) e sia $\vec{j} = \vec{OA_2}$, $\vec{j} \in V_0^3$ un vettore applicato in O non nullo e non proporzionale ad $\vec{i}$, cioè $A_2 \notin r_1$ dove r_1 è la retta passante per i punti O e A_1.

È noto che un vettore generico $\vec{OP}$ giacente sul piano individuato dai due vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ si può esprimere come combinazione lineare $x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ opportuni; da quanto detto si dà la seguente:

- <u>Definizione 2:</u> dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, il vettore $x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ si dice combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$, con coefficienti x_1, x_2 inoltre ...
- <u>Definizione 3 (Span):</u> si chiama **span** $(\vec{i}, \vec{j}) = \{ x_1\vec{i} + x_2\vec{j} \in \mathcal{V}_0^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$, cioè il piano individuato (o "generato" = span (in inglese)) dai vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

In $\mathcal{V}_0^3$ lo **span** $(\vec{i}, \vec{j})$ appena definito non basta a definirlo (cioè il piano individuato da $\vec{i}$ e $\vec{j}$ non riempie lo spazio) per questo occorre introdurre un terzo vettore che chiameremo $\vec{k} = \vec{OA_3} \notin$ span $(\vec{i}, \vec{j})$, cioè un vettore non nullo che non appartiene al piano individuato da $\vec{i}, \vec{j}$, cioè passante per O, A_1, A_2; in queste condizioni segue allora che ogni vettore dello spazio si può esprimere come combinazione lineare dei tre vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (che possono non essere unitari e di lunghezza uguale). Da quanto detto vale allora la seguente:

- <u>Proposizione:</u> $\forall \vec{OP} \in \mathcal{V}_0^3$, $\exists!\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che risulti:

$$\vec{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} \quad \text{con } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ fissati e } O \in \mathcal{A}^3.$$

<u>Dim:</u>

è un'estensione della dimostrazione vista in precedenza per $\vec{OP} \in \mathcal{V}_0^2$;
fissati i vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ il punto $P \in \mathcal{A}^3$ e sia $O \in \mathcal{A}^3$ l'origine (fig. 8)

fig. 8 - per costruzione si ha che $O P P_3 P'$ è un parallelogramma come del resto lo è anche $O P_2 P' P_1$.

1) il punto P_3 si ottiene da: [piano passante per P // span $(\vec{i}, \vec{j})$] $\cap\ r_3$;
2) il punto P_2 si ottiene da: [piano passante per P // span $(\vec{i}, \vec{k})$] $\cap\ r_2$;
3) il punto P_3 si ottiene da: [piano passante per P // span $(\vec{j}, \vec{k})$] $\cap\ r_1$.

$$\Rightarrow \quad \vec{OP} = \vec{OP_3} + \vec{OP'} = \vec{OP_3} + (\vec{OP_2} + \vec{OP_1}) = \vec{OP_1} + \vec{OP_2} + \vec{OP_3}$$

d'altra parte si ha che $\exists!\ x_1 \in \mathbb{R} : \vec{OP_1} = x_1 \vec{i}$,
$\exists!\ x_2 \in \mathbb{R} : \vec{OP_2} = x_2 \vec{j}$ ed infine $\exists!\ x_3 \in \mathbb{R} : \vec{OP_3} = x_3 \vec{k}$

quindi si ottiene in definitiva $\vec{OP} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. c.v.d.

- Definizione 4 (base): si chiama base B di V_0^3 l'unione dei vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tra loro non complanari (cioè non appartenenti ad uno stesso piano) cioè $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; si dice inoltre che $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sono le coordinate di $\vec{OP}$ rispetto alla B.

Precedentemente è stato definito lo Span $(\vec{i}, \vec{j})$; lo Span $(\vec{i}) = \{x_1\vec{i} \mid \forall x_1 \in \mathbb{R}\}$ cioè relativo ad un vettore è la retta che contiene $\vec{i}$ o meglio rappresenta l'insieme dei multipli del vettore $\vec{i}$.

Si è visto in definitiva che sussistono anche in V_0^3 le seguenti corrispondenze:

1) $V_0^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (terne di numeri reali)

2) $\vec{OP} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

3) $A^3 \to V_0^3 \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

4) $P \to \vec{OP} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si dice che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate del punto P rispetto $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; da quanto accennato si introduce la seguente:

- Definizione 5 (sistemi di riferimento affine): nel piano, in A^2 cioè, l'insieme formato da $O \in A^2$ e due vettori applicati in O e non proporzionali $\vec{i}, \vec{j} \in V_0^2$ si chiama sistema di riferimento affine del piano e si indica con la notazione $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Definizione 6: nello spazio, cioè in A^3 un sistema di riferimento affine verrà indicato con $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ in cui $O \in A^3$ (origine), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono tre vettori applicati in O tra loro non complanari o meglio tali che sia: $\vec{i}$ e $\vec{j}$ non proporzionali e $\vec{k} \notin$ Span $(\vec{i}, \vec{j})$.

- Osservazioni:

1) il termine "affine" sta ad indicare che i vettori di riferimento $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ possono non essere uguali in modulo e tantomeno ortogonali tra loro; in quest'ultimo caso si ottengono i piani o sistemi di riferimento euclidei.

2) dalle def. 5 e 6 segue che i possibili sistemi di riferimento nel piano e nello spazio sono infiniti.

3) Le applicazioni: $F_B: V_0^2 \to \mathbb{R}^2$, $F_B: V_0^3 \to \mathbb{R}^3$, dove F_B è l'applicazione che associa per ogni base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una coppia o terna di numeri reali ad un vettore $\vec{OP}$, sono isomorfe; cioè le strutture V_0^2 (o V_0^3) e $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) sono analoghe per cui F_B trasforma operazioni di V_0^2 (o V_0^3) in operazioni analoghe in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$).