Dimostrazione:

① per dimostrare che è chiuso rispetto alla somma basta osservare che date due combinazioni lineari qualsiasi di $v_1, v_2, \dots, v_n$: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ e $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ risulta $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n =$
$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

② è chiuso rispetto al prodotto per scalari infatti se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ è una combinazione lineare di n-vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ anche $\lambda \cdot (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \in V$ in quanto per la distributività del prodotto si ottiene $\lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda \alpha_n v_n =$
$= (\lambda \alpha_1) v_1 + (\lambda \alpha_2) v_2 + \dots + (\lambda \alpha_n) v_n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

In definitiva $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio di V e si dimostra che è il più piccolo sottospazio di V.

Osservazione: siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ se U è un sottospazio vettoriale di V e $v_1, v_2, \dots, v_n \in U \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subseteq U$.

- Esempi:

① Sia $v = \vartheta \in V \Rightarrow \mathrm{Span}(v) = \{\vartheta\}$

② Sia $v \neq \vartheta \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Span}(v) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ è una retta che passa per l'origine ϑ e contiene v.

- Definizione 3: si dice che un certo numero di vettori o meglio un insieme di vettori $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ è un insieme di generatori di un sottospazio vettoriale U di V cioè $U \subseteq V$ se risulta $U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_n)$.

- Esempio: siano $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vettori dello spazio; l'insieme $\{e_1, e_2, e_3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ infatti sia $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore qualsiasi allora risulta:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$.

- Quesito fondamentale: siano dati due vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; il vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \ ?$$

La risoluzione del problema corrisponde alla soluzione del sistema lineare associato cioè

$$w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \Longleftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \quad w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 .$$

nel caso in questione si avrà allora:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha_1 \\ 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 1 = \alpha_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 1 \\ 1/2 + 2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \frac{5}{2} = 1 \quad \text{impossibile} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

In termini di matrice associata si ha: $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (colonne: v_1, v_2, w)

Riducendo mediante Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \end{matrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ R_2 \\ R_3 - \frac{1}{2}R_2 \end{matrix} \quad \text{impossibile.}$$

Più in generale si può dire che $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_r) \Longleftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r \cdot v_r = w$ cioè se il sistema lineare associato, nelle indeterminate $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ha soluzione; con riferimento ai sistemi lineari e a quanto detto a proposito delle matrici (nella parte relativa ai sottospazi vettoriali) si può enunciare la seguente:

- <u>Proposizione 1:</u> sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e siano $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathbb{R}^m$ le colonne della matrice dei coefficienti allora il sistema è compatibile, cioè ha soluzione $\Longleftrightarrow b \in \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$.

<u>Dimostrazione:</u> il sistema in ambito di spazio vettoriale si può scrivere come combinazione lineare delle:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b.$$

dove $A^1, A^2, \dots, A^n$ sono le colonne della matrice associata.

• INDIPENDENZA LINEARE E BASI

- <u>Definizione 1 (dipendenza lineare):</u> una sequenza di vettori $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ di uno spazio vettoriale V si dice linearmente dipendente se $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = \theta$ dove θ è il vettore nullo.

Se invece non si verifica la suddetta condizione allora si da la seguente, ulteriore:

- Definizione 2 (indipendenza lineare): i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti ovvero se:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

- Esempio 1: siano $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ verificare se sono linearmente indipendenti.

Per essere tali si deve avere $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \theta \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ quindi:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{ok!}$$

$\Rightarrow$ v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

- Osservazione: i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\iff \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta \iff$ il sistema lineare omogeneo associato, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ha solo come soluzione quella banale $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
Da quest'ultima osservazione si può dedurre la seguente:

- Proposizione 1: il sistema omogeneo $Ax = 0$ in n incognite ed m equazioni ha soluzione unica (quella banale $x = 0$) $\iff$ le colonne $A^1, A^2, \dots, A^n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione: infatti il sistema si può scrivere come $x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = \theta$. una soluzione $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ è proprio quella tale che

$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = \theta$.

Quindi $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, cioè diversa da $x = \theta \iff$ le colonne di A sono linearmente dipendenti.

- Esempio 2: sono dati i vettori $v_1 = \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dimostrare che v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti $\iff \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \theta \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 0\,\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ok!} \quad \Rightarrow \forall \alpha_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + 0 \cdot v_2 = \theta$$

- Osservazione 1: se fra i vettori $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ vi è il vettore nullo $v_i = \theta$ $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti; infatti supposto che $v_i = \theta$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + 0 \cdot v_n = \theta \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i$ non necessariamente nulli.

- Esempio: dimostrare che sono linearmente dipendenti i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Di primo acchito si può osservare che $v_2 = -\frac{1}{2} v_1$ ma vediamolo in modo più rigoroso:

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \theta$ cioè:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 1/2\, \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} \\ \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} \\ \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} \end{cases} \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = t \\ \alpha_2 = 2t \end{cases}$$ ∞^1 soluzioni ammesse dal sistema.

- Osservazione 2: i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ almeno uno di questi vettori si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti

Dimostrazione: infatti se $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti ed $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ con $\alpha_i \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n = \theta$$

$$\Rightarrow -\alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

quindi v_i è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ escluso s'intende v_i stesso per cui $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$; v_i in tal caso non serve a descrivere il sottospazio generato da $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Questa osservazione suggerisce la seguente:

- Definizione 3 (base di uno spazio vettoriale): sia V uno spazio vettoriale; un insieme $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in V$, vettori di V è una base di V se valgono le seguenti proprietà:

1) B è un insieme di generatori di V cioè $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$;
2) $v_1, v_2, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti

Negli sviluppi successivi del corso si dimostrerà che se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sono basi di uno stesso spazio vettoriale $V \Rightarrow$ $m = m$ cioè hanno lo stesso numero di elementi (o vettori) per cui ciò ci permette di comprendere e stabilire la dimensione di uno spazio vettoriale V.

- Definizione 4 (dimensione di uno spazio vettoriale): se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, la dimensione di V (che si indica con $n = \dim V$) è il numero n di elementi di B. Lo spazio vettoriale $\{0\}$ ha dimensione zero mentre uno spazio vettoriale ha dimensione infinita quando è privo di insiemi generatori finiti; in questo caso verranno analizzati gli spazi vettoriali di dimensione finita.

- Teorema 1: sia $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V, con $V \neq \{0\}$ allora da $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è possibile estrarre una base B di V cioè $\exists\ B \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ che è una base di V.

Dimostrazione: se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori di V vuol dire che $V = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Span}(A)$ per cui vi sono due possibilità:

1) che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ siano linearmente indipendenti $\Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ è una base di V; (si è dimostrato che $B = A$);

2) che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$; si può supporre, a meno di scambiare l'ordine $\alpha_n \neq 0$ ma allora $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = -\alpha_n v_n$ per cui $v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}$ cioè $v_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$.

In tal caso si afferma che $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ perché $\forall v \in V$, $\exists\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ ma ricordando che $v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}$ e sostituendo opportunamente si ottiene:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n \cdot \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}\right) = \\ &= \beta_1 v_1 - \beta_n \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 + \beta_2 v_2 - \beta_n \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} - \beta_n \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1} = \\ &= \left(\beta_1 - \beta_n \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right) v_1 + \left(\beta_2 - \beta_n \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_n}\right) v_2 + \dots + \left(\beta_{n-1} - \beta_n \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) v_{n-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \text{Span}(B) = V$ a questo punto vi sono altre due possibilità:

3) se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow B = \{v_1, \dots v_{n-1}\} \subseteq A$ è una base di V altrimenti

4) se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente dipendenti si procede con l'analogo ragionamento del caso 2) pervenendo alla conclusione che l'insieme $\{v_1, \dots, v_{n-2}\} = B$ è una base di V cioè $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-2})$; reiterando il procedimento si troverà

che $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ con indice m : $1 \leq m \leq n$.

Dal teorema appena dimostrato segue il seguente:

- Corollario 1: ogni spazio vettoriale avente un insieme finito di generatori ammette una base.

(*) Nota bene: in questo corso si supporrà sempre che uno spazio vettoriale V abbia un insieme finito di generatori e quindi ammette (o possiede) una base.

- Esempio: si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t] = \{$ polinomi a coefficienti reali nella incognita (o variabile o indeterminata) $t \}$; dimostrare che V non possiede una base. Infatti si può affermare che:

$\mathbb{R}[t]$ non ha un insieme finito di generatori $\Rightarrow$ per il corollario 1 non ammette base.

Dimostriamo per assurdo che non ha un insieme finito di generatori:

supposto per assurdo che $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ sia un insieme finito di generatori di $\mathbb{R}[t] \Rightarrow \forall\, p(t) \in \mathbb{R}[t],\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$p(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \dots + \alpha_n p_n(t)$$

con riferimento ai gradi dei polinomi ricordando che:

$$\text{grad}\,(p_1(t) + p_2(t)) \leq \max\{\text{grad}\,(p_1(t)), \text{grad}\,(p_2(t))\}$$

$\Rightarrow \text{grad}\,(p(t)) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\text{grad}\,(p_i(t))\}$ risultato assurdo in quanto

$\mathbb{R}[t]$ contiene polinomi di grado qualsiasi cioè $p_n(t)$ con $n \in \mathbb{N}$

quindi $(1, t, \dots, t^n$ con $n \in \mathbb{N})$.

- Teorema (dello scambio): sia $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V e siano $w_1, \dots, w_m$, m-vettori linearmente indipendenti di $V \Rightarrow$ $n \geq m$.

Dimostrazione: si consideri il vettore $w_1 \in V$; essendo $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (scalari non tutti nulli) tali che:

$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$; supponendo a meno di scambiare le righe $\alpha_1 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 = w_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n$ cioè $v_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} w_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$

$\Rightarrow v_1$ è combinazione lineare di $w_1, v_2, \dots, v_n$ per cui si afferma che

$V = \text{Span}(w_1, v_2, \dots, v_n)$ in quanto $\forall\, v \in V,\ \exists\, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ ma ricordando che

$v_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} w_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$ e sostituendo si ottiene che:

$v = \beta_1 \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha_1} w_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n\right) + \dots + \beta_n v_n$ cioè

$$v = \frac{\beta_1}{\alpha_1} w_1 - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \beta_1 \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n =$$

$$= \frac{\beta_1}{\alpha_1} w_1 + \left(\beta_2 - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \dots + \left(\beta_n - \beta_1 \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n$$

ponendo $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\gamma_2 = \beta_2 - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ..., $\gamma_n = \beta_n - \beta_1 \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ si può scrivere:

$v = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n$ in pratica si è "scambiato" (dal nome del teorema) v_1 con w_1 quindi si può scrivere $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots v_n) = \mathrm{Span}(w_1, v_2, \dots v_n)$.

Considerando ora il vettore $w_2 \in V$, questo si può scrivere come:

$w_2 = \alpha_1' w_1 + \alpha_2' v_2 + \dots + \alpha_n' v_n$ con $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n' \in \mathbb{R}$ non tutti nulli in particolare essendo $w_2 \not\propto w_1$ (per ipotesi, in quanto i vettori sono linearmente indipendenti) $\Rightarrow \alpha_1' = 0$ ma $\alpha_2', \dots, \alpha_n'$ non devono essere tutti nulli; supponendo (a meno di scambi di righe) $\alpha_2' \neq 0 \Rightarrow \alpha_2' v_2 = w_2 - \alpha_1' w_1 - \alpha_3' v_3 - \dots - \alpha_n' v_n$

cioè $v_2 = -\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} w_1 + \frac{1}{\alpha_2'} w_2 - \frac{\alpha_3'}{\alpha_2'} v_3 - \dots - \frac{\alpha_n'}{\alpha_2'} v_n$ quindi v_2 è combinazione lineare di $w_1, w_2, v_3, \dots, v_n$; $\forall v \in V$, $\exists \beta_1', \beta_2', \beta_3', \dots, \beta_n' \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $v = \beta_1' v_1 + \beta_2' v_2 + \beta_3' v_3 + \dots + \beta_n' v_n$ da cui sostituendo a v_1 e v_2 le relazioni appena ricavate si perviene che $v = \gamma_1' w_1 + \gamma_2' w_2 + \gamma_3' v_3 + \dots + \gamma_n' v_n$ cioè è combinazione lineare di $w_1, w_2, v_3, \dots, v_n$; da ciò si conclude che $V = \mathrm{Span}(w_1, w_2, v_3, \dots, v_n)$.

Procedendo con lo scambio di v_3 con w_3 ecc... si perviene al fatto che:

$V = \mathrm{Span}(w_1, w_2, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$. Come conseguenza di ciò si ha il seguente:

- <u>Corollario 2:</u> siano $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ due basi dello spazio vettoriale $V \Rightarrow n = m$.

<u>Dimostrazione:</u> considerando B come l'insieme di generatori di V e B' l'insieme dei m-vettori linearmente indipendenti ed applicando il teorema dello scambio $\Rightarrow n \geq m$; viceversa considerando B' come l'insieme di generatori di V e B invece l'insieme degli n-vettori linearmente indipendenti per il teorema dello scambio $\Rightarrow m \geq n$; da ciò segue necessariamente che $n = m$.

- <u>Osservazione:</u> ricordando che con la notazione $\dim(V)$ si indica il numero di elementi di una base di V, se $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ è l'insieme di r-vettori linearmente indipendenti per il teorema dello scambio se $\dim(V) = n \Rightarrow$ $n = \dim(V) \geq r$.

- Teorema (del completamento): sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V (cioè $\dim(V) = n$) e siano $w_1, \dots, w_r \in V$, r-vettori linearmente indipendenti di V (con $r \leq n$) $\Rightarrow \exists$ $n-r$ vettori di B cioè $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \in V$ tali che $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ sia una base di V.

Dimostrazione: se $W = Span(w_1, \dots, w_r)$ con $r < n$ cioè $\dim(W) < \dim(V)$ ovviamente $W \subset V$ per cui $\exists\, v_{r+1} \in V$: $v_{r+1} \notin W$ cioè $v_{r+1} \notin Span(w_1, \dots, w_r)$ (dire che $v_{r+1} \in V$ e $v_{r+1} \notin W$ è equivalente a porre $v_{r+1} \in V \setminus W$).

Se $v_{r+1} \notin Span(w_1, \dots, w_r) \Rightarrow w_1, \dots, w_r, v_{r+1}$ sono linearmente indipendenti se invece $w_1, \dots, w_r, v_{r+1}$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \in \mathbb{R}$ non nulli tali che $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_r w_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = \vartheta$ sapendo che $w_1, \dots, w_r$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = \vartheta \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ $\Rightarrow \alpha_{r+1} \neq 0$ quindi $v_{r+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{r+1}} w_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{r+1}} w_2 - \dots - \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1}} w_r$ cioè $v_{r+1} \in Span(w_1, \dots w_r)$ assurdo!

Se $r+1 = n$ la dimostrazione è conclusa se invece $r+1 < n$ si ripete il ragionamento svolto allo $Span(w_1, \dots, w_r, v_{r+1})$ cioè se $v_{r+2} \notin Span(w_1, \dots, w_r, v_{r+1})$ $\Rightarrow w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, v_{r+2}$ sono linearmente indipendenti. Reiterando il procedimento si dice che si completa $\{w_1, \dots, w_r\}$ ad una base $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ di V.

- Proposizione: sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale $V \Rightarrow$ ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ cioè degli n-vettori di B.

Dimostrazione: se B è una base di $V \Rightarrow V = Span(v_1, v_2, \dots, v_n) = Span(B)$;
$\Rightarrow \forall v \in V$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.
se $\exists\, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$
$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$
$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = \vartheta$
siccome i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti segue che
$\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, $\dots$, $\alpha_n - \beta_n = 0$ cioè l'unica possibilità è che
$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\dots$, $\alpha_n = \beta_n$ da cui la tesi.

- Definizione 5: sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$; gli n-numeri reali (o scalari) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ sono le coordinate del vettore v rispetto alla base B.

(*) Dimensione di alcuni spazi vettoriali: il piano A^2 ha dimensione 2 per cui $\dim(A^2) = 2$ la retta A^1 ha dimensione 1 $\Rightarrow \dim(A) = 1$, lo spazio A^3 ha $\dim(A^3) = 3$.

- Osservazione importante 1: sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ per stabilire se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme di generatori di V si considera la matrice $A = (v_1 \dots v_m) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ dove m sono i vettori, m colonne ed n righe perché si è in $\mathbb{R}^n$; i vettori dati sono un sistema di generatori $\iff$ il sistema $Ax = b$, $\forall b \in \mathbb{R}^n$ ha soluzione. A questo punto dato un sistema di generatori di V come estrarne una base di V? Se $\{v_1, \dots, v_m\} \in \mathbb{R}^n$ è un insieme di generatori di V (ricavato come indicato precedentemente) si scrive la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ che ha per colonne $A^1 = v_1$, $A^2 = v_2, \dots, A^m = v_m$ e si riduce a scala ottenendo un certo numero di pivot che indichiamo con $P_1, P_2, \dots, P_r$ nelle colonne $i_1, i_2, \dots, i_r \Rightarrow$ i vettori corrispondenti a dette colonne cioè $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ sono una base di V.

- Esempio: siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ determinare una base dello spazio vettoriale $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

La dimensione di V cioè $\dim(V)$ può essere al massimo 3 ma vediamo lo svolgimento:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R'_1 = R_1 \\ R'_2 = R_3 \\ R'_3 = R_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R''_1 = R'_1 \\ R''_2 = R'_2 - 2R'_1 \\ R''_3 = R'_3 \end{matrix}$$

nella riduzione a scala si sono ottenuti 2 pivot rispettivamente nella 1ª e 3ª colonna per cui l'insieme $\{v_1, v_3\} = B$ è una base di V e quindi $\dim(V) = 2$.

$$B = \{v_1, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha v_3 \quad \text{cioè} \quad v_2 \in \mathrm{Span}(v_1, v_3)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_3 & v_2 \text{ (termini noti)} \end{array} \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cioè
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -2\alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \quad \text{identità} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2, 0) \text{ è soluzione infatti}$$

$$v_2 = 2 v_1 + 0 \cdot v_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ c.v.d.}$$

Per stabilire se $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in V$ basta risolvere la matrice associata

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_3 & w \end{array} \end{array} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -2\alpha_2 = 1 \\ 0 = 0 \quad \text{identità} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 5/2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{5}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_3 \quad \text{infatti} \quad w = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4/2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{c.v.d.}$$

- <u>Osservazione importante 2:</u> il teorema del completamento afferma che se $v_1, \dots, v_r$ son r-vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V e se $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di V $\Rightarrow \exists\ m-r$ vettori di B, cioè $w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_m$ che completano $v_1, v_2, \dots, v_r$ ad una base di V; in particolare se $V \subseteq \mathbb{R}^m$ per completare $v_1, \dots, v_r$ basta aggiungervi $m-r$ vettori della base canonica.

Il problema che si è posto è quindi il seguente: dati alcuni vettori indipendenti di uno spazio V, si possono completare ad una base di V? La risposta è affermativa, come visto.

Il metodo di determinazione è il seguente:

1) si considera l'insieme di generatori $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_m\}$ completo di tutti i vettori linearmente indipendenti dati di V e tutti quelli della base B e si estrae una base di V;
2) per estrarre una base di V si considera la matrice $A \in M_{m, m+r}(\mathbb{R})$ con colonne $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_m$;
3) si esegue la riduzione a scala della matrice considerata e si otterranno i primi r-pivot nelle prime r-colonne corrispondenti ai vettori $v_1, \dots v_r$ in quanto sono linearmente indipendenti;
4) i restanti $m-r$ pivot, nelle colonne in cui si trovano, danno indicazione di quali vettori $w_1, \dots, w_m \in B$ completano $v_1, \dots, v_r$ ad una base di V.

- <u>Esempio 1:</u> in $\mathbb{R}^4$ sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix};$$ determinare la dimensione di V una base di V e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -9 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R'_1 = R_1 \\ R'_2 = R_2 + R_1 \\ R'_3 = R_3 - 3R_1 \\ R'_4 = R_4 - 2R_1 \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overset{P_1}{1} & -1 & -1 \\ 0 & \overset{P_2}{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R''_1 = R'_1 \\ R''_2 = R'_2 \\ R''_3 = R'_3 + 3R_2 \\ R''_4 = R'_4 + 2R_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \\ v_1 & v_2 & \end{matrix} \end{array}$$

i pivot sono 1, 1 rispettivamente nella 1ª e 2ª colonna $\Rightarrow$ una base B di V è $B = \{v_1, v_2\}$ quindi $\dim(V) = 2$; da questo segue che $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2) = \text{Span}(B)$ quindi $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$ e quindi non serve.

Per completare la base $\mathcal{B}$ trovata basta osservare che in $\mathbb{R}^4$ la base é data dai vettori

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

per cui componendo la matrice relativa a $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si ottiene:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 + R_1 \\ R_3' = R_3 - 3R_1 \\ R_4' = R_4 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' = R_1' \\ R_2'' = R_2' \\ R_3'' = R_3' + 3R_2' \\ R_4'' = R_4' + 2R_2' \end{matrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overset{p_1}{1} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{p_2}{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{p_3}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{p_4}{-2/3} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \uparrow & \\ v_1 & v_2 & & & e_2 & e_3 & \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} R_1''' = R_1'' \\ R_2''' = R_2'' \\ R_3''' = R_3'' \\ R_4''' = R_4'' - \frac{2}{3} R_3'' \end{matrix}$$

i pivot sono rispettivamente $1, 1, 3, -2/3$ sulla 1ª, 2ª, 5ª e 6ª colonna $\Rightarrow$ $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, e_2, e_3\}$ é una base di $\mathbb{R}^4$ che completa la base $\mathcal{B}$ di V.

- <u>Esempio 2:</u> Con riferimento all'esempio precedente dimostrare che il vettore $e_1 \in \text{Span}(v_1, v_2)$

Dire che $e_1 \in \text{Span}(v_1, v_2) \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ non nulli : $e_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ quindi:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-6\\-4\end{pmatrix} \iff \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & e_1 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 + R_1 \\ R_3' = R_3 - 3R_1 \\ R_4' = R_4 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' = R_1' \\ R_2'' = R_2' \\ R_3'' = R_3' + 3R_2 \\ R_4'' = R_4' - 2R_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$e_1 = 2v_1 + v_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

- <u>Proposizione (dimensione di un sottospazio):</u> sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita pari ad n e $W \subset V$ un suo sottospazio $\Rightarrow$ $\dim(W) \leq \dim(V) = n$; se $\dim(W) = \dim(V) = n \iff W = V$.

• SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI :

Sia V uno spazio vettoriale finito e siano U e W due sottospazi di V si definisce:

a) $U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W \}$ e si denota con sottospazio intersezione;

b) il sottospazio somma $U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W \}$

Si può dimostrare che $U \cap W$ è effettivamente un sottospazio di V incluso ovviamente in U e W e risulta essere quello più grande.
Nel caso della somma b) la dimostrazione che $U + W$ è ancora un sottospazio di V è immediata infatti:

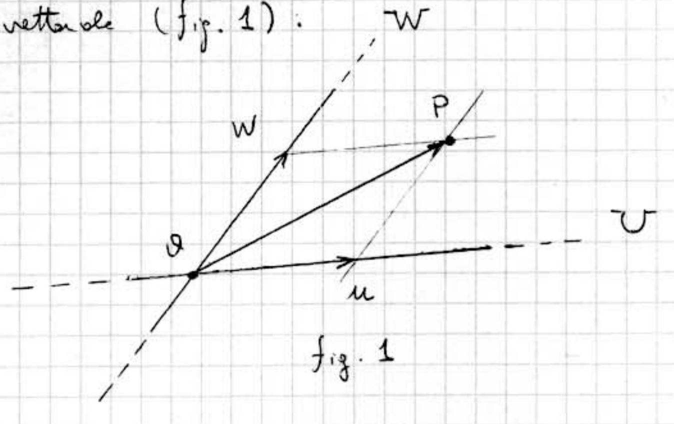
1) siano $u_1 + w_1,\ u_2 + w_2 \in U + W \Rightarrow (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) =$

$= (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$;

2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\alpha \cdot (u + w) = \alpha u + \alpha w \in U + W$

dalle 1) e 2) segue la conclusione.
Il sottospazio somma $U + W$ contiene l'insieme unione $U \cup W$.

- Osservazione importante: in generale l'insieme unione $U \cup W$ non è sottospazio vettoriale di V e ciò lo si può dimostrare con il seguente esempio:
se $V = \mathcal{V}_O^2$ e U e W sono due rette distinte passanti per l'origine si può dedurre che $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è sottospazio vettoriale (fig. 1):



$u + w = \vec{OP} \in V$ ma
$\vec{OP} \notin (U \cup W)$

fig. 1

Dalla fig. 1 si può osservare inoltre che $U \cap W = \vartheta \Rightarrow \{\vartheta\}$ è un sottospazio vettoriale di V

- Osservazione 1: sia W un sottospazio vettoriale di $V \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$;
se $\dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow W = V$.
L'osservazione 1 permette di stabilire, mediante le dimensioni di due spazi vettoriali se siano gli stessi oppure no.

Due quesiti fondamentali sono i seguenti: come trovare o meglio determinare una base di $U + W$ e di $U \cap W$ e stabilire la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$.

- <u>Lemma 1:</u> siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V e siano $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ e $C = \{w_1, \dots, w_s\}$ due basi rispettivamente di U e W
$\Rightarrow B \cup C = \{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ è un insieme di generatori di $U + W$.

- <u>Osservazione 2:</u> se B e C sono due basi di U e W non è detto che $B \cup C$ sia una base di $U + W$, in quanto i vettori di $B \cup C$ potrebbero essere linearmente dipendenti quindi per determinare una base di $U + W$ occorre unire le due basi di U e W ed estrarne una base dove sarà che $\dim(U + W) \leq \dim(U) + \dim(W) = r + s$.

- <u>Teorema di Grassmann:</u> siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita V $\Rightarrow \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

- <u>Esempio 1:</u> sia $U = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

e sia $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ dove $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$; determinare $\dim(U)$, $\dim(W)$, $\dim(U + W)$ e $\dim(U \cap W)$ e se esiste determinare $U \cap W$.

a) la dimensione di U è il numero di vettori linearmente indipendenti dell'insieme generatore $\{v_1, v_2\}$ di U cioè occorre estrarre una base di U:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 + R_1 \\ R_3' = R_3 - 3R_1 \\ R_4' = R_4 - 2R_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' = R_1' \\ R_2'' = R_2' \\ R_3'' = R_3' + 3R_2' \\ R_4'' = R_4' + 2R_2' \end{matrix}$$

i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è una base di U quindi $\dim(U) = 2$.

b) determinazione della dimensione di W:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ -1 & 8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 11 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 + R_1 \\ R_3' = R_3 + R_1 \\ R_4' = R_4 + R_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' = R_1' \\ R_2'' = R_2' \\ R_3'' = R_3' - 11R_2' \\ R_4'' = R_4' - 8R_2' \end{matrix}$$

i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \{w_1, w_2\}$ è una base di W quindi $\dim(W) = 2$.

c) determinazione di una base di $U + W$ e $\dim(U + W)$:

l'insieme $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ è un sistema di generatori di $U + W$ quindi se ne estrae una base riducendo la matrice associata a scala:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \\ 2 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & w_1 & w_2 \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1' = R_1 \\ R_2' = R_2 + R_1 \\ R_3' = R_3 - 3R_1 \\ R_4' = R_4 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1'' = R_1' \\ R_2'' = R_2' \\ R_3'' = R_3' + 3R_2' \\ R_4'' = R_4' + 2R_2' \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1''' = R_1'' \\ R_2''' = R_2'' \\ R_3''' = R_3'' \\ R_4''' = R_4'' - \frac{3}{4} R_3'' \end{matrix}$$

l'insieme di generatori $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ è una base di $U + W$ quindi $\dim(U + W) = 4$.

d) mediante la relazione di Grassmann si ricava che: $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 4 = 0$

$\Rightarrow U \cap W = \theta$.

Osservazione relativa all'esercizio: se $\dim(U + W)$ fosse $= 2$ essendo $U \subseteq U + W$ $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(U + W) \Rightarrow U = U + W \Leftrightarrow W \subseteq U$, allo stesso modo $W \subseteq U + W \Rightarrow$ se $\dim(U + W) = 2$ segue $W = U + W \Leftrightarrow U \subseteq W$ allora l'unica possibilità è che $U = W$.

Inoltre se $\dim(U + W) = 3 \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$ quindi i due piani individuati dai sottospazi U e W si intersecano individuando una retta le cui equazione parametrica si può ricavare risolvendo il sistema $Ax = \theta$ con A la matrice avente per colonne i vettori u_1, u_2, w_1, w_2; (il sistema $Ax = \theta$ è associato ai vettori della base determinati dall'insieme di generatori di $U + W$).

- Definizione (somma diretta): se U e W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $U \cap W = \{\theta\}$ la somma $U + W$ si dice diretta e si scrive $U \oplus W$; in tal caso applicando il teorema di Grassmann si ottiene:
$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$ essendo $\dim(U \cap W) = 0$ in quanto $U \cap W = \{\theta\}$.

- Definizione (sottospazi supplementari): due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V si dicono supplementari (e l'uno un supplementare dell'altro) se $V = U \oplus W$

Da quest'ultima definizione segue la seguente:

- Proposizione: siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $U \cap W = \{\theta\}$ e sia $U \oplus W$ la somma diretta $\Rightarrow$ ogni vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di W.

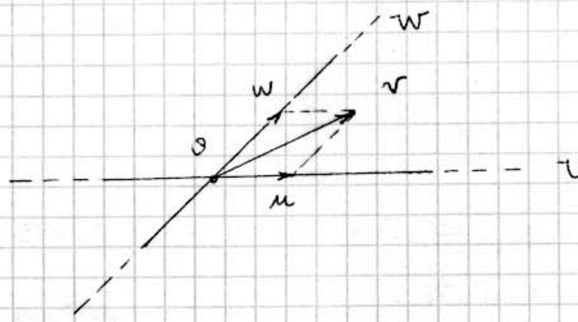
Quindi si afferma che presi $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W \Rightarrow u_1 + w_1 = u_2 + w_2$
$\iff u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Dimostrazione: $u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1$; posto $v = u_1 - u_2$
$\Rightarrow v = w_2 - w_1$ cioè $v \in U$ e $v \in W \Rightarrow v \in W \cap U = \{\vartheta\}$ cioè
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \vartheta \Rightarrow u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$ c.v.d.

- Esempi:

(1) Siano U e $W \subseteq V$ due sottospazi di V rappresentanti due rette distinte passanti per l'origine ϑ (condizione quest'ultima necessaria in quanto U e W devono essere dei sottospazi di V).

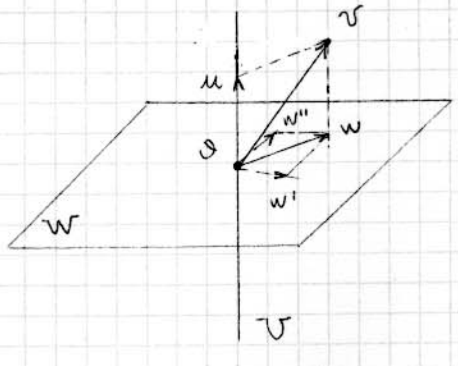
$\forall v \in U + W$, $\exists!\ u \in U$ e $w \in W$: $v = u + w$



$U + W = U \oplus W$
in quanto $U \cap W = \vartheta$.

(2) Nello spazio A^3 siano U una retta passante per l'origine ϑ e W un piano non contenente U passante per ϑ; in tal caso $U \cap W = \{\vartheta\} \Rightarrow U + W = U \oplus W$ (somma diretta) e risulta $U + W = A^3 = \mathbb{R}^3$ infatti (fig. 1):

$\forall v \in A^3$, $\exists!\ u \in U$ e $w \in W$: $v = u + w$.



(3) Siano $U = \text{Span}\left(u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, $W = \text{Span}\left(w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
due sottospazi di $\mathbb{R}^4$;
determinare dimensione e basi di U, W, $U + W$ e $U \cap W$.

a) dimensione di U e W e basi:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \end{matrix} & \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ R'_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R''_1 \\ R''_2 \\ R''_3 \\ R''_4 \end{matrix} \Rightarrow \{u_1, u_2\} \text{ è una base di } U$$

$\Rightarrow \dim(U) = 2$.

b) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \\ R_4' \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\} \text{ è una base di } W$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \dim(W) = 3.$

si considera che la matrice associata a $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ ricordando di ordinare prima i vettori del sottospazio di dimensione più grande.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & u_1 & u_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3, u_1\} \text{ è una base di } V+W$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & u_1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \dim(V+W) = 4.$

<u>Osservazione</u>: se $V + W = V \oplus W \Rightarrow \dim(V \oplus W) = 2 + 3 = 5 > \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ impossibile quindi la somma non è diretta.

c) dal teorema di Grassmann si ricava che $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W)$
$= 2 + 3 - 4 = 1$ (è una retta).

Per determinare $V \cap W$ basta risolvere il sistema $Ax = 0$ omogeneo associato:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_5 \\ x_2 = -x_4 + 2x_5 \Rightarrow x_2 = 3x_5 \\ x_3 = x_4 - x_5 \Rightarrow x_3 = -2x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_5 \\ x_2 = 3x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_4 = -x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -w_1 + 3w_2 - 2w_3 - u_1 + u_2 = 0$

$\iff -w_1 + 3w_2 - 2w_3 = u_1 - u_2 \in V \cap W$

$$\iff -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (-w_1 + 3w_2 - 2w_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{una base di } V \cap W \text{ è } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

quindi $V \cap W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

○ Teorema (di Grossmann): siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita $\Rightarrow$ $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Dimostrazione:

Sia $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ una base di $U \cap W$, dove $r = \dim(U \cap W)$; tenendo presente il teorema del completamento, si completa B ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_p\}$ di U, dove $p = \dim(U)$ e si completa B poi, ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ di W dove $s = \dim(W)$

Da ciò segue che una base di $U+W$ è $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_p, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ infatti:

1) è un sistema di generatori di $U+W$;

2) $v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_p, w_{r+1}, \ldots, w_s$ sono linearmente indipendenti;

Per dimostrare che vale la 2) occorre verificare la relazione seguente:

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_p u_p + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \ldots + \gamma_s w_s = \vartheta \iff$

$\iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \ldots = \beta_p = \gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_s = 0$.

Posto: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \in U \cap W$;

$u = \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_p u_p \in U$;

$w = \gamma_{r+1} w_{r+1} + \ldots + \gamma_s w_s \in W$;

$\Rightarrow$ per ipotesi si deve avere che $v + u + w = \vartheta \Rightarrow w = -v - u$ essendo $w \in W$ e $w \in (U \cap W) \cup (U) \Rightarrow w \in U \cap W$ quindi $w = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_r v_r$ con $\delta_1 \ldots \delta_r$ fissati è una combinazione lineare di $v_1 \ldots v_r$ vettori di $U \cap W$; $\Rightarrow \gamma_{r+1} w_{r+1} + \ldots + \gamma_s w_s = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_r v_r$ ed essendo $v_1 \ldots v_r$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_s = \delta_1 = \ldots = \delta_r = 0$ in quanto anche $w_{r+1}, \ldots, w_s$ sono linearmente indipendenti per ipotesi.

Quindi si può scrivere che $w = \vartheta \iff \gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_s = \vartheta \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_p u_p = \vartheta \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \ldots = \beta_p = 0$ per l'indip. lineare.

In definitiva $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_p, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ è una base di $U+W$

cioè essendo $v_1 \ldots v_r \in (U \cap W)$, $u_{r+1}, \ldots, u_p \in U$ e $w_{r+1}, \ldots, w_s \in W$

$\Rightarrow$ i vettori della base sono $r + (p-r) + (s-r) = p + s - r \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ c.v.d.

FUNZIONI (O APPLICAZIONI) TRA SPAZI VETTORIALI :

- Definizione 1 (funzioni o applicazioni lineari): una funzione (o applicazione) tra due spazi vettoriali V e W qualsiasi, $f: V \to W$ si dice lineare se valgono le seguenti proprietà:

i) $\forall v_1, v_2 \in V$, $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$: $\alpha f(v) = f(\alpha v)$

- Osservazioni: se $V = W$ cioè l'insieme di partenza (o dominio) coincide con quello di arrivo (o codominio) allora si parla di endomorfismo; in generale se la proprietà ii) vale per un campo $K \neq \mathbb{R} \Rightarrow V$ e W si possono definire anche su un campo $K \neq \mathbb{R}$.

Se $f: V \to W$ è lineare $\Rightarrow$ dalle prop. i) e ii) segue in particolare che $f(\theta) = \theta$, più precisamente $f(\theta_V) = \theta_W$ dove con θ_V, θ_W si indicano in modo distinto il vettore nullo di V e W rispettivamente.

- Esempi di funzioni lineari:

1) Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ -x \end{pmatrix}$; dimostrare che è lineare infatti:

i) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si ha che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ y_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$ per definizione di somma

mentre $$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

quindi $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si ha che $\alpha \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ -x \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha y \\ -\alpha x \end{pmatrix}$$ mentre $$f\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha y \\ -\alpha x \end{pmatrix}$$ quindi risulta

$$\alpha f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Con riferimento ai vettori e_1, e_2 della base canonica $\{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha che:

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Osservazione</u>: con la notazione e_n relativa ad un vettore generico di una base canonica, il numero "n" a pedice indica la posizione dell'unità nella riga n-esima.

- <u>Controesempi (funzioni non lineari)</u>:

1) Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+1 \\ -x \end{pmatrix}$ dimostrare che non è lineare.

Basta semplicemente osservare che $f(\theta_V) \neq \theta_W$ infatti si ha che:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+1 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ($f(\theta_V) = \theta_W$ solo nel caso banale del prodotto con $\alpha = 0$).

2) Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y^2 \\ -x \end{pmatrix}$ dimostrare che non è lineare.

In questo caso si deve osservare che $f(\theta) = \theta$ ma non è verificata la i) e ii) infatti:

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$ poiché $\begin{pmatrix} (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ y_1^2+y_2^2 \\ -(x_1+x_2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ y_1^2+y_2^2+2y_1y_2 \\ -(x_1+x_2) \end{pmatrix}$

b) $\alpha f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq f\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ poiché $\begin{pmatrix} \alpha(x-y) \\ \alpha y^2 \\ -\alpha x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha(x-y) \\ \alpha^2 y^2 \\ -\alpha x \end{pmatrix}$.

Vediamo qualche caso numerico:

$$2f(e_2) \neq f(2e_2) \text{ infatti } 2f(e_2) = 2 \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre:

$$f(2e_2) = f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un modo per costruire le funzioni lineari sono le matrici infatti si dà la seguente:

- <u>Definizione 2</u>: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice con m-righe ed n-colonne cioè sia $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$, con $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathbb{R}^m$ le n-colonne di A chiamate anche n-vettori di $\mathbb{R}^m$ in quanto m-uple di numeri reali; si definisce un'applicazione $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (associata alla matrice A) ponendo:

$$L_A(x) = L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n \in \mathbb{R}^m$$

in quanto combinazione lineare di n-vettori di $\mathbb{R}^m$ quindi $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; si dimostra altresì che $L_A(x)$ è lineare ricordando le proprietà dei reali e le definizioni di somma e prodotto per scalari.

- <u>Osservazione</u>: affinché $L_A(x) = Ax$ abbia un senso, occorre che il numero di colonne di A coincida con il numero delle righe di x (vettore x) in quanto è una combinazione lineare di tutti i vettori o colonne di A.

- Esempio numerico: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$; ad A associo la funzione $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot A^1 + y \cdot A^2 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

analoga a quello dell'esempio 1) relativo alle funzioni lineari in generale.

Per le funzioni lineari si potrebbe dimostrare con tutto rigore la seguente:

- Proposizione: sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lineare qualsiasi allora $\exists!\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tale che $f = L_A$ inoltre $A^1 = f(e_1)$, $A^2 = f(e_2)$, ..., $A^n = f(e_n)$

Ad ogni applicazione lineare $f : V \to W$ si possono associare due sottoinsiemi:

- Definizione 3 (Nucleo): sia $f : V \to W$ lineare si definisce nucleo e si indica con $\mathrm{Ker}(f)$ il seguente sottoinsieme di V (del dominio):

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = \theta \} \subseteq V$$

La sigla "Ker" deriva dal termine inglese "kernel" che significa "nucleo" appunto.

- Definizione 4 (Immagine): sia $f : V \to W$ lineare si definisce l'immagine di f e si indica con $\mathrm{Im}(f)$ il seguente sottoinsieme di W (del codominio):

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V : f(v) = w \} \subseteq W.$$

- Proposizione: sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare allora si ha che:

i) $\mathrm{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di V;
ii) $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di W;
iii) f è iniettiva $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{\theta\}$;
iv) f è suriettiva $\iff \mathrm{Im}(f) = W$;

Dimostrazione:

i) occorre verificare che:

a) $\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, $v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ infatti per definizione si ha che $f(v_1) = \theta$ e $f(v_2) = \theta$ essendo f lineare per ipotesi $\Rightarrow f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \Rightarrow \theta + \theta = \theta$ da cui $v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) $\forall v \in \mathrm{Ker}(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in \mathrm{Ker}(f)$ infatti essendo per definizione $f(v) = \theta$ ed inoltre ricordando che f è lineare risulta che $\alpha \cdot f(v) = f(\alpha \cdot v) \Rightarrow f(\alpha \cdot v) = \theta$ da cui $\alpha \cdot v \in \mathrm{Ker}(f)$.