- Osservazione 2: i sottospazi vettoriali sono particolari sottospazi affini, infatti basta prendere $\bar{v} = \vartheta$.

- Definizione 2 (concetto di parallelismo): dati due sottospazi affini $L_1 = \bar{v}_1 + W_1$ ed $L_2 = \bar{v}_2 + W_2$ con $L_1, L_2 \subseteq V$ (cioè L_1 è il traslato di W_1 ed L_2 è il traslato di W_2) si dicono paralleli, e si scrive $L_1 /\!/ L_2$ se vale una delle due condizioni: $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$.

- Definizione 3 (dimensione di un sottospazio affine): la dimensione di un sottospazio affine L è data da: $\dim(L) = \dim(W)$, avendo posto $L = \bar{v} + W$. In particolare una retta affine di uno spazio vettoriale V è un sottospazio affine di V di dimensione 1; in modo analogo un piano affine ha dimensione 2 ecc.
- Osservazione 3: con riferimento alla def. 2 si ha che $\dim(L_1) = \dim(W_1)$ e $\dim(L_2) = \dim(W_2)$ ed essendo $\dim(L_1) = \dim(W_1) = 1$ e anche $\dim(L_2) = \dim(W_2) = 1 \Rightarrow L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow W_1 = W_2$.

- Osservazione 4: è stato detto che dato $L = \bar{v} + W$, W è il sottospazio vettoriale detto giacitura di L; W allora è parallelo ad L perché W stesso è un particolare sottospazio affine con ϑ (origine) $\in W$ (fig. 1).

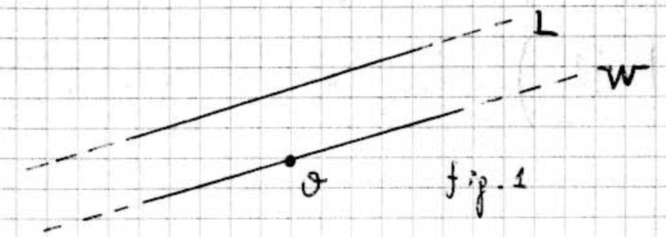


fig. 1

Sia W un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^n$; si è visto che è possibile definire W in vari modi:

1) ponendo $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r)$ con $w_1, \dots, w_r \in V$;
2) ponendo $W = \mathrm{Im}(T)$ dove $T: V' \to V$ lineare (se all'applicazione lineare T si associa la matrice $A \Rightarrow$ i punti 1) e 2) sono equivalenti);
3) ponendo $W = \mathrm{Ker}(T')$ dove $T': V \to V''$ lineare;
4) ponendo $W = \{$soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = \vartheta\}$ cioè $W = \mathrm{Ker}(L_A)$ (se al punto 3) a T' si associa la matrice A i punti 3) e 4) sono equivalenti)

Da quanto appena detto vediamo alcune applicazioni relative ad alcuni problemi:

① Sia $W = \mathrm{Ker}(L_A)$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cioè $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si voglia determinare la matrice A' tale che $W = \mathrm{Im}(L_{A'})$.
Per risolvere tale problema si procede come segue: a partire da $\mathrm{Ker}(L_A)$ si trovano

le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $Ax = \vartheta$ in funzione delle variabili libere che sono r (pivot) $- rg(A)$; i coefficienti delle variabili libere formano una base di $W \Rightarrow W = Span$ (base ottenuta).

- Esempio 1: sia $A = (1 \ 0 \ -1) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

il sistema lineare omogeneo associato $Ax = \vartheta$ può essere scritto come segue: $x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$ quindi le soluzioni sono nella forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ cioè}$$

$$W = Ker(L_A) = Span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = Im(L_{A'}) \text{ con } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sia ora $W = Im(L_A) = Span(w_1 \dots w_r)$; si voglia determinare la matrice A' tale che $W = Ker(L_{A'})$ cioè sia l'insieme delle soluzioni di $A'x = \vartheta$. Per risolvere il quesito si procede nel modo seguente: si forma la matrice completa $\in M_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A^1 & A^2 & A^3 & \dots & A^r & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \end{array}\right) \quad \text{dove } A^1 = w_1, A^2 = w_2, \dots, A^r = w_r$$

e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ quindi è la matrice che ha per colonne i vettori $w_1, \dots, w_r$ e come colonna dei termini noti le incognite $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in Span(A^1, \dots, A^r)\right)$

poi si riduce a scala ottenendo r - pivot nella matrice incompleta dei coefficienti (se $w_1, \dots, w_r$ sono linearmente indipendenti, cioè formano una base); il sistema ottenuto è compatibile (per il teorema di Rouché - Capelli) $\Leftrightarrow$ le ultime $m-r$ righe nulle della matrice incompleta hanno termini noti nulli e queste ultime sono le equazioni del sistema cercato cui sarà associata la matrice A'.

- Esempio 2: in $V = \mathbb{R}^4$ sia $W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

cioè $W = Im(L_A)$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ si determini A' tale che

$W = Ker(L_{A'})$.

Si aggiunge ad A, nella colonna dei termini noti, le incognite cioè:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riduzione a scala della matrice ottenuta}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3+x_1 \\ 0 & -2 & x_4-x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3+R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3+x_1-x_2 \\ 0 & 0 & x_4-x_1+2x_2 \end{array}\right) R_4'+2R_2'$$

per il t. di Rouché - Capelli il sistema ammette soluzione $\Leftrightarrow$

$$x_1+x_3-x_2=0$$
$$-x_1+2x_2+x_4=0$$

cioè W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2+x_4 \end{cases} \Rightarrow W=\ker(L_{A'}) \text{ con } A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• PRODOTTI SCALARI IN $\mathbb{R}^n$, BASI ORTOGONALI E ORTONORMALI, APPLICAZIONI LINEARI ASSOCIATE:

- <u>Definizione 1 (prodotto scalare canonico):</u> $\forall\, v=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ si definisce prodotto scalare dei due vettori v e w e si scrive $\langle v,w\rangle$ la funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ data da:

$$\langle v,w\rangle = v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+\ldots+v_n\cdot w_n \in \mathbb{R};$$

ricordando la definizione di prodotto righe per colonne (delle matrici) allora si può anche scrivere:

$$\langle v,w\rangle = v^T\cdot w \in M_{1,1}(\mathbb{R}) \text{ dove } v^T \text{ è la trasposta di } v.$$

- <u>Definizione 2 (Norma di un vettore):</u> la norma (o modulo o lunghezza) di un vettore $v\in\mathbb{R}^n$ è una funzione $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ (reali positivi) così definita:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2},\ (\forall v\in\mathbb{R}^n)$$

- <u>Osservazione 1:</u> non confondere il prodotto scalare appena introdotto con il prodotto di un vettore per scalari!
Il prodotto scalare si comporta bene rispetto le operazioni + e ·, in quanto è possibile dimostrare che è funzione lineare, per cui valgono le seguenti:

- <u>Proprietà del prodotto scalare:</u> $\forall\, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che:

i) $< v_1 + v_2 , v_3 > = < v_1 , v_3 > + < v_2 , v_3 >$;

ii) $< v_1 , v_2 > = < v_2 , v_1 >$ (proprietà commutativa) ;

iii) $< v_1 , v_2 + v_3 > = < v_1 , v_2 > + < v_1 , v_3 >$;

iv) $< \alpha v_1 , v_2 > = < v_1 , \alpha v_2 > = \alpha \cdot < v_1 , v_2 >$;

v) $< v , v > \geq 0 , \forall\, v \in \mathbb{R}^n$ in particolare $< v , v > = 0 \iff v = \vartheta$

inoltre si ha che $< v , w > = 0 , \forall\, w \in \mathbb{R}^n \iff v = \vartheta$ cioè vale

$< \vartheta , v > = < v , \vartheta > = 0$.

- <u>Proprietà della norma:</u>

i) $\| v \| = 0 \iff v = \vartheta$ (vettore nullo) ;

ii) $\| v \| > 0 , \forall\, v \neq \vartheta$;

iii) $\| \lambda v \| = |\lambda| \cdot \| v \| , \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$;

iv) $\| v_1 + v_2 \| \leq \| v_1 \| + \| v_2 \| , \forall\, v_1 , v_2 \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza Triangolare).

Dato il prodotto scalare introdotto ora è possibile stabilire quando due vettori v e w sono fra loro ortogonali quindi si dà la seguente:

- <u>Definizione 3 (condizione di ortogonalità):</u> due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali e si scrive $v \perp w$ se risulta $< v , w > = 0$.

- <u>Esempi di applicazione:</u>

1) in $\mathbb{R}^2$ sono dati due vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$ stabilire se sono o no ortogonali ;

$$< v , w > = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-2) = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow v \not\perp w$.

2) in $\mathbb{R}^2$ siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ stabilire se $v_1 \perp v_2$;

$$< v_1 , v_2 > = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2 .$$

3) in $\mathbb{R}^3$ siano $v = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che $v \perp w$.

$v \perp w \iff < v , w > = 0$ cioè $< v , w > = 2 \cdot \pi + \pi \cdot (-1) + (-1) \cdot k = 0$ $\iff \pi - k = 0 \iff k = \pi$ riassumendo: $v \perp w \iff k = \pi$.

- Definizione 4 (sottospazio ortogonale): sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, si definisce l'ortogonale di V e si indica con $V^\perp$ l'insieme:

$$V^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; v \perp w, \; \forall w \in V \right\}$$

un'altra definizione equivalente è la seguente:

$$V^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle v, w \rangle = 0, \; \forall w \in V \right\}$$

- Osservazione:
1) si può facilmente verificare che $V^\perp$ così definito è sottospazio vettoriale;
2) sia $B = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base di V allora $w \in V^\perp$ $\Leftrightarrow$ $w \perp v_1 \wedge w \perp v_2 \wedge \dots \wedge w \perp v_r$

- Proprietà dell'ortogonale:

i) $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(V^\perp) = n - \dim(V)$
$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists! \; w \in V$ e $\overline{w} \in V^\perp$ tali che $v = w + \overline{w}$

ii) se $V = \mathrm{Im}(L_A) \Rightarrow V^\perp = \mathrm{Ker}(L_{A^T})$ dove A^T è la trasposta di A;
iii) se $V = \mathrm{Ker}(L_A) \Rightarrow V^\perp = \mathrm{Im}(L_{A^T})$

- Esempio: in $\mathbb{R}^3$ sia $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_2 \right)$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in W^\perp \Leftrightarrow v \perp w_1 \wedge v \perp w_2 \text{ cioè se risulta:}$$

$\langle v, w_1 \rangle = \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \wedge \langle v, w_2 \rangle = \alpha_2 = 0$ cioè in termini di sistema si ha che:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il sistema risolto ha matrice associata $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che è proprio la trasposta di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $A' = A^T$. (vedi prop. ii) dell'ortogonale).

- Definizione 5 (spazio vettoriale metrico): uno spazio vettoriale metrico è uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle \geq 0$; la norma $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}^+$ è definita da $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

- Definizione 6 (base ortogonale): una base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ di un sottospazio vettoriale (anche metrico) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice che è ortogonale se è composta da vettori a due a due ortogonali, ovvero tali che $< w_i, w_j > = 0$ per $i \neq j$.

- Esempio: la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ (come si può facilmente verificare) rispetto al prodotto scalare.

- Definizione 7 (base ortonormale): una base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ di un sottospazio vettoriale (anche metrico) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice che è ortonormale se è una base ortogonale e se $\| w_i \| = 1$ per $i = 1, \dots, n$ cioè se i vettori che la compongono hanno lunghezza (o norma) unitaria.

In altri termini una base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ di W è ortonormale se e solo se risulta:

$$< w_i, w_j > = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- Esempio: la base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare.

- METODO DI DETERMINAZIONE DI BASI ORTONORMALI DI UNO SPAZIO VETTORIALE:

Un metodo di determinazione di basi ortonormali si basa su due passi:

1° Passo: da una base qualsiasi di uno spazio vettoriale si ottiene una base ortogonale;

2° Passo: da una base ortogonale (ottenuta al 1° passo) si determina una base ortonormale.

Vediamo in dettaglio i due passi:

- 1° Passo: sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di $W \subseteq \mathbb{R}^n$ posto $w_1 = v_1$ come primo vettore della base ortogonale, il secondo vettore si ottiene nel modo seguente:

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1$$

passando al terzo vettore si ha che:

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2$$

in generale si può scrivere:

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{< v_i, w_j >}{< w_j, w_j >} \cdot w_j \;, \quad \forall i = 2, \dots, n$$

Il procedimento appena descritto viene detto procedimento di ortogonalizzazione di Gram – Schmidt.

Osservazione: a) se la base è composta da un solo vettore $\Rightarrow$ non occorre eseguire il 1° passo $\Rightarrow$ si procede al passo 2° cioè alla normalizzazione;

b) verifichiamo a scopo di calcolo che il vettore w_2 ottenuto con il procedimento illustrato nel 1° passo sia effettivamente ortogonale a w_1:

$$w_2 \perp w_1 \iff \langle w_2, w_1 \rangle = 0 \quad \text{ma si ha che:}$$

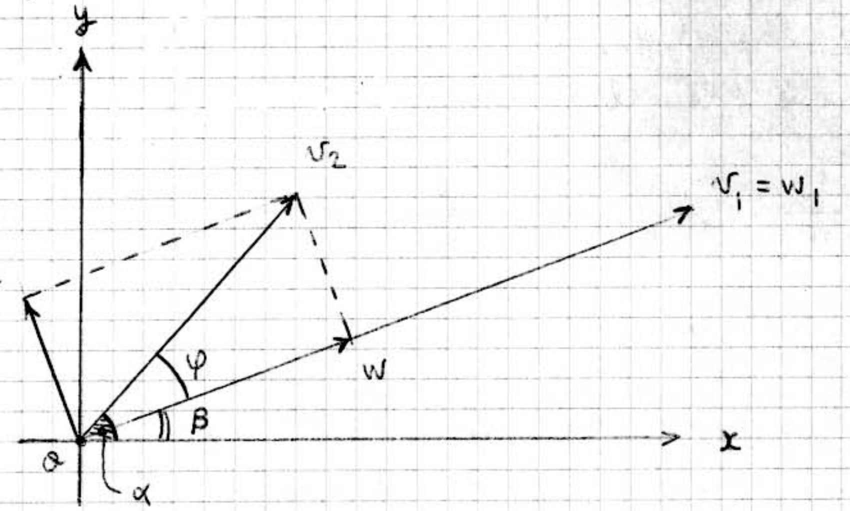
$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot w_1 , \, w_1 \right\rangle =$$

$$= \langle v_2, w_1 \rangle + \left\langle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 , \, w_1 \right\rangle =$$

$$\overset{(*)}{=} \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\cancel{\langle w_1, w_1\rangle}} \cdot \cancel{\langle w_1, w_1 \rangle} = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

(*) il termine $\dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$ è uno scalare cioè $\in \mathbb{R}$ e quindi per la linearità di $\langle \cdot , \cdot \rangle$ si può portare fuori dal prodotto e mantenerlo come coefficiente reale.

(**) Vediamo poi di seguito una rappresentazione grafica dell'operazione effettuata (siamo nel piano $\mathbb{R}^2$):



$v_2 = w_2 + w$ dove $w = \lambda \cdot \dfrac{1}{\|w_1\|} w_1$ (multiplo di $\dfrac{w_1}{\|w_1\|}$ che è versore di w_1)

$\Rightarrow w_2 = v_2 - w = v_2 - \lambda \cdot \dfrac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1$ con λ da determinare;

dalla trigonometria si ha che: $\cos\alpha = \dfrac{x_2}{\|v_2\|}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y_2}{\|v_2\|}$,

$\cos\beta = \dfrac{x_1}{\|v_1\|}$, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{y_1}{\|v_1\|}$;

il vettore w è dato dalla proiezione di v_2 su w_1 cioè:

$$w = \|v_2\| \cdot \cos\varphi \cdot \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

essendo $\cos\varphi = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta =$

$$= \frac{x_2}{\|v_2\|} \cdot \frac{x_1}{\|w_1\|} + \frac{y_2}{\|v_2\|} \cdot \frac{y_1}{\|w_1\|} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|w_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\| \, \|v_2\|}$$

sostituendo l'espressione ottenuta si ottiene in definitiva:

$$w = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

quindi il vettore w_2 è dato da:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 \quad \text{dove } \lambda = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|} \text{ è il valore cercato.}$$

- 2° Passo: sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortogonale di $W \subseteq \mathbb{R}^n$ (ottenuta secondo quanto detto al 1° passo) si definisce:

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1, \quad u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2, \quad \dots, \quad u_n = \frac{1}{\|w_n\|} \cdot w_n$$

dove $\|w_1\|, \|w_2\|, \dots, \|w_n\|$ sono le norme dei vettori dati;

i vettori $u_1, u_2, \dots, u_n$ così ottenuti vengono detti versori e sono sempre definiti in quanto se $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono vettori che costituiscono una base di W $\Rightarrow$ non possono essere nulli, di conseguenza anche le loro norme non possono essere valori nulli (si ricordi che $\|w_i\| = 0$ $\Leftrightarrow w_i = \vartheta$).

Vediamo ora a titolo di esercizio che i versori così ottenuti soddisfano la proprietà $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ con $i = 1, \dots, n$; infatti si può scrivere:

$$\langle u_i, u_i \rangle = \left\langle \frac{w_i}{\|w_i\|}, \frac{w_i}{\|w_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|w_i\|} \cdot \frac{1}{\|w_i\|} \cdot \langle w_i, w_i \rangle$$

i termini $\frac{1}{\|w_i\|}$ in quanto scalari si possono portare fuori dal prodotto scalare;

in definitiva si ottiene: $< u_i , u_i > = \frac{1}{\|w_i\|^2} \cdot < w_i , w_i > =$

$= \frac{1}{(\sqrt{< w_i , w_i >})^2} \cdot < w_i , w_i > = \frac{1}{\cancel{< w_i , w_i >}} \cdot \cancel{< w_i , w_i >} = 1$ c.v.d.

In generale il prodotto scalare di due versori è dato da:

$$< u_i , u_j > = \frac{1}{\|u_i\|} \cdot \frac{1}{\|u_j\|} \cdot < u_i , u_j >$$ tenendo appunto presente

che $< \cdot , \cdot >$ è lineare e le inverse (o reciproche) delle norme sono dei numeri reali i quali si possono trasportare fuori dal prodotto scalare stesso.

- Esempio 1:

sia $W = \text{Span}\left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$

Verificare che $B = \{ w_1 , w_2 , w_3 \}$ è una base ortogonale di W e determinare una base ortonormale di W.

I vettori w_1, w_2 e w_3 sono linearmente indipendenti infatti dalla riduzione a scala della matrice associata si ottengono 3 pivot;

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&-2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ R_3-R_1\\ R_4-R_1\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ R_3'-R_2'\\ R_4'+R_2'\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

I vettori w_1, w_2 e w_3 sono fra loro ortogonali infatti risulta:

$$< w_1 , w_2 > = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 + 0 + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 \Rightarrow w_1 \perp w_2 .$$

$$< w_1 , w_3 > = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \cancel{1} + 0 - \cancel{1} + 0 = 0 \Rightarrow w_1 \perp w_3 .$$

$$< w_2 , w_3 > = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 + \cancel{1} - \cancel{1} + 0 = 0 \Rightarrow w_2 \perp w_3 .$$

$$\|w_1\| = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1 + 0 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}} = \sqrt{0+1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+1+0} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\|w_1\|}\cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|}\cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|w_3\|}\cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \quad B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base ortonormale di W.

- Esempio 2: sia $V = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$, con v_1, v_2, v_3 i tre vettori;

determinare una base ortonormale di V.

Occorre verificare innanzitutto che i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti cioè:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3-R_1\\R_4-R_1\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} R_4'-R_2'$$

$\Rightarrow v_1$, v_2 e v_3 sono lin. indipendenti.

Ora si verifica se i vettori sono fra loro perpendicolari (cioè ortogonali):

$v_1 \perp v_2 \iff \langle v_1, v_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 1-1+1-1 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

$v_1 \perp v_3 \iff \langle v_1, v_3\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_3\rangle = 0+1+1+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow v_1 \not\perp v_3$

$v_2 \perp v_3 \iff \langle v_2, v_3\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, v_3\rangle = 0-1+1-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow v_2 \not\perp v_3$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt al vettore v_3 si ottiene:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\, w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}\, w_2$$ dove $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_2$;

$$\Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3/4\\-3/4\\-3/4\\-3/4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/4\\-1/4\\1/4\\-1/4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ una base ortogonale di V è $B = \{w_1, w_2, w_3\}$

cioè $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix} \right\}$ in questa fase è bene ricontrollare i calcoli verificando se effettivamente $w_1 \perp w_2 \wedge w_1 \perp w_3 \wedge w_2 \perp w_3$.

Per determinare ora una base ortonormale partendo dalla base ortogonale si procede come segue:

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|}\cdot w_1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|w_3\|}\cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|}\cdot w_2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B' = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di V.

Con riferimento a questo esempio si pone ora il seguente quesito: come si può completare una base ortonormale B' di V ad una base ortonormale B'' di $\mathbb{R}^4$?

In altri termini $B'' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_4 determinato in modo che $u_4 \perp u_1$, $u_4 \perp u_2$, $u_4 \perp u_3$ cioè $u_4 \in V^{\perp}$.

Si può procedere in due modi distinti:

a) si completa la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ ad una base C di $\mathbb{R}^4$ e si eseguono i procedimenti appena illustrati per la ortonormalizzazione.

b) un metodo meno impegnativo e più efficace è basato sul calcolo matriciale; essendo $V = \mathrm{Im}(L_A)$ dove A è la matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$ avendo ridotto a scala A si ha che $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 3$

$\Rightarrow \dim(V^{\perp}) = 1$ in quanto $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow U^{\perp} = \ker(L_{A^T})$ dove A^T è la trasposta di A cioè:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ quindi si risolve il sistema lineare omogeneo $A^T x = 0$;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) R_2 - R_1$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3 + 2R_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U^{\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ quindi $\left\{ w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U^{\perp}$

w_4 risulta essere ortogonale in quanto la base è formata dal solo vettore w_4; una base ortonormale di $U^{\perp}$ è data da $\{u_4\}$ dove:

$$u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che completa B'' è data da:

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$$

- Teorema (di completamento): sia $B = \{w_1, \dots, w_r\}$ una base ortogonale (od ortonormale) di $W \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow B' = \{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale (od ortonormale) di $\mathbb{R}^n$ che completa $B \Leftrightarrow \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale (od ortonormale) di $W^{\perp}$ cioè:

$$B' = \{ \underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{base di } W}, \underbrace{v_{r+1}, \dots v_n}_{\text{base di } W^{\perp}} \}$$

• PROIEZIONI ORTOGONALI:

- Definizione 1 (proiezione ortogonale): sia $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base ortonormale di $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce proiezione ortogonale su U, l'applicazione $P_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così data:

$$P_U(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_r \rangle u_r \in U$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$;

$P_U(v)$ è la funzione applicata ad un generico vettore v e corrisponde ad una combinazione lineare particolare, quella definita sopra.

Risulta evidente che:

i) $\forall v \in U^\perp$, $P_U(v) = 0$ infatti si ha che $\langle v, u_i \rangle_{i=1,\dots,n} = 0$ in quanto $v \perp u_i$.

ii) $\forall u \in U \quad P_U(u) = u \Rightarrow Im(P_U) = U$ infatti:

se $\{u_1, \dots, u_r\}$ è una base di $U \Rightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r$

ricordando che è anche una base ortonormale si ha che

$$\begin{aligned}
P_U(u) &= \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r, u_1 \rangle u_1 + \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r \rangle u_2 + \dots + \\
&+ \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r \rangle u_r = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle u_1 + \alpha_2 \cancelto{0}{\langle u_2, u_1 \rangle} u_1 + \\
&+ \dots + \alpha_r \cancelto{0}{\langle u_r, u_1 \rangle} + \alpha_1 \cancelto{0}{\langle u_1, u_2 \rangle} u_2 + \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle u_2 + \dots + \alpha_r \cancelto{0}{\langle u_r, u_2 \rangle} u_2 + \\
&+ \dots + \alpha_1 \cancelto{0}{\langle u_1, u_r \rangle} u_r + \alpha_2 \cancelto{0}{\langle u_2, u_r \rangle} u_r + \dots + \alpha_r \langle u_r, u_r \rangle u_r = \\
&= \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle u_1 + \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle u_2 + \dots + \alpha_r \langle u_r, u_r \rangle u_r = \\
&= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r = u. \quad \text{c.v.d.}
\end{aligned}$$

iii) in generale $\forall u \in U$, nell'ipotesi che $\{u_1, \dots, u_r\}$ sia base ortogonale di U

$\Rightarrow \quad u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_r \rangle u_r.$

iv) $\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad v = P_U(v) + \big(v - P_U(v)\big)$

dove $P_U(v) \in U$ e $\big(v - P_U(v)\big) \in U^\perp$; è possibile verificare che $\big(v - P_U(v)\big)$ è ortogonale.

- Esempio numerico di applicazione: sia $U = \text{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{u_4} \right)$

calcolare $P_U(e_1), P_U(e_2), P_U(e_3), P_U(e_4)$;

determinare inoltre la matrice A associata all'applicazione L_A tale che $P_U = L_A \quad (A \in M_{4,4}(\mathbb{R}))$.

$$P_U(e_1) = \langle e_1, u_1\rangle u_1 + \langle e_1, u_2\rangle u_2 + \langle e_1, u_3\rangle u_3 + \langle e_1, u_4\rangle u_4 =$$

$$= \tfrac{1}{2} u_1 + \tfrac{1}{2} u_2 + (-\sqrt{2}/2)\, u_3 + 0 \cdot u_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 .$$

$$P_U(e_2) = \langle e_2, u_1\rangle u_1 + \langle e_2, u_2\rangle u_2 + \langle e_2, u_3\rangle u_3 + \langle e_2, u_4\rangle u_4 =$$

$$= \tfrac{1}{2} u_1 + (-\tfrac{1}{2}) u_2 + 0 \cdot u_3 + (-\sqrt{2}/2)\, u_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 .$$

$P_U(e_3) = e_3$, $P_U(e_4) = e_4$ (per esercizio);

Verifichiamo che $P_U = L_A$ con $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{pmatrix}$

dove $A^1 = P_U(e_1)$, $A^2 = P_U(e_2)$, $A^3 = P_U(e_3)$ e $A^4 = P_U(e_4)$;

Sia B la matrice che ha come colonne i vettori u_1, u_2, u_3, u_4 che formano la base di U $\Rightarrow A = B \cdot B^T$ cioè:

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$A = B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1/4+1/4+1/2+0 & 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4-1/2+0 & 0+0+0+0 \\ 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4+0+1/2 & 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4+0-1/2 \\ 1/4+1/4-1/2+0 & 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4+1/2+0 & 1/4-1/4+0+0 \\ 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4+0-1/2 & 1/4-1/4+0+0 & 1/4+1/4+0+1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si osserva che A è simmetrica per cui $A^T = A$.

- EQUAZIONI DI RETTE E PIANI NELLO SPAZIO :

In precedenza si è visto che vi sono due modi per definire le rette e i piani: attraverso le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane.

In A^3 (nello spazio) si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dove $O \in A^3$ (origine), $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale di V_0^3 cioè $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ e $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Data l'equazione lineare della forma: $ax + by + cz = d$ (*)

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ed a, b, c non tutti nulli $\Rightarrow$ la matrice associata $(a \; b \; c \mid d)$ ha rango 1 quindi per il t. di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞^2 soluzioni che formano un sottospazio vettoriale affine di dimensione 2 che rappresenta un piano. Allora si dice che la (*) è l'equazione cartesiana del piano. L'equazione cartesiana di un piano non è univocamente determinata infatti si deve osservare che:

$$\lambda(ax + by + cz) = \lambda d \Rightarrow (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = \lambda d \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

identifica lo stesso piano.

- Esempi:

1) Sia π un piano così definito; $\pi: x + 2z = 1$ determinare le equazioni parametriche di π.

La matrice associata al sistema lineare è $(\underline{1} \; 0 \; 2 \mid 1)$ che ha $rg(A) = 1$ in quanto il pivot è $1 \Rightarrow y$ e z sono le variabili libere per cui si ha che:

$$x = 1 - 2z \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

posto $t = y$ ed $s = z$ si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

dove $y = t$ e $z = s \in \mathbb{R}$ è evidente che si è ottenuta l'applicazione

$$(t, s) \mapsto \begin{pmatrix} 1-2s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

se $t = s = 0$ si ottiene il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$

se $t = 1$ e $s = 0$ si ha $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$

se $t = 0$ e $s = 1$ si ottiene $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi$

si verifica subito che $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono allineati infatti

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é già ridotta a scala ed ha rango = 3.

Si ricorda che un piano é univocamente determinato per 3 punti non allineati.

2) Si determini l'equazione cartesiana di un piano α passante per il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallelo alle rette r_1 ed r_2 di equazioni parametriche:

$$r_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 - t_2 \\ y = t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$$

i vettori direttori delle due rette date sono: $v_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

e $v_{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ quindi $r_1 \parallel v_{r_1}$ ed $r_2 \parallel v_{r_2}$

$$\Rightarrow \alpha : \begin{cases} x = 2 + t_1 - t_2 \\ y = -1 + t_1 + t_2 \\ z = 1 - t_1 + t_2 \end{cases} = \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = 1 - t + s \end{cases}$$ avendo posto $t_1 = t$ e $t_2 = s$.

l'eq. parametrica di α così ottenuta é stata ricavata osservando che l'eq. vettoriale di α é:

$$\alpha : \quad \vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{v}_{r_1} + s \cdot \vec{v}_{r_2}$$

Si può inoltre verificare che v_{r_1} e v_{r_2} sono linearmente indipendenti infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \end{matrix}$$

Per passare dalle eq. parametriche di α a quelle cartesiane si devono eliminare di volta in volta i parametri t ed s come segue:

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ y + z = 2s \\ z = 1 - t + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x+y-1}{2} \\ s = \dfrac{y+z}{2} \\ z = 1 - \dfrac{x+y-1}{2} + \dfrac{y+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z = 2 - x - \cancel{y} + 1 + \cancel{y} + z \Leftrightarrow z + x = 3$$

$\Rightarrow \alpha : \ x + z = 3 \ (**)$ la $(**)$ é l'eq. cartesiana cercata.

si osserva che l'eq. cartesiana di α sono ∞^1 infatti anche l'eq.:

$$2x + 2z = 6 \text{ è un'eq. di } \alpha \quad (\text{si noti che } \lambda = 2).$$

quindi l'eq. cartesiana di α è univocamente determinata a meno di moltiplicazioni per uno scalare.

Vediamo qui di seguito un'altro modo per determinare l'equazione cartesiana di α; dall'eq. parametrica di α si ricava che:

$$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t, s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$ che è la giacitura di α; un piano β è parallelo ad α se ha la stessa giacitura per cui si ricava l'equazione cartesiana di β nel modo seguente:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right)}_{\text{vettori di giacitura}} \xrightarrow{\text{rid. a scala}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & x+z \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

per il t. di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione $\iff x + z = 0$

quindi $\beta: \; x + z = 0$.

Si ricorda che due piani α ed α' dati da:

$$\alpha: \; ax + by + cz = d$$
$$\alpha': \; a'x + b'y + c'z = d'$$

con a, b, c e a', b', c' non tutti nulli,

sono paralleli cioè $\alpha // \alpha' \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ infatti

due piani sono paralleli se e solo se sono lo stesso piano oppure non hanno punti in comune ($\alpha \cap \alpha' = \phi$) e questo si traduce nelle due condizioni:

1) $\alpha \cap \alpha' = \phi \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \neq rg\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right)$

se $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) \Rightarrow$ vi sono ∞^2 soluzioni

2) $\alpha \equiv \alpha' \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) = 1$

se invece $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ si hanno ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ i piani α e α' sono incidenti in quanto $\alpha \cap \alpha'$ è una retta di soluzioni.

Quindi se $\alpha : ax+by+cz=d$ un piano $\alpha' \parallel \alpha$ e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana che si ottiene dall'uguaglianza:

$$ax+by+cz = ax_0+by_0+cz_0$$

ovvero $\quad \alpha' : \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$

con riferimento all'esempio precedente $\Rightarrow$ se $\alpha \parallel \beta$ e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora avrà eq. cartesiana data da:

$$\alpha : \quad (x-2)+(z-1)=0 \iff x-2+z-1=0 \iff x+z=3$$

che è l'eq. cercata.

- Equazione cartesiana di una retta nello spazio:

in precedenza si è visto che due piani $\alpha : ax+by+cz=d$ e $\alpha' : a'x+b'y+c'z=d'$ sono incidenti $\iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

e le soluzioni sono ∞^1 cioè una retta di soluzioni; allora il sistema

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

in detta ipotesi rappresenta le equazioni cartesiane della retta $r = \alpha \cap \alpha'$.

- Esempio:

$$r: \begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)=2$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=3-z \\ y=1+2z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-z \\ 1+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

posto $z=t$ si ottiene $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_r = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

e $v_r \parallel r$;

l'equazione parametrica della retta è allora: $\quad r: \begin{cases} x=3-t \\ y=1+2t \\ z=t. \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

In modo analogo a quanto visto per il piano per determinare o ricavare le equazioni cartesiane di una retta r data in forma di eq. parametriche, si cerca di eliminare il parametro $t \in \mathbb{R}$.

- Esempio: sia r la retta così definita:

$$r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\cdot(-1-z) \\ y=2 \\ t=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2z \\ y=2 \\ t=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

sono le eq. cartesiane di r.

- Posizione relativa fra una retta e un piano:

Si consideri una retta r di equazioni cartesiane:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

e un piano α di equazione cartesiana: $\alpha: a''x+b''y+c''z=d''$

La retta r è definita $\iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$ mentre per il piano α deve essere necessariamente $rg\,(a''\ b''\ c'')=1$;

siano allora $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ e $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$ rispettivamente

la matrice incompleta e completa del sistema lineare associato formato dalle equazioni di r ed α; il $rg(A)=\{2,3\}$ e il $rg(A')=\{2,3\}$ dove 2 è il valore minimo mentre 3 è il massimo.

Vediamo di analizzare i vari casi:

a) se $rg(A)=2$ e $rg(A')=2 \Rightarrow rg(A)=rg(A')$ allora $r\subset\alpha$;

b) se $rg(A)=2$ e $rg(A')=3 \Rightarrow r\cap\alpha=\phi$ (insieme vuoto);

c) se $rg(A)=3$ e $rg(A')=3 \Rightarrow r\cap\alpha=P$ (punto), r ed α sono incidenti.

$r\,/\!/\,\alpha \iff r\subset\alpha$ oppure $r\cap\alpha=\phi$ (casi a) e b)) quindi si può concludere che $r\,/\!/\,\alpha \iff rg(A)=2$ infatti si afferma che i due sottospazi affini che formano r ed α hanno la medesima dimensione e quindi la stessa giacitura.

Per quanto visto nel punto a) il piano α contiene la retta $r \iff rg(A)=rg(A')$ cioè se:

$$rg\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)=2 \iff \exists\,\lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ non entrambi nulli tali che:}$$

$$\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$ dunque tutti i piani che contengono r hanno eq. cartesiana:

$$\lambda(ax+by+cz)+\mu(a'x+b'y+c'z)=\lambda d+\mu d'$$ cioè sono combinazione lineare delle due equazioni che definiscono r.

- **Esempio 1**: determinare il piano π contenente la retta r di equazioni:

$$r: \begin{cases} x+2z=1 \\ y=2 \end{cases}$$ e passante per il punto $P_0=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

si verifica in modo immediato che $P_0 \notin r$ infatti si ha che:

$$\begin{cases} -1 + 2 \cdot 2 = 1 \\ -1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 1 \quad (\text{impossibile}); \\ -1 = 2 \quad (\text{impossibile}). \end{cases}$$

quindi cerchiamo l'equazione generale del piano contenente r:

$$\lambda \cdot (x + 2z) + \mu (y) = \lambda + \mu \cdot (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y + 2\lambda z = \lambda + 2\mu \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\exists\ \infty^1$ piani che contengono r (non ∞^2!) per cui occorre determinare quello passante per P_0; per fare ciò impongo il passaggio per $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\lambda \cdot (-1) + \mu \cdot (-1) + 2\lambda \cdot (2) = \lambda + 2\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda - \mu + 4\lambda = \lambda + 2\mu \Leftrightarrow 2\lambda = 3\mu \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\mu$$

posto $\mu = 2 \Rightarrow \lambda = 3$ per cui sostituendo si ottiene:

$\pi: \quad 3x + 2y + 6z = 7$ che è l'eq. cartesiana di π cercata;

<u>verifica:</u>

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi \quad \text{infatti} \quad -3 - 2 + 12 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \quad \text{ok!}$$

$$rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right) \to rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)_{R_3 - 3R_1} \to rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{R_3' - 2R_2'}$$

$$\Rightarrow rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right) = 2 \quad \text{ok!}$$

- <u>Esempio 2:</u> determinare l'eq. cartesiana del piano α passante per i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{t=0} \quad e \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{t=1}$$

dove P_0 è il punto dell'esercizio precedente mentre P_1 e P_2 sono stati ottenuti dall'equazione parametrica della retta r:

$$r: \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{posto } t = z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{rispettivamente per } t = 0 \text{ e } t = 1.$$