ii) occorre verificare che:

a) $\forall w_1, w_2 \in Im(f)$, $w_1 + w_2 \in Im(f)$ infatti ricordando la definizione di immagine di f si ha che:

$$w_1 \in Im(f) \Rightarrow \exists v_1 \in V : f(v_1) = w_1$$

$$w_2 \in Im(f) \Rightarrow \exists v_2 \in V : f(v_2) = w_2$$

per cui si ha che: (1) per definizione di f. lineare.

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \overset{(1)}{=} f(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in Im(f).$$

b) $\forall w \in Im(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha w \in Im(f)$ infatti ricordando che

$$w \in Im(f) \Rightarrow \exists v \in V : f(v) = w \quad \text{cioè} \quad f(v) \in Im(f)$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot f(v) \overset{(1)}{=} f(\alpha v) \in Im(f) \Rightarrow \alpha w \in Im(f).$$

iii) si suppone dapprima che f sia iniettiva e che $f(v) = \vartheta$ cioè che $v \in Ker(f)$ anche $f(\vartheta) = \vartheta$ (in quanto f è lineare) $\Rightarrow v = \vartheta$ quindi $Ker(f) = \{\vartheta\}$.
Viceversa si supponga che $Ker(f) = \{\vartheta\}$, presi $v_1, v_2 \in V$ aventi la stessa immagine cioè tali che $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = \vartheta$ da cui segue che $f(v_1) - f(v_2) = f(v_1) + (-1) \cdot f(v_2) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1 - v_2) = \vartheta$ (in quanto f è lineare) $\Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker(f) = \{\vartheta\} \Rightarrow v_1 - v_2 = \vartheta \Rightarrow v_1 = v_2$ c.v.d.

iv) è la definizione di iniettività valida anche per funzioni non lineari (cioè in generale).

- Osservazione: la definizione data al punto iii) distingue nettamente il concetto di iniettività delle funzioni lineari rispetto quello delle applicazioni qualsiasi; si vedrà in seguito che se $Ker(f)$ ha dimensione zero $\Rightarrow f$ è iniettiva altrimenti se $\dim(Ker(f)) > 0$ $\Rightarrow f$ non è iniettiva.

- Lemma 1: sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ così definita $f = L_A$ dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vartheta \right\}$$

essendo $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \Rightarrow$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vartheta \iff x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = \vartheta$ cioè se $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la n-upla di numeri reali è soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax = \vartheta$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ quindi $Ker(f) = Ker(L_A) = \{$insieme delle soluzioni di $Ax = \vartheta\}$.

- **Lemma 2**: sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ così definita $f = L_A$ dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \quad Im(f) = Im(L_A) = Span(A^1, \dots, A^n) \subseteq \mathbb{R}^m$

$\{A^1, \dots, A^n\}$ è un sistema di generatori di $Im(L_A)$ ma non una base in generale.

quindi $w \in Im(L_A) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \; w = L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Span(A^1, \dots, A^n)$

- **Esempio numerico**: Sia $L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$; calcolare $Ker(L_A)$, $dim(Ker(L_A))$, $Im(L_A)$, $dim(Im(L_A))$.

$Ker(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : Ax = \vartheta \right\}$ risolvo il sistema associato omogeneo $Ax = \vartheta$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vartheta \Rightarrow Ker(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vartheta \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

quindi $dim(Ker(L_A)) = \vartheta$

Avendo ridotto a scala la matrice A si ha che $Im(L_A) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow dim(Im(L_A)) = 2 \Rightarrow Im(L_A) \subsetneq \mathbb{R}^3$

- **Osservazione**: con riferimento all'esempio numerico precedente se "n" è il numero di variabili del sistema lineare omogeneo $Ax = \vartheta$ e riducendo a scala la matrice A si hanno "r"-pivot $\Rightarrow$ $n - r$ sono le variabili libere per cui si avrà che $dim(Ker(L_A)) = n - r$ mentre $dim(Im(L_A)) = r$ quindi si ottiene per definizione che $dim(Ker(L_A)) + dim(Im(L_A)) = n$; si vedrà in seguito che questo risultato è sempre valido più in generale per quanto riguarda le funzioni lineari.

- **Definizione 5 (rango)**: sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare ; il rango di f che si indica con $rg(f)$ è dato da : $rg(f) = dim(Im(f))$, cioè è la dimensione dell'immagine.

Siccome $Ker(f) \subseteq V$ e $Im(f) \subseteq W \Rightarrow dim(Ker(f)) \leq dim(V)$ e $dim(Im(f)) \leq dim(W)$ ma anche $rg(f) = dim(Im(f)) \leq dim(V)$.

- Teorema (della dimensione): Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare allora:

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + rg(f)$$

Dim: omessa.

- Osservazione: nelle ipotesi del teorema precedente se si considera una base $B' = \{u_1, \dots, u_s\}$ di $Ker(f) \subseteq V$ (se $Ker(f) = \{0\} \Rightarrow \nexists$ una base B') poi si completa B' ad una base B di V (cioé del dominio) cioé sia $B = \{u_1, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ base di V essendo $u_1, \dots, u_s \in Ker(f)$ questi vettori non servono a generare $Im(f)$, quindi si dimostra che $\{f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)\} \subseteq W$ é una base di $Im(f)$.

Una prima conseguenza del Teorema della dimensione é che per verificare se un'applicazione lineare é iniettiva o suriettiva basta controllare il rango:

- Corollario: sia $f: V \to W$ lineare allora si ha che:

i) f é iniettiva $\Leftrightarrow rg(f) = dim(V)$;
ii) f é suriettiva $\Leftrightarrow rg(f) = dim(W)$;
iii) in particolare se $dim(V) = dim(W)$ (caso particolare é $V = W$, cioé l'endomorfismo), f é iniettiva $\Leftrightarrow$ é suriettiva.

Dim. prop. iii): f é iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow dim(Ker(f)) = 0$
$\Rightarrow$ per il teorema della dimensione $rg(f) = dim(V) \Leftrightarrow Im(f) = V$
$\Rightarrow f$ é suriettiva e quindi essendo sia suriettiva che iniettiva $\Rightarrow f$ é biettiva

- Definizione 6 (controimmagine o retroimmagine): sia $f: V \to W$ lineare; fissato un elemento $w \in W$, la controimmagine o retroimmagine di w é il sottoinsieme di V (del dominio):

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

- Osservazione: con riferimento alla definizione 6 non bisogna confondere il concetto di controimmagine con quello di funzione inversa.
In particolare se $f = L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(w) = \{$soluzioni di $Ax = w\}$
cioé $f^{-1}(w) =$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = w$.

MATRICI ED APPLICAZIONI LINEARI:

- COMPOSIZIONE E ISOMORFISMI:

- Definizione 1: dati due spazi vettoriali V e W, l'insieme delle applicazioni lineari da V su W si indica con:

$$\mathcal{L}(V, W) = \{ f : V \to W \text{ lineare} \}$$

è uno spazio vettoriale e ciò si dimostra premettendo le operazioni di somma e prodotto per scalari nel modo seguente:

i) (Somma): siano $f, g : V \to W \in \mathcal{L}(V, W)$

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad , \quad \forall v \in V$$

ii) (Prodotto per scalari): sia $f : V \to W$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(v) = \alpha \cdot f(v) \quad , \quad \forall v \in V$$

infatti per la i) $f(v) + g(v) \in W \Rightarrow (f+g) : V \to W, \forall v \in V$, mentre per la ii) $\alpha \cdot f(v) \in W \Rightarrow (\alpha f) : V \to W, \forall v \in V$.

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ allora essendo $f \in \mathcal{L}(V, W)$ è del tipo $f = L_A$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (si è visto che sussiste la corrispondenza $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \to (L_A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m)$).

- Proposizione 1: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è isomorfo allo spazio vettoriale delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Per rafforzare ciò basta dimostrare che $L : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ cioè l'applicazione che associa ad una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ quindi $A \mapsto L_A$ è funzione lineare e biettiva quindi in definitiva è un isomorfismo tra i due spazi vettoriali $M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

* Isomorfismo = (dal greco) stessa forma o struttura.

- Proposizione 2: Siano V e W due spazi vettoriali qualsiasi e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V (quindi $\dim(V) = n$); dati $w_1, \dots, w_n \in W$ n-vettori qualsiasi di W $\Rightarrow \exists ! \; f : V \to W$ lineare tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n$.

- Osservazione prop. 2: ricordando che $\forall v \in V$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ quindi avendo fissato l'immagine di una base cioè $f(v_i) = w_i$, con $i = 1, \dots, m$ $\Rightarrow$ essendo f lineare risulta:

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m) \text{ essendo}$$

$$f(v_1) = w_1, \ f(v_2) = w_2, \dots, f(v_m) = w_m \Rightarrow f(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$$

Un'altra operazione che si esegue sulle applicazioni lineari, oltre la somma ed il prodotto per scalari, è la composizione e si dà a tal proposito la seguente:

- Definizione 2 (Composizione di funzioni): siano $f: V \to W$, $g: W \to Y$ due applicazioni lineari $\Rightarrow$ la composizione di f e g è l'applicazione $(g \circ f): V \to Y$ data da:

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)), \quad \forall v \in V$$

quindi $f(v) \in W$ mentre $g(f(v)) \in Y$; con $g \circ f$ si indica che dapprima si applica f e poi si applica g.
Si può dimostrare che anche la composizione tra funzioni lineari è pure lineare.

- Esempio: sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -y \end{pmatrix}$ e sia $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ così definita: $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ x-y \\ x-z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ determinare $g \circ f$.

$g \circ f$ sarà una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^4$ data da:

$$(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-y)-(-y) \\ (x+y)-(x-y) \\ (x+y)-(-y) \\ (x+y)+(x-y)+(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Ricordando che $\exists! \, A = (f(e_1) \ \ f(e_2)) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ tale che $f = L_A$, $\exists! \, B = (g(e_1) \ \ g(e_2) \ \ g(e_3)) \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ tale che $g = L_B$ ed infine $\exists! \, C = ((g \circ f)(e_1) \ \ (g \circ f)(e_2))$ tale che $(g \circ f) = L_C$, le matrici A, B e C sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ora il quesito fondamentale è il seguente: visto che la composizione di applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ corrisponde ad una composizione di matrici cioè $(g \circ f) \to L_B \circ L_A = L_C$ come si calcola la matrice C tale che $L_C = L_B \circ L_A$?

- <u>Definizione 3 (composizione di matrici)</u>: date due matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ si dice che la matrice $C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ tale che $L_A \circ L_B = L_C$ è il prodotto (righe per colonne) di A e B, e si scrive $C = A \cdot B$ quindi si ha che

$$L_A \circ L_B = L_C = L_{AB}$$

La colonna C^j cioè j-esima di C è immagine tramite $(L_A \circ L_B)$ del vettore e_j della base canonica quindi si ha che:

$$C^j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = (L_A \circ L_B)(e_j) = L_A(B^j)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{1j} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1} b_{1j} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{per } i = 1, \dots, p .$$

In altri termini $C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e si scrive:

$$C = (c_{ij})_{\substack{i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots p}} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

dove $A_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})$

$$B^j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

- <u>osservazione importante</u>:

1) si può effettuare il prodotto (righe per colonne) solo se il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B;
2) se $m \neq p \Rightarrow \nexists\, A \cdot B$; inoltre in generale non vale l'uguaglianza $A \cdot B = B \cdot A$ (anche se $m = p$) quindi il prodotto definito non è commutativo.

- <u>Esempi di applicazione</u>:

1) Con riferimento all'esempio precedente si voglia calcolare

$C = B \cdot A$ in modo tale che $L_C = L_B \circ L_A = (g \circ f)$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \overset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}} = \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$c_{11} = (0 \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$c_{12} = (0 \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$$

$$c_{21} = (1 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$c_{22} = (1 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = 2$$

$$c_{31} = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$c_{32} = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 2$$

$$c_{41} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

$$c_{42} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -1$$

2) sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$; se $m = p = 3$ ed $n = 2$

$\Rightarrow A \cdot B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ mentre $B \cdot A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ quindi $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3) Siano $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ così definite:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ verificare che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

a) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è ovvio che $A \cdot B \neq B \cdot A$

4) Sia $I \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale cioè della forma $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $A \cdot I = I \cdot A = A$ cioè la matrice I commuta con ogni matrice dello stesso ordine (verificare).

- Proposizione 3: se $f: V \to W$ lineare e biiettiva $\Rightarrow$ $\dim(V) = \dim(W)$ per cui si dice che V e W sono isomorfi.

Dim: dal teorema della dimensione segue che $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f)$ essendo inoltre f iniettiva $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, $rg(f) = \dim(V)$ in quanto f è iniettiva inoltre $rg(f) = \dim(W)$ perché f è anche suriettiva da cui si ha che $rg(f) = \dim(V) = \dim(W)$.

- Esempio: sia V uno spazio lineare qualsiasi e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di V si definisca la funzione $F_B: V \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$F_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ è una } n\text{-upla di numeri reali.}$$

se $v \in V \Rightarrow \exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} :\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ è facile verificare che F_B è lineare infatti:

i) se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ risulta

$$F_B(v+w) = F_B((\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = F_B(v) + F_B(w)$$

ii) se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora si ha che

$$F_B(\lambda \cdot v) = F_B(\alpha_1 \lambda v_1 + \dots + \alpha_n \lambda v_n) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot F_B(v)$$

inoltre F_B è anche biiettiva; essendo ovviamente $\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^n)$ per verificare che la funzione è biettiva basta provare solamente il caso in cui F_B sia iniettiva oppure che F_B sia suriettiva quindi in definitiva F_B è un isomorfismo che dipende dalla base B scelta.

- Definizione 4 (invertibilità): una funzione $f: V \to W$ lineare si dice invertibile se $\exists\ g: W \to V$ lineare tale che $f \circ g = id_W$ e $g \circ f = id_V$; si dice che g è l'inversa di f e si indica con $g = f^{-1}$.

$id_V: V \to V$ e $id_W: W \to W$ sono funzioni identità che associano ad ogni elemento del dominio, l'immagine stessa.

- Proposizione 4: sia $f: V \to W$ lineare allora f é invertibile $\Leftrightarrow$ f é biettiva

- Osservazione:

a) con riferimento alla definizione 4 la funzione inversa g, se esiste, é unica;
b) con riferimento alla proposizione 4 se f é lineare ed invertibile $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$, questo segue dal fatto che f é biettiva $\Rightarrow$ per il t. della dimensione $\dim(V) = \dim(W)$

- Esempio: sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare ed invertibile $\Rightarrow n = m$, cioé $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$.

• MATRICI INVERTIBILI:

- Premessa:

Contrariamente alle matrici rettangolari quelle quadrate ammettono sempre il prodotto righe per colonne.

Dall'esempio precedentemente svolto sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare $\Rightarrow \exists!\, A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $f = L_A$; se f é invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare tale che $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$; ricordando che $\exists!\, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $f^{-1} = L_B$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow L_B \circ L_A = L_I \quad \text{con} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

$I = (e_1 \ e_2 \dots e_n)$ viene detta matrice identitá di ordine "n" associata alla funzione identitá $id_{\mathbb{R}^n}$.

Per definizione si puó scrivere: $f^{-1} \circ f = L_B \circ L_A = L_{BA} \Rightarrow B \cdot A = I$
analogamente si puó scrivere: $f \circ f^{-1} = L_A \circ L_B = L_{AB} \Rightarrow A \cdot B = I$
essendo $L_{AB} = L_{BA} = L_I \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A = I$

- Definizione 5 (invertibilitá di matrici): si dice che una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é invertibile se $\exists$ la matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I$; la matrice B si dice inversa di A e si indica con $B = A^{-1}$. Inoltre se $\exists$ l'inversa questa é unica.

- Proposizione 5: una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é invertibile allora:

i) L_A é invertibile;
ii) L_A é iniettiva ($\Rightarrow$ é suriettiva e biettiva);
iii) L_A é suriettiva ($\Rightarrow$ é iniettiva e quindi biettiva);
iv) $rg(L_A) = n$ ($\Rightarrow$ la matrice A é non singolare quindi ha n-pivot)
v) il sistema omogeneo $A x = 0$ ha come unica soluzione $x = 0$
$\Rightarrow Ker(L_A) = \{0\}$ (questo perché L_A é iniettiva);

ecc...

- Osservazione: se nella riduzione a scala della matrice A risulta $\ker(A) \neq \{0\}$ $\iff \exists$ r-pivot con $r < n$ dove $n = \dim(A)$.

Il problema da risolvere è il seguente: determinare l'inversa di $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una volta stabilito che A è invertibile.
Affermare che A è invertibile significa che $\exists\, X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $AX = I$ e ciò equivale a dire che:

$$AX^1 = e_1 \implies A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1$$

$$AX^2 = e_2 \implies A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = e_2$$

......

$$AX^n = e_n \implies A \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n$$

cioè $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ è la matrice che ha per colonne le n-uple soluzioni dei sistemi lineari quadrati; quindi determinare X significa risolvere simultaneamente i sistemi lineari quadrati del tipo $Ax = e_1 \; \dots \; Ax = e_n$ che hanno la stessa matrice A dei coefficienti.
Un metodo di calcolo di una matrice inversa, più rapido ed efficiente si basa sul metodo di eliminazione di Gauss.

- Metodo di calcolo dell'inversa di una matrice mediante riduzione a scala:

Per determinare, se esiste, l'inversa di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si procede nel seguente modo:

1) si scrive a fianco della matrice A la matrice identità I come è illustrato qui di seguito: $\left(A \,\middle|\, I \right)$ N.B. I deve avere lo stesso ordine di A.

2) si esegue la riduzione a scala della matrice A eseguendo le medesime operazioni anche sulla matrice I ottenendo una matrice del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & \cdots & * & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & p_n & \end{array} \right)$$ dove $p_1 \dots p_n$ sono gli n-pivot

3) si esegue la riduzione a scala o meglio l'eliminazione di Gauss partendo dall'ultima riga in basso e procedendo verso l'alto in modo da ottenere la matrice diagonale $n \times n$ (cioè di ordine n) a sinistra, come è qui di seguito illustrato:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & P_n & \end{array}\right)$$ dove $P_1, \dots, P_n$ sono i pivot della matrice ridotta a scala.

4) si divide ogni riga per il corrispondente pivot, cioè per il pivot che sta su quella riga (alla j-esima riga corrisponde il j-esimo pivot P_j) in modo da ottenere la matrice identità a sinistra ed ottenere così a destra la matrice inversa A^{-1} di ordine n.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A^{-1} \\ 0 & \cdots & 1 & \end{array}\right)$$

5) si consiglia di effettuare le seguenti controverifiche dei risultati ottenuti:

$A \cdot A^{-1} = I$ e anche che $A^{-1} \cdot A = I$

- Osservazione: come già ribadito precedentemente se nella riduzione a scala della matrice A (passo 2)) si determinano n-pivot $\Rightarrow$ A è invertibile altrimenti se $\exists$ r-pivot con $r < n$ $\Rightarrow$ $Ker(A) \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ A non è invertibile in quanto L_A non è biettiva. Questo metodo permette di risolvere contemporaneamente tutti i sistemi $Ax = e_i$ con $i = 1, \dots, n$.

- Esempio di applicazione: sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ è invertibile? Se sì, determinare $B = A^{-1}$.

Si può verificare per esercizio che la funzione associata $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare e biettiva $\Rightarrow$ $Ker(L_A) = \{0\}$ $\Rightarrow$ A ammette l'inversa A^{-1}.

a) si pone a fianco di A la matrice identità di ordine 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{I}$$

b) si riduce a scala la matrice completa 3×6 così ottenuta:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 + \frac{1}{2}\cdot R_1 \\ R_3 - \frac{1}{2}\cdot R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_3 + R_2$$

vi sono 3 pivot $\Rightarrow$ $Ker(L_A) = \{0\}$ quindi A ammette inversa A^{-1}.

c) dalla matrice ottenuta si esegue l'eliminazione di Gauss partendo dalla terza riga e proseguendo (o procedendo) verso le prime righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + R_3 \\ R_2 + 1/2\, R_3 \\ \\ \end{array}$$

Matr. diag. di A

d) si divide ogni riga per il pivot corrispondente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1/2\cdot R_1 \\ R_2 \\ (-1)\cdot R_3 \end{array}$$

I $\overset{(*)}{B = A^{-1}}$.

(*) si risolvono 3 sistemi diversi di equazioni contemporaneamente.

e) Verifica del risultato ottenuto:

deve essere $A \cdot B = B \cdot A = I$ quindi:

1) calcolo $A \cdot B$ nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+0-1 & 1+0-1 \\ -1/2+1/2+0 & 1/2+1/2+0 & -1/2+1/2+0 \\ 1/2-1/2+0 & 1/2-3/2+1 & 1/2-1/2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) calcolo $B \cdot A$ così:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1/2+1/2 & 0+1/2-1/2 & 1/2+0-1/2 \\ 1-3/2+1/2 & 0+3/2-1/2 & 1/2+0-1/2 \\ 0+1-1 & 0-1+1 & 0+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

Sia $f: V \to W$, si è visto che $rg(f) = \dim(Im(f))$; nel caso delle matrici si può dare la seguente:

- Definizione 1 (rango di una matrice): il rango di $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è:

$$rg(A) = rg(L_A) = \dim(Im(L_A)) \quad \text{dove } L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{e } L_A(e_i) = A^i$$

con $i = 1, \dots, n$ quindi si ha in particolare che $Im(L_A)$ è l'immagine di L_A generata dalle colonne di A, che sono vettori di $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $rg(A)$ è la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A cioè corrisponde al massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

- Definizione 2 (Trasposizione): data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si definisce trasposta di A, e si indica con A^T, la matrice appunto $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ che ha come righe le colonne di A (per questo motivo $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Esempio numerico: sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Prima di vedere alcune proprietà della trasposizione accenniamo brevemente ad alcune proprietà del prodotto tra matrici definito in precedenza.

- Proprietà fondamentali del prodotto (righe per colonne) tra matrici:

Nella ipotesi che il numero di righe di A è pari al numero di colonne di B e anche di C (in modo da rendere possibile il prodotto) si ha che:

i) $A \cdot (B + C) = AB + AC$;

ii) $\alpha \cdot (AB) = (\alpha A) B = A(\alpha B), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $(AB)C = A(BC)$

iv) $A \cdot I = I \cdot A$ (con I la matrice identità);

v) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ (con 0 la matrice nulla);

vi) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (l'inversa del prodotto è uguale al prodotto delle inverse con l'ordine invertito).

- Proprietà della trasposizione:

i) $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha che $(A + B)^T = A^T + B^T$;

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si ha che $(\alpha A)^T = \alpha \cdot (A^T)$;

(la prop. ii) è giustificata dal fatto che la trasposizione è una funzione lineare).

iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (cioé la trasposta del prodotto é uguale al prodotto delle trasposte con ordine invertito).

N.B.:

La trasposizione effettua una simmetria rispetto alla diagonale principale di una data matrice A; da questo segue la seguente:

- Definizione 3 (matrice simmetrica): una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é detta simmetrica se $A^T = A$

- Esempio numerico:

1) sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice é simmetrica in quanto

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ricordando la nota appena fatta modo per vedere immediatamente se una matrice é simmetrica oppure no basta osservare se gli elementi sopra oppure sotto la diagonale principale sono simmetrici rispetto la stessa (la diagonale può avere elementi qualsiasi).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \boxed{2} \\ -1 & \boxed{2} & 3 \end{pmatrix}$$

2) la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ non é simmetrica come si può facilmente dimostrare.

- Teorema 1: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(A) = rg(A^T)$

- Osservazione: con riferimento al teorema 1 si ha che il rango di una matrice A, che per definizione é il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A, coincide con il massimo numero di righe linearmente indipendenti, quindi si ha:

$$rg(A) \leq \min\{m, n\}.$$

- Esempio: sia $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ il $rg(A)$ = numero di pivot ottenuti riducendo a scala la matrice A quindi essendoci al massimo 3 pivot $\Rightarrow rg(A) \leq 3$.

° DETERMINANTI:

* Premessa: con riferimento alle matrici quadrate cioé appartenenti a $M_{n,n}(\mathbb{R})$ per stabilire se una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é invertibile si calcola il determinante della matrice stessa (é necessario che il determinante sia diverso da zero).

* Metodi di calcolo e definizione di determinante:

- definizione: é una funzione così definita, $\det : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

quindi $A \mapsto \det(A)$. $(\det : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

a) se $A = (a_{11})$, cioè $A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ si ha che $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$ (caso banale).

b) se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, A è invertibile $\iff a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$

infatti le colonne A^1, A^2 sono linearmente indipendenti $\iff$ la matrice ha 2 pivot cioè supposto $a_{11} \neq 0$ riducendo a scala (se $a_{21} \neq 0$) si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} a_{22} - a_{12} a_{22} \end{pmatrix}$$ da cui deve essere: $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{22} \neq 0$

se $a_{11} \neq 0$ e $a_{21} = 0$ la matrice è già ridotta a scala quindi deve essere $a_{22} \neq 0$ (caso particolare); se invece $a_{11} = a_{22} = 0 \Rightarrow$ le colonne sono linearmente dipendenti.

è naturale allora porre: $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

- Esempi:

1) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow A$ è invertibile.

2) Sia $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3/2 \end{pmatrix}$, $\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3/2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{3}{2} - (-1) \cdot (-3) = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow B$ non è invertibile; questo risultato lo si può verificare anche riducendo a scala la matrice ed osservando che esiste solo 1 pivot quindi le colonne B^1 e B^2 di B sono linearmente dipendenti.

Dagli esempi esposti sopra si può generalizzare il concetto di invertibilità di una matrice quadrata introducendo il seguente:

- Teorema (Corollario o conseguenza del Teorema di Binet): sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata $\Rightarrow A$ è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$.

- Metodi di calcolo di determinanti di matrici quadrate di ordine $n \geq 3$:

a) caso $n = 3$: si applica la cosiddetta regola di SARRUS qui di seguito illustrata;

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ a destra della matrice si scrivono, nell'ordine indicato, le prime due colonne della matrice stessa A poi si calcolano il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto di quelli delle due altre diagonali parallele e alla loro somma si sottraggono i prodotti degli elementi della diagonale secondaria e delle sue parallele.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

<u>Osservazione:</u> come si può notare il caso $n=2$ è un caso particolare di detta regola di calcolo; si deve tenere presente che detta regola è valida solo per i casi $n=2$ e $n=3$.

b) <u>caso $n \geq 4$:</u> si applica il cosiddetto sviluppo di Laplace lungo una riga oppure lungo una colonna (il metodo è valido in generale cioè $\forall\, n \in \mathbb{N}$).

Sia data una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Si dimostrano le seguenti formule:

1) <u>Sviluppo di Laplace del determinante lungo la riga i-esima con $1 \leq i \leq n$</u>

$$\det(A) = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot \det(A_{i2}) + \ldots + \\ + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \begin{cases} i \text{ fisso} \\ j \text{ variabile} \end{cases}$$

dove: $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ sono le entrate della matrice suddetta mentre $A_{i1}, \ldots, A_{in}$ sono le sottomatrici di ordine $(n-1) \times (n-1)$ ottenute dalla matrice di partenza A eliminando la riga e la colonna corrispondenti a ciascuna entrata della matrice che si sta considerando.

2) <u>Sviluppo di Laplace del determinante lungo la colonna j-esima con $1 \leq j \leq n$:</u>

$$\det(A) = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} \cdot a_{2j} \cdot \det(A_{2j}) + \ldots + \\ + (-1) \cdot a_{nj} \det(A_{nj}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \begin{cases} i \text{ variabile} \\ j \text{ fisso} \end{cases}$$

dove: i termini $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$ sono le entrate lungo la colonna j-esima della matrice suddetta mentre $A_{1j}, \ldots, A_{nj}$ sono le sottomatrici ottenute come nel caso 1).

<u>Osservazione:</u> la regola di SARRUS è un caso particolare dello sviluppo di Laplace; in generale tale metodo di calcolo è molto utile quando una matrice presenta molti termini nulli

- Esempi numerici :

1) Mediante lo sviluppo di Laplace del determinante calcolare $\det(A)$:

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12})$

(sviluppo lungo la 1ª riga)

cioè $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

2) Mediante lo sviluppo di Laplace dimostrare la regola di SARRUS :

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13})$

(sviluppo lungo la 1ª riga).

cioè
$$\det(A) = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11} \cdot (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

3) Mediante la regola di SARRUS calcolare il determinante della seguente matrice di 3° ordine:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 =$

$= -1 + 0 - 2 + 4 + 2 + 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile

4) Mediante lo sviluppo di Laplace calcolare il determinante della matrice seguente e stabilire poi se è invertibile.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2^a \text{ riga} \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2+j} \cdot a_{2j} \cdot \det(A_{2j})$$

cioè
$$\det(A) = (-1)^3 \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^6 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ora si può applicare la regola di SARRUS o proseguire con lo sviluppo di Laplace;

proseguendo con Laplace si ottiene :

$$\det(A) = (-1)^3 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 0 +$$

$$+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 - (2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 =$$

$$= 4 \cancel{-1} \cancel{+1} - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile.}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 3 & -1 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+3} \cdot a_{i3} \cdot \det(A_{i3})$$

$\rightarrow$ 3ª colonna

cioè $\det(A) = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^7 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + (-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0 + (-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \cancel{+2} \cancel{-2} + 2 - 1 = 1$ analogo risultato (come ovvio) dallo svolgimento di cui al punto a).

- Prime proprietà dei determinanti :

i) se la riga i-esima di A contiene elementi nulli (oppure una colonna j-esima) $\Rightarrow \det(A) = 0$ e quindi la matrice A non è invertibile quindi le righe di A (oppure le colonne) sono linearmente dipendenti.

ii) osservazione : in generale $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ in quanto det è una funzione non lineare; vediamo un esempio:

se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

quindi $\det(A+B) = 9$ mentre $\det(A) + \det(B) = 1 + 4 = 5$

quindi si ha in definitiva $9 \neq 5 \Rightarrow \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Rispetto al prodotto invece il determinante si comporta bene infatti vale il seguente:

- Teorema (di Binet): se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- Corollario 1: sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Dimostrazione:

se A è invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1}$ tale che $A \cdot A^{-1} = I$ (matrice identità)

ma per il teorema di Binet si ha che $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ mentre $\det(I) = 1$ (come si può verificare facilmente per induzione) $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ da cui la conclusione.

- Osservazione: con riferimento al corollario 1 se A non è invertibile $\Rightarrow \det(A) = 0$ infatti se A fosse invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{0}$ che non ha alcun significato.

- Proposizione: se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A^T) = \det(A)$

- SISTEMI LINEARI SOTTOSPAZI AFFINI:

- Teorema di Rouché-Capelli: sia $Ax = b$ un sistema lineare qualsiasi con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $A' = (A \mid b)$ la matrice completa del sistema ottenuta da A (la matrice incompleta relativa ai coefficienti delle incognite) aggiungendo a destra la colonna dei termini noti. Il sistema è compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A')$.

Dimostrazione: se il sistema ammette soluzione, ad esempio $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = b \Rightarrow b$ è combinazione lineare delle colonne di $A^1, A^2, \dots, A^n$ di A cioè $b \in Span(A^1, \dots, A^n)$

$\Leftrightarrow Span(A^1, \dots, A^n, b) = Span(A^1, \dots, A^n)$.

ricordando che $\dim(Span(A^1, \dots, A^n)) = rg(A)$

e che $\dim(Span(A^1, \dots, A^n, b)) = rg(A')$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A')$

- Osservazioni: 1) se $rg(A) = rg(A') = n$, dove "n" è il numero di incognite del sistema $\Rightarrow$ il sistema ha una ed una sola soluzione;

2) se il sistema lineare $Ax = b$ è ridotto a scala $\Rightarrow rg(A) = rg(A')$ $\Leftrightarrow$ non esiste il pivot in corrispondenza della colonna dei termini noti.

In precedenza si è visto che le soluzioni di un sistema lineare omogeneo $Ax = \vartheta$ formano un sottospazio vettoriale; si vedrà ora la struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare qualsiasi enunciando il seguente:

- Teorema di struttura (delle soluzioni di un sistema lineare): sia $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ una soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; ammesso quindi che il sistema ammette tale soluzione $\Rightarrow$ ogni altra soluzione di $Ax = b$ è della forma $v = \bar{v} + w$ dove $w \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato $Ax = \vartheta$. In altre parole l'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ è:

$$L = \bar{v} + W = \left\{ \bar{v} + w \,\middle|\, w \in W : \text{soluzioni di } Ax = \vartheta \right\}$$

- Esempio numerico: sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè $W = z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}(w)$

come si può osservare il sistema lineare omogeneo associato ha soluzioni $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ che è sottospazio vettoriale rappresentato da una retta passante per i punti ϑ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; la soluzione generale invece è una retta parallela non passante per l'origine ϑ.

- Definizione 1 (sottospazio affine): un sottospazio affine L di uno spazio vettoriale V, è un sottoinsieme $L \subseteq V$ della forma:

$$L = \bar{v} + W = \left\{ \bar{v} + w \,\middle|\, w \in W \right\}$$

dove $\bar{v} \in V$ e W è un sottospazio vettoriale di V; si dirà inoltre che L è parallelo a W e che W è il sottospazio di giacitura di L.

- Osservazione 1: L è sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$ $\bar{v} \in W$ in quanto $\bar{v} + W \in W \Leftrightarrow \bar{v} \in W$.

Con il termine "sottospazio affine" si indicano quei sottoinsiemi ottenuti da uno spazio o sottospazio vettoriale aggiungendo un vettore

- Esempi: in $\mathcal{A}^2$ (o $\mathbb{R}^2$) i sottospazi affini sono punti (se $W = \{\vartheta\}$), rette (anche non passanti per l'origine ϑ) e poi $\mathcal{A}^2$ stesso (caso banale); in $\mathcal{A}^3$ (o $\mathbb{R}^3$) i sottospazi affini sono $\mathcal{A}^3$ stesso (in modo banale), i punti, le rette ed i piani (anche non passanti per l'origine ϑ).