l'insieme : $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1+2x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ che si può scrivere nell'ulteriore modo seguente:

$$S = \begin{pmatrix} -1+2x_2 \\ 0+x_2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{avendo posto } x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}).$$

con x_2 variabile libera mentre x_1 ed x_3 variabili dipendenti.

Da quest'ultima relazione si può concludere dicendo che l'insieme delle terne, soluzioni di un sistema lineare, è l'equazione parametrica di una retta nel piano o nello spazio, come in quest'ultimo caso.

$$S = \begin{cases} x_1 = -1+2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

- Osservazione: talvolta le soluzioni di un generico sistema possono coincidere con l'equazione parametrica di un piano nello spazio.

Qui di seguito chiariremo meglio l'algoritmo di calcolo del metodo di eliminazione di Gauss; questo algoritmo consta dei seguenti passi:

1)- Dato un qualsiasi sistema lineare $A \cdot x = b^{(*)}$, con A matrice quadrata associata al sistema di ordine n (cioè con n righe $\times$ n colonne):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^{(*)}\, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

per trasformarla in matrice quadrata, triangolare superiore, si procede in ordine per colonne;

~~2)- se nella 1° colonna i termini sono tutti nulli, cioè se $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$, si passa alla colonna successiva; se invece la 1° colonna contiene un elemento non nullo $a_{i1} \neq 0$ (con i = i-esima riga) si scambia la 1ª riga con la i-esima riga in modo tale che risulti $a_{11} \neq 0$;~~

~~3)- si passa alla colonna successiva se tutti i termini sono nulli, cioè se $a_{12} = a_{32} = \dots = a_{n2} = 0$ si passa alla colonna successiva altrimenti se $\exists\, a_{i2} \neq 0$ (possono essere anche più di uno) si somma ad ogni riga i-esima la 1ª equazione (o riga) moltiplicata per $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$~~

2) - considerando la 1ª colonna se tutti i termini sono nulli, cioè se $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$ si passa alla seconda colonna;

3) - se nella 1ª colonna vi sono elementi non nulli, cioè $\exists\, a_{i1} \neq 0$ (alla i-esima riga) si scambiano le righe in modo da ottenere il termine della diagonale principale non nullo cioè $a_{11} \neq 0$;

4) - per annullare i rimanenti termini della colonna si somma ad ogni i-esima riga (con $i = 2, 3, \dots, n$) la 1ª equazione moltiplicata per il coefficiente $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ ottenendo nella 1ª colonna tutti termini nulli dopo il primo termine a_{11} della diagonale principale;

5) - sistemata la 1ª colonna si passa alla 2ª colonna; se tutti i termini sono nulli si passa alla successiva;

6) - se invece esistono dei termini non nulli si procede come ai punti 3), 4) cioè si rendono nulli tutti i termini della colonna considerata dopo $a_{22} \neq 0$ sommando ad ogni i-esima riga (con $i = 3, 4, \dots, n$) la 2ª equazione moltiplicata per il coefficiente $-\dfrac{a_{i2}}{a_{22}}$;

7) - i passi di cui ai punti 1) ... 6) vanno reiterati per le rimanenti colonne fino a ridurre la matrice alla forma triangolare superiore cioè:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * & * & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0. \quad \text{(ove possibile).}$$

Il sistema triangolare $\bar{A}x = \bar{b}$ così ottenuto è equivalente a quello dato $Ax = b$.

Come si è visto precedentemente se la diagonale principale di $\bar{A}$ contiene elementi tutti non nulli cioè $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0 \iff a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$ allora il sistema $\bar{A}x = \bar{b}$ ammette una ed una sola soluzione che risulta essere anche quella del sistema di partenza $Ax = b$, in quanto i due sistemi sono equivalenti.

Qui di seguito dimostriamo mediante la risoluzione all'indietro che il sistema $\bar{A}x = \bar{b}$ nelle suddette ipotesi ammette una ed una sola soluzione.

- **Dim:** dall'ultima equazione del sistema $a_{n,n} \cdot x_n = b_n$ essendo per ipotesi $a_{n,n} \neq 0$ la soluzione dell'eq. di 1° grado esiste ed è unica pari a $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$; procedendo con la risoluzione all'indietro del sistema dalla

penultima equazione : $a_{n-1,n-1}\, x_{n-1} + a_{n-1,n}\, x_n = b_{n-1}$
avendo supposto per ipotesi $a_{n-1,n-1} \neq 0$ risulta che l'eq. di 1° grado fornisce il valore :

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}} = \frac{b_{n-1} - \frac{b_n}{a_{n,n}}}{a_{n-1,n-1}}$$

procedendo fino alla 1ª eq. del sistema si perviene in definitiva alla soluzione
$(x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \dots,\ x_n = y_n) \in \mathbb{R}^n$ che è unica.

- Esercizi di applicazione :

1) Discutere il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - z = 8 \\ -x + 4y - 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 = R_1' \\ R_1 = R_2' \Leftrightarrow \\ R_3 = R_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -14 \\ 0 & 7 & -4 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' = R_1'' \\ R_2' - 2R_1' = R_2'' \\ R_3' + R_1' = R_3'' \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1'' \\ R_2'' \\ R_3'' + R_2'' \end{array} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ -7y + 4z = -14 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 3y + z \Rightarrow x = 8 - 6 - \frac{12}{7}z + z = 2 - \frac{5}{7}z \\ -7y = -14 - 4z \Rightarrow y = 2 + 4/7\, z \\ 0 \cdot z = 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

come si può osservare z è la variabile libera mentre x, y sono dipendenti da z per cui il sistema ammette più soluzioni della forma :

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{5}{7}z \\ y = 2 + \frac{4}{7}z \\ z = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \frac{5}{7}z \\ 2 + \frac{4}{7}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -5/7 \\ 4/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che rappresenta l'eq. parametrica di una retta nello spazio $\mathbb{R}^3$.
Ponendo $t = 7z$ si ottiene in definitiva :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 6 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 11 & -15 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 - 3R_1 \\ R_3' = R_3 + R_1 \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & -\frac{17}{4} \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1' \\ R_2' \\ R_3' + \frac{3}{4}R_2' \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 6 \\ -4y + 11z = -15 \\ \frac{17}{4} z = -\frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y + 3z \\ y = \frac{15 + 11z}{4} \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Controverifica della soluzione $(2, 1, -1)$:

$$\begin{cases} 2 + 1 + 3 = 6 & \text{ok!} \\ 6 - 1 - 2 = 3 & \text{ok!} \\ \cancel{-2} + \cancel{2} + 1 = 1 & \text{ok!} \end{cases}$$

3) Discutere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 2R_1 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2 \end{array} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - R_3 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 9x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{3}{18} + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{18} \\ 2x_2 + \frac{8}{9} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{18} \\ x_3 = -2/9 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

la soluzione del sistema è quindi
$$\begin{cases} x_1 = -1/18 \\ x_2 = 1/18 \\ x_3 = -2/9 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(*) controverifica della soluzione ottenuta:

$$\begin{cases} 2\cdot\left(\frac{1}{18}\right) - 4\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) + 0 = 1 \\ -\frac{1}{18} - 3\cdot\left(\frac{1}{18}\right) - \left(-\frac{2}{9}\right) + 0 = 0 \\ -\frac{1}{18} - \frac{1}{18} + 4\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) + 0 = -1 \\ -\frac{2}{18} - \frac{2}{18} + \frac{2}{9} + 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{18} + \frac{16}{18} = 1 \iff \frac{18}{18} = 1 \quad ok! \\ -\frac{4}{18} + \frac{4}{18} = 0 \quad ok! \\ -\frac{2}{18} - \frac{16}{18} = -1 \iff -\frac{18}{18} = -1 \quad ok! \\ -\frac{4}{18} + \frac{4}{18} = 0 \quad ok! \end{cases}$$

- Osservazioni ed approfondimenti: risolvendo la matrice associata ad un sistema con il metodo di Gauss sulla diagonale principale si vengono a costruire dei valori in generale non nulli che vengono chiamati pivot (perno); si è giunto che se essi sono non nulli allora il sistema ammette una ed una sola soluzione;
- Definizione 1 (matrice singolare): una matrice quadrata è non singolare se tutti i suoi pivot (rispetto all'eliminazione di Gauss) sono non nulli, altrimenti viene detta singolare.

Dalla definizione data segue che un sistema ammette soluzione unica se la matrice (quadrata) associata non è singolare.

- RISOLUZIONE CON IL METODO DI GAUSS DEI SISTEMI A SCALA:

- Definizione 1 (matrice a scala): una matrice a scala (o a gradini) $m \times n$ è così siffatta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & p_3 \; * \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \; \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \; p_r & * \; \cdots \; * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \;\; 0 & \cdots \; 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \; \cdots \; 0 & 0 \; \cdots \; 0 \end{pmatrix}$$

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ (r-esima riga) sono i pivot cioè valori non nulli della matrice non quadrata; i simboli $*$ indicano elementi qualsiasi $\in \mathbb{R}$.

- Definizione 2 (sistema a scala): un sistema a scala è un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è una matrice a scala.

È possibile anche in questo caso applicare il metodo di riduzione di Gauss a sistemi lineari non quadrati infatti sia A la matrice associata non quadrata cioè con m righe ed n colonne $(m \times n)$ applicando l'algoritmo di Gauss è possibile ridurre a scala la matrice di partenza A ottenendo una nuova matrice A' a scala.

- Osservazione importante: i "gradini" della scala ottenuta hanno altezza pari ad una riga (fare quindi attenzione durante la riduzione di una matrice a scala).

- Esempi di applicazione:

1) Discutere il seguente sistema di 3 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2} x_6 = 1 \\ 2x_4 - x_6 = 0 \\ x_5 + 4x_6 = 1 \end{cases}$$

la matrice completa associata al sistema è:

$$A' = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

i pivot della matrice sono $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$ e sono rispettivamente nelle colonne 2^a, 4^a e 5^a.

Le variabili x_2, x_4 e x_5 corrispondenti ai pivot p_1, p_2, p_3 vengono dette variabili dipendenti mentre x_1, x_3, e x_6 vengono dette variabili libere in quanto possono assumere qualsiasi valore reale; le variabili dipendenti vengono scritte quindi in funzione di quelle indipendenti (o libere) per cui si avrà in tal caso, procedendo con la risoluzione all'indietro:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + x_3 - 3x_4 + x_5 - \frac{1}{2} x_6 \\ x_4 = \frac{1}{2} x_6 \\ x_5 = 1 - 4x_6 \end{cases}$$

cioè:

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + x_3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} x_6\right) + (1 - 4x_6) - \frac{1}{2} x_6 \\ x_4 = \frac{1}{2} x_6 \\ x_5 = 1 - 4x_6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + x_3 - 6x_6 \\ x_4 = 1/2\, x_6 \\ x_5 = 1 - 4x_6 \end{cases}$$

la soluzione può essere scritta più comodamente nella forma:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 + x_3 - 6x_6 \\ x_3 \\ 1/2\, x_6 \\ 1 - 4x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coefficienti termini noti}} + \overset{\text{variabile libera}}{\underset{\text{parametro}}{x_1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coeff. delle variabile libera } x_1} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coeff delle variabile libera } x_3} + x_6 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1/2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{coeff. del var. } x_6}$$

le soluzioni sono in tal caso infinite, più precisamente ∞^3 in quanto sono 3 le variabili libere.

2) Si risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

la matrice associata è:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & +4 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

i pivot individuati sono $P_1 = 2$ e $P_2 = -3$ rispettivamente alle colonne 1ª e 3ª per cui le variabili libere sono x_2 e x_4 quelle dipendenti x_1 e x_3.

da cui si ricava x_1 e x_3 in funzione di x_2 e x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 = -2 + x_2 - 4x_3 - x_4 \\ -3x_3 = -3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \dfrac{x_2}{2} - 2x_3 - \dfrac{x_4}{2} \\ x_3 = 1 + \dfrac{2}{3}x_4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \dfrac{1}{2}x_2 - 2 - \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{1}{2}x_4 = -3 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{11}{6}x_4 \\ x_3 = 1 + \dfrac{2}{3}x_4 \end{cases}$$

che può essere riscritta più comodamente nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 1/2\,x_2 - 11/6\,x_4 \\ x_2 \\ 1 + 2/3\,x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si può evincere che le soluzioni possibili sono ∞^2 perché due sono le variabili libere.

La comodità che ne deriva, dallo scrivere la soluzione generica nella forma appena vista è la seguente:

i) determinare la soluzione del sistema precedente per $x_2 = x_4 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) determinare la soluzione del sistema per $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii) determinare la soluzione del sistema per $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 + \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Osservazione: nell'esempio 2) in corrispondenza del secondo pivot, p_2 tutti i termini successivi della matrice sono nulli e quindi il sistema ammette infinite soluzioni; se al contrario esistesse un pivot nella colonna dei termini noti allora il sistema era impossibile ovvero incompatibile.

- Esempio: si consideri la matrice completa associata al sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad 0 \cdot x_4 = 1 \quad \text{impossibile!}$$

• SISTEMI LINEARI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO:

Vediamo un esempio di risoluzione di un sistema lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, in 3 equazioni in 3 incognite (x, y, z):

Sia:

$$\begin{cases} 2x - 2ty + tz = 1 \\ x - ty = 0 \\ -x + (t+3)y - z = 1 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Si consideri la matrice completa associata al sistema, nelle incognite (x, y, z):

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & -2t & +t & 1 \\ +1 & -t & 0 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 2 & -2t & t & 1 \\ -1 & t+3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{array} \text{(scambio di righe)}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' \\ R_2' - 2R_1' \\ R_3' + R_1' \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1'' \\ R_2'' \\ R_3'' \end{array} \text{(scambio di righe)}.$$

i pivot della matrice sono $p_1 = 1$ e $p_2 = 3$ rispettivamente nella 1ª e 2ª colonna; nella 3ª colonna t non è un pivot in quanto varia in $\mathbb{R}$.

* Discussione: $p_3 = t \Longleftrightarrow t \neq 0$ quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} x - ty = 0 \\ 3y - z = 1 \\ tz = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = ty = \frac{t \cdot (t+1)}{3t} = \frac{t+1}{3} \\ 3y - 1/t = 1 \Rightarrow y = \frac{t+1}{3t} \\ z = 1/t \end{cases}$$

Riassumendo se $t \neq 0$ il sistema ha una ed una sola soluzione data da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{3} \\ \frac{t+1}{3t} \\ 1/t \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Se $t = 0$ il sistema è incompatibile infatti dall'ultima equazione risulta:

$0 \cdot z = 1$ che è impossibile.

CAPITOLO 4° - SPAZI VETTORIALI:

- Definizione 1 (spazio vettoriale): uno spazio vettoriale (o spazio lineare) su $\mathbb{R}$ (cioè reale) è un insieme V, i cui elementi sono detti vettori, su cui sono definite due operazioni: una chiamata somma ($+ : V \times V \to V$) ed una chiamata prodotto per scalari ($\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$) che soddisfano le seguenti proprietà:

i) V è un gruppo commutativo (o abeliano) rispetto alla somma cioè: la somma è associativa, commutativa, $\exists$ l'elemento neutro detto zero o vettore nullo $\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\exists$ l'opposto di ogni vettore;

ii) - l'operazione di prodotto è distributiva rispetto alla somma cioè:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$ si ha che $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$;

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ si ha che $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$

- associatività del prodotto cioè:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ si ha che $\alpha (\beta v) = (\alpha \beta) v$

- $\exists$ l'elemento neutro per il prodotto cioè:

$\forall v \in V$ si ha che $1 \cdot v = v \cdot 1 = 1$

inoltre si definisce la proprietà che: $\forall v \in V, 0 \in \mathbb{R}, 0 \cdot v = \vartheta$ con ϑ vettore nullo.

- Osservazione alla def. 1: è possibile estendere la def. di spazio vettoriale anche ad un campo K qualsiasi diverso da $\mathbb{R}$ come ad esempio il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ o più semplicemente $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ecc...

- Esempi di spazi vettoriali reali e complessi:

Es 1) l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$;

Es 2) l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$;

Es 3) l'insieme delle n-uple di numeri reali $\mathbb{R}^n$;

Es 4) l'insieme delle n-uple di numeri complessi;

Es 5) gli insiemi dei vettori applicati in ϑ V_0^2, V_0^3;

Es 6) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado "n";

Es 7) l'insieme delle funzioni a valori reali definite su un dominio D con le abituali operazioni di somma e moltiplicazione per scalari;

Es 8) l'insieme delle matrici di ordine $m \times n$ a coefficienti reali.

Vedremo brevemente di dimostrare alcune delle proprietà soddisfatte da questi esempi.

• Esempio 3) l'insieme delle n-uple di numeri reali si indica con il simbolo:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad (n\text{-volte}).$$

Vista la corrispondenza tra l'insieme dei numeri reali e i vettori si possono dare le seguenti:

(*) Definizione 2 (somma): la somma di due vettori di $\mathbb{R}^n$ è data da:

$$\forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(*) Definizione 3 (prodotto per scalari): il prodotto di un vettore per uno scalare è dato da:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Della somma vediamo queste proprietà:

i) commutatività di $+$:

$$\forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \forall u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{risulta che}$$

$$v + u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \quad \text{(per definizione stessa di somma)}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{commutatività} \\ \text{di + nei reali}}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = u + v \quad \text{c.v.d.}$$

ii) l'elemento neutro è il vettore nullo $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi risulta :

$$\forall\, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \theta + v = v + \theta = v \quad \text{infatti}$$

$$\theta + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ 0 + x_2 \\ \vdots \\ 0 + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ \vdots \\ x_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= v + \theta = v$$

iii) l'opposto di un vettore è dato da :

$$\forall\, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \exists\, v' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{tale che} \quad v + v' = \theta \ \text{(vettore nullo)}$$

quindi si ha che : $v + v' = \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè

$$v' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \text{in quanto in } \mathbb{R} \text{ l'opposto di } x \text{ è } -x.$$

Tralasciando la somma e considerando il prodotto per scalari esso gode di alcune proprietà di cui ne dimostreremo solo una, la distributività (del prodotto reale) rispetto alla somma :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \text{si ha che :}$$

$$\alpha \cdot (v + u) = \alpha v + \alpha u \quad \text{infatti risulta :}$$

$$\alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}}_{\text{per def. di somma in } \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \\ \vdots \\ \alpha(x_n + y_n) \end{pmatrix}}_{\text{per def. di prodotto per scalari in } \mathbb{R}^n} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{pmatrix}}_{\text{distributività in } \mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \vdots \\ \alpha y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha v + \alpha u .$$

Si potrebbero dimostrare tutte le proprietà e quindi affermare in definitiva che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale.

• ESEMPIO 6) : un polinomio a coefficienti reali in una incognita o in una indeterminata (o incognita) si può scrivere nella forma:

$$p(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

dove: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti reali
t è l'indeterminata (o incognita)
$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la legge o espressione algebrica.

- Definizione (es. 6) : con la notazione $\mathbb{R}[t]$ si indicano tutti i polinomi in t a coefficienti reali cioè:

$$\mathbb{R}[t] = \{ \text{insieme di } p(t) \text{ a coefficienti reali} \} \; ; \; \mathbb{R}[t] \text{ è uno spazio vettoriale reale.}$$

quindi $\quad p(t) \in \mathbb{R}[t] \iff a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$

Sia $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
e $q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$
Si definisce somma di $p(t)$ e $q(t)$ e si indica con $(p+q)(t)$ l'espressione seguente:

$$p(t) + q(t) = (p+q)(t) = (a_n + b_n) t^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) t^{n-1} + \dots + (a_2 + b_2) t^2 + (a_1 + b_1) t + (a_0 + b_0)$$

Il prodotto di un polinomio per uno scalare è invece:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall p(t) \in \mathbb{R}[t] \quad \alpha \cdot p(t) = (\alpha p)(t) = \alpha a_n t^n + \alpha a_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha a_2 t^2 + \alpha a_1 t + \alpha a_0 .$$

• ESEMPIO 7) : Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme o meglio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e si consideri l'insieme $V = \{ f : A \to \mathbb{R} \}$ cioè l'insieme di tutte le funzioni da A in $\mathbb{R}$; definiamo somma e prodotto per scalari in V le seguenti operazioni

i) $(+)$: $\forall f, g \in V, \forall a \in A \quad (f+g)(a) = f(a) + g(a)$
dove $f(a)$ e $g(a) \in \mathbb{R}$.

ii) $(\cdot)$: $\forall f, g \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)(a) = \alpha f(a)$
$(\alpha (f+g))(a) = \alpha f(a) + \alpha g(a)$

L'elemento neutro per la somma è la funzione $\vartheta : A \to \mathbb{R}, \vartheta(a) = 0$ $\forall a \in A$. Anche in questo caso si potrebbe dimostrare tutte le proprietà ed affermare così (o pervenire) o meglio asserire che V è uno spazio vettoriale.

Caso particolare delle funzioni sono i polinomi cioè il sottoinsieme $W = \mathbb{R}[t]$ $W \subset V$, nel caso di funzioni polinomiali il vettore nullo è il polinomio $p(t) \equiv 0$ cioè il polinomio identicamente zero, cioè costante e nullo.

Altri casi particolari di funzioni sono:

a) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ continue} \}$

b) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{differenziabili} \}$

ecc...; l'insieme $V = \{ f : A \to \mathbb{R} \}$ è quindi uno spazio vettoriale

- ESEMPIO 8): sia $M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{$ insieme delle matrici di ordine $m \times n$ a coefficienti reali $\}$; $m \times n = m$ (righe) $\times\ n$ (colonne) con $m, n \in \mathbb{N}$ finiti. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari così definite:

i) siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cioè sia:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

ii) sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ESERCIZI DI RIEPILOGO:

a) nell'insieme $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -1 \\ e \end{pmatrix}$ ed $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} \pi + 0 \\ 0 + 1/2 \\ -1 + \pi \\ e + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1/2 \\ \pi - 1 \\ 1 + e \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot v_2 = \pi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \cdot 0 \\ \pi \cdot 1/2 \\ \pi \cdot \pi \\ \pi \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2\,\pi \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix}$$

$$\pi v_1 - \pi v_2 = \pi \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -1 \\ e \end{pmatrix} - \pi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ 0 \\ -\pi \\ e\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2\,\pi \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ 1/2\,\pi \\ \pi^2 - \pi \\ \pi \cdot (e+1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} v_1 + 2 v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -1 \\ e \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\,\pi \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2\,e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\pi \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\,\pi \\ 1 \\ 2\pi - 1/2 \\ 2 + 1/2\,e \end{pmatrix}$$

$$- v_1 + e \cdot v_2 = - \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -1 \\ e \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 1 \\ -e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 1/2 \\ 1+\pi \\ 1-e \end{pmatrix}$$

b) Sia $p_1(t) = t^2 - 2t + \pi$ ed $p_2(t) = \pi t - 1$

$$(p_1 + p_2)(t) = t^2 + (-2+\pi)\,t + (\pi - 1) = t^2 + (\pi - 2)\,t + (\pi - 1)$$

$$\pi \cdot p_1(t) = (\pi p_1)(t) = \pi t^2 - 2\pi t + \pi^2.$$

c) Si consideri nell'insieme $M_{3,2}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 1/2 \\ -1 & e \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \pi & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0-1 & \pi+1 \\ 1+\pi & 1/2+0 \\ -1+0 & e+1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1+\pi \\ 1+\pi & 1/2 \\ -1 & e+1/3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 & \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot (-1) & \frac{1}{2} e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & \frac{e}{2} \end{pmatrix}$$

$$2A - 2\pi B = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 2 & 1 \\ -2 & 2e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\pi & 2\pi \\ 2\pi^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2\pi & 0 \\ 2 \cdot (1-\pi^2) & 1 \\ -2 & 2 \cdot \left(e - \frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{2}A+\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2/2 \\ -\pi/2 & -\pi/4 \\ +\pi/2 & -\frac{e}{2}\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1/2 \\ \pi/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2\cdot(1-\pi^2) \\ 0 & -\pi/4 \\ \pi/2 & 1/2\cdot(1/3-e\pi) \end{pmatrix}$$

$$3A-B = \begin{pmatrix} 0 & 3\pi \\ 3 & 3/2 \\ -3 & 3e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \pi & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\pi-1 \\ 3-\pi & 3/2 \\ -3 & 3e-1/3 \end{pmatrix}$$

- <u>Osservazioni esempio 8) :</u>

(*) l'elemento neutro nell'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è detto matrice nulla e si indica con ϑ dove ϑ è :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(*) l'elemento opposto di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è indicato con $-A$ dove:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(*) l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ per $n=1$ è il sottoinsieme $M_{m,1}(\mathbb{R}) \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$ dato da :

$$M_{m,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^m$$

cioè è l'insieme delle m-uple di numeri reali.

- <u>Osservazione 2 :</u> in questa sede è stato solamente definito il prodotto per scalari; si vedrà anche in seguito il prodotto vettoriale che però non gode delle stesse proprietà in quanto è definito in $\mathbb{R}^3$ e non in $\mathbb{R}^2$.

- Definizione 2 (sottospazio vettoriale): un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, cioè tale che soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\forall w_1, w_2 \in W$ si ha che $w_1 + w_2 \in W$

2) $\forall w \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\alpha \cdot w \in W$

- Osservazioni:

i) un sottospazio vettoriale W con le operazioni definite in 1) e 2) è uno spazio vettoriale a tutti gli effetti, contenuto in uno più grande V.

ii) dalla 2) segue che per $\alpha = 0$ si ha $0 \cdot w = \vartheta \in W$ se W è sottospazio vettoriale; in particolare sia U un sottospazio vettoriale tale che $\vartheta \notin U$ $\Rightarrow$ U non è sottospazio vettoriale. Inoltre se $w \in W \Rightarrow -w = (-1) \cdot w \in W$ per cui W, sottospazio vettoriale, contiene anche l'opposto di ogni suo elemento.

iii) ovviamente ogni spazio vettoriale V è sempre sottospazio di se stesso cioè $V \subseteq V$ e ha come sottospazio l'insieme $\{\vartheta\}$ costituito dal solo vettore nullo; questi due sottospazi vengono detti banali.
Per verificare che $\{\vartheta\}$ è sottospazio di qualunque spazio vettoriale V basta osservare che valgono le proprietà 1) e 2):

$$1) \quad \vartheta + \vartheta = \vartheta \in \{\vartheta\} \qquad 2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \cdot \vartheta = \vartheta \in \{\vartheta\}.$$

- Esempio 1: si consideri lo spazio vettoriale $V = V_0^2 = \{$insieme dei vettori del piano applicati in $O\}$; i sottospazi banali di V sono:

$$V \text{ (stesso)} \subseteq V \quad \text{e} \quad U = \{\vartheta\} \subset V \qquad (U = \{\overline{OA} : A = O\}) \ ;$$

(*) il vettore nullo $\vartheta = \overrightarrow{OO}$ non ha direzione e verso.
Supponendo che $U \neq \{\vartheta\} \Rightarrow \exists\, u \neq \vartheta \in U$ ($u \neq \vartheta \Rightarrow u = \overrightarrow{OA}$ con $A \neq O$), essendo U sottospazio vettoriale deve essere chiuso rispetto alla somma e al prodotto per cui in base alla proprietà 2) segue che $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \cdot u \in U$ quindi l'insieme $\{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$ che geometricamente esprime l'equazione di una retta passante per l'origine è sottospazio di V infatti oltre alla 2) vale la 1):

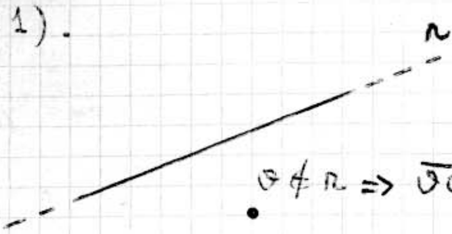
$$\alpha_1 u + \alpha_2 u = (\alpha_1 + \alpha_2) u \in \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq V$$

è sottospazio quindi le rette passanti per l'origine sono sottospazi di V.
Si supponga ora che $\exists\, u_1, u_2 \in U : u_1 \not\parallel u_2 \Rightarrow \forall v \in V$ cioè per ogni vettore v del piano si può scrivere $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Se $v \in U \Rightarrow U = V$ cioè $U \subseteq V$ e $V \subseteq U$, infatti essendo V chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari $\Rightarrow$ che U è sottospazio di V.

In definitiva i sottospazi di $V_0^2 = V$ sono i sottospazi banali V e $\{0\}$ oppure le rette passanti per l'origine.

- <u>Osservazione:</u> una generica retta r che non passa per l'origine O non è sottospazio vettoriale e tantomeno uno spazio vettoriale in quanto ad essa non appartiene il vettore nullo (fig. 1).

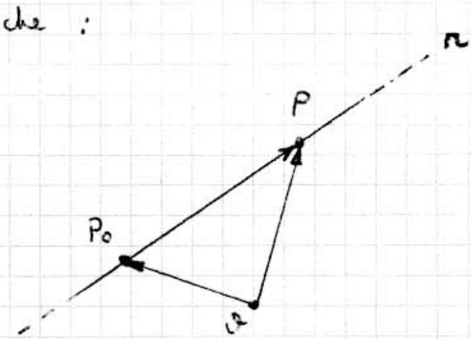


$O \notin r \Rightarrow \vec{OO} \notin r$.

Il più piccolo sottospazio vettoriale di una retta r non passante per l'origine O è $V = V_0^2$ infatti basta osservare che:

$$\vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0} \in r$$

$$\vec{OP} \not\propto \vec{OP_0}$$



- <u>Esempio:</u> è possibile provare che i sottospazi di $V = V_0^3$ sono V stesso,

$U = \{0\}$, $U = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$ (rette passanti per O),

$U = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, u_1 \not\propto u_2\}$ (piani passanti per O).

Un'altro importantissimo esempio di sottospazio vettoriale è quello dei sistemi lineari.

- <u>Definizione 1:</u> sia dato un sistema lineare della forma generale $Ax = b$; il sistema lineare omogeneo associato è della forma $Ax = 0$ (ovvero in cui tutti i termini noti sono nulli). Essendo il sistema in m-equazioni ed n-incognite si scrive:

$$A \cdot x = 0 \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

- Proposizione 1: sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in "n" incognite $Ax = 0 \Rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

Dimostrazione: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ed $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ indicando con

$A^1, A^2, A^3, \dots, A^n \in \mathbb{R}^m$ le colonne della matrice dei coefficienti delle incognite cioè:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} \dots A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (A^1 \ A^2 \ A^3 \ \dots \ A^n)$$

Il sistema è della forma:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Se la n-upla $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di $Ax = 0$ allora $v_1 A^1 + v_2 A^2 + \dots + v_n A^n = 0 \in \mathbb{R}$ (*)

Analogamente se la n-upla $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione del sistema $Ax = 0$ allora $w_1 A^1 + w_2 A^2 + \dots + w_n A^n = 0 \in \mathbb{R}$ (**)

indicando con $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ le soluzioni quindi di $Ax = 0$

W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se sono verificate le seguenti condizioni:

1. occorre dimostrare che $v + w$ è soluzione di $Ax = 0$ infatti sommando membro a membro le (*), (**) si ottiene:

$$v_1 A^1 + w_1 A^1 + v_2 A^2 + w_2 A^2 + \dots + v_n A^n + w_n A^n = 0$$

per la proprietà distributiva dei reali si può scrivere:

$$(v_1 + w_1) A^1 + (v_2 + w_2) A^2 + \dots + (v_n + w_n) A^n = 0 \quad \text{cioè}$$

$\Rightarrow (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \in \mathbb{R}^n$ è soluzione e quindi

$v + w \in W$.

(2) (Prodotto per scalari) in questo caso occorre dimostrare che $\alpha v \in W$ infatti se:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$ soluzione di $Ax = 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ segue che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot \left(v_1 A^1 + v_2 A^2 + \dots + v_n A^n \right) = \Theta$$

per la proprietà distributiva dei reali si può scrivere:

$$\alpha v_1 A^1 + \alpha v_2 A^2 + \dots + \alpha v_n A^n = \Theta$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha v_1) A^1 + (\alpha v_2) A^2 + \dots + (\alpha v_n) A^n = \Theta \quad (\text{associatività in } \mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \dots, \alpha v_n) \in \mathbb{R}^n$$ è soluzione di $Ax = 0$

quindi $\alpha v \in W$.

- Osservazione:

i) è chiaro che ogni sistema del tipo $Ax = 0$ abbia come soluzione il vettore nullo Θ;

ii) l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo cioè del tipo $Ax = b$ con $b \neq 0$ non è un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^n$ in quanto non contiene il vettore nullo (infatti Θ non è soluzione del sistema).

- COMBINAZIONI LINEARI:

- Definizione 1 (combinazione lineare): sia V uno spazio vettoriale; una combinazione lineare di n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ è una espressione della forma (o meglio un vettore):

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ coefficienti di $v_1, v_2, \dots, v_n$.

- Definizione 2: dati n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si definisce Span dei vettori (o sottospazio generato dai vettori) $v_1, v_2, \dots, v_n$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di $v_1, v_2, \dots, v_n$; in simboli:

$$\operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Dimostreremo ora che $\operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è sottospazio vettoriale di V e quindi ne giustificheremo il nome dato.

- Proposizione 1: Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ n vettori di V $\Rightarrow \operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è sottospazio vettoriale di V.