l'eq. cartesiana generale di α è: $ax + by + cz = d$

con a, b, c e d da determinarsi; per fare così impongo il passaggio di α per P_0, P_1 e P_2 nel modo seguente:

$$\begin{cases} a\cdot(-1) + b\cdot(-1) + c\cdot(2) = d & (\alpha \supset P_0) \\ a\cdot(1) + b\,(2) + c\cdot(0) = d & (\alpha \supset P_1) \\ a\cdot(-1) + b\,(2) + c\cdot(1) = d & (\alpha \supset P_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - b + 2c - d = 0 \\ a + 2b - d = 0 \\ -a + 2b + c - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3/7\, d \\ b = 2/7\, d \\ c = 6/7\, d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{7} d\,x + \frac{2}{7} d\,y + \frac{6}{7} d\,z = d \Rightarrow d\cdot(3x + 2y + 6z) = 7d$$

$\Rightarrow$ un'eq. di α è $3x + 2y + 6z = 7$ $\quad (d = 1)$.

- Posizione relativa fra due rette:

Siano r_1 ed r_2 due rette di equazioni cartesiane:

$$r_1: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_1' x + b_1' y + c_1' z = d_1' \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_2' x + b_2' y + c_2' z = d_2' \end{cases}$$

Le rette r_1 ed r_2 sono definite $\iff$ $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \end{pmatrix} = 2$ e $rg\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix} = 2$;

Siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix}$ e $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{array}\right)$ rispettivamente le matrice incompleta e completa del sistema lineare associato alle equazioni di r_1 ed r_2; il $rg(A) = \{2, 3\}$ dove 2 è il minimo, 3 è il massimo, il $rg(A') = \{2, 3, 4\}$ dove 2 è il minimo e 4 il massimo. Vediamo di analizzare i vari casi:

a) se $rg(A) = 2$ e $rg(A') = 2$ $\Rightarrow$ $r_1 = r_2$ cioè r_1 ed r_2 sono coincidenti;

b) se $rg(A) = 2$ e $rg(A') = 3$ $\Rightarrow$ $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e risulta $r_1 \parallel r_2$
$\Rightarrow \exists$ un piano α tale che $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \alpha$;

c) se $rg(A) = 3$ e $rg(A') = 3$ $\Rightarrow$ $r_1 \cap r_2 = P$ (punto), r_1 ed r_2 sono incidenti,

d) se $rg(A) = 3$ e $rg(A') = 4$ $\Rightarrow$ $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, r_1 ed r_2 sono sghembe.

- Osservazione: non può esistere il caso in cui $rg(A) = 2$ e $rg(A') = 4$ poiché la riduzione a scala si effettua su righe successive.

Si conclude ora che $r_1 \parallel r_2 \iff rg(A) = 2$ (si comprendono i casi a), b)), cioè $r_1 \parallel r_2 \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$ oppure $r_1 = r_2$.

- Definizione 1 (rette sghembe): due rette r_1 ed r_2 si dicono sghembe se non sono complanari, cioè $\nexists$ un piano α tale che $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \alpha$

$\Rightarrow r_1$ ed r_2 sono sghembe $\iff \det(A') \neq 0$.

- Perpendicolarità tra rette e tra rette e piano:

Sia r_1 ed r_2 due rette; $r_1 \perp r_2 \iff v_{r_1} \perp v_{r_2}$ dove v_{r_1} è il vettore direttore di r_1 e v_{r_2} è il vettore direttore di r_2;

se r_1 e r_2 hanno equazione parametrica (vettoriali):

$r_1 = P_1 + t_1 \cdot v_{r_1}$ ed $r_2 = P_2 + t_2 \cdot v_{r_2}$ con $v_{r_1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ e

$v_{r_2} = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 \perp r_2 \iff \langle v_{r_1}, v_{r_2} \rangle = 0 \iff l_1 \cdot l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

Sia ora $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un altro vettore, $v \perp r_1 \iff l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0$

quindi l'ortogonale $r_1^{\perp}$ di r_1 è un piano; in particolare un piano ortogonale ad r_1 e passante per un punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ha equazione:

$$l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) = 0$$

- Esempio: determinare l'equazione del piano $\alpha \perp r$ e passante per il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

sia $r: \begin{cases} x + 2z = -1 \\ y = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2z \\ y = 2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r \parallel v_r = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k}$

$\Rightarrow \alpha \perp r \iff \alpha \perp v_r \iff -2x + z = 0$

si deve imporre ora il passaggio per $P_0 \Rightarrow \alpha: -2(x - x_0) + (z - z_0) = 0$

$\Rightarrow -2(x-2) + (z-1) = 0 \iff -2x + z = -3$ che è l'eq. cercata.

- Rette sghembe:

- Proposizione 1: date due rette sghembe r_1 ed r_2 nello spazio $\exists!$ una retta r ortogonale ed incidente ad entrambe (fig. 1).

fig. 1.

- Esempio 1: siano r_1 ed r_2 due rette di A^3 di equazioni parametriche:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+t_1 \\ y = -2t_1 \\ z = -1-t_1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2-t_2 \\ y = 1-t_2 \\ z = 1 \end{cases}$$

determinare l'eq. parametrica della retta r ortogonale ad r_1 e r_2 e incidente.
Prima di tutto occorre verificare che r_1 ed r_2 siano effettivamente sghembe:

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 // v_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_2 // v_{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$r_1 \neq r_2 \iff rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ infatti riducendo a scala si ha che:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3+R_1}} \rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_3' - 1/3 R_2'} = 2$$

i vettori direttori v_{r_1} e v_{r_2} sono allora linearmente indipendenti;

$r_1 \cap r_2 = \emptyset$ infatti $\begin{cases} 1+t_1 = 2-t_2 \\ -2t_1 = 1-t_2 \\ -1-t_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 5 \\ t_2 = -3 \\ t_1 = -2 \end{cases}$ impossibile

$\Rightarrow$ r_1 ed r_2 sono sghembe; la retta r essendo incidente con r_1 ed r_2
$\Rightarrow$ sia $P_1 = r_1 \cap r$ e $Q_2 = r_2 \cap r$; i punti P_1 e Q_2 avranno coordinate che sono date da:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1+t_1 \\ -2t_1 \\ -1-t_1 \end{pmatrix} \text{ e } Q_2 = \begin{pmatrix} 2-t_2 \\ 1-t_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ per valori particolari di t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$.

la retta r passante per P_1 e Q_2 ha vettore direttore v_r dato da:

$$v_r = P_1 - Q_2 = \begin{pmatrix} 1+t_1 \\ -2t_1 \\ -1-t_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-t_2 \\ 1-t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t_1+t_2 \\ -1-2t_1+t_2 \\ -2-t_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_r // r$ quindi $r \perp r_1 \iff v_r \perp v_{r_1} \iff \langle v_r, v_{r_1} \rangle = 0$
cioè $\langle v_r, v_{r_1} \rangle = -1+t_1+t_2+2+4t_1-2t_2+2+t_1 = 6t_1 - t_2 + 3 = 0$
mentre $v_r \perp v_{r_2} \iff \langle v_r, v_{r_2} \rangle = 0 \iff 1-t_1-t_2+1+2t_1-t_2 = 0$
$\iff t_1 - 2t_2 + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $r \perp r_1 \wedge r \perp r_2 \iff \begin{cases} 6t_1 - t_2 + 3 = 0 \\ t_1 - 2t_2 + 2 = 0 \end{cases}$ ha una ed una sola soluzione;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & 9 \end{array}\right) R_2 - 6R_1$$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{4}{11} \\ t_2 = \dfrac{9}{11} \end{cases}$ quindi i punti P_1 e Q_2 hanno coordinate:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 - 4/11 \\ -2 \cdot (-4/11) \\ -1 + 4/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 8/11 \\ -7/11 \end{pmatrix} \in r_1 \cap r$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 - 9/11 \\ 1 - 9/11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/11 \\ 2/11 \\ 1 \end{pmatrix} \in r_2 \cap r$$

la retta r passante per P_1 e Q_2 ha eq. parametriche;

$$r: \ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OQ_2}) = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 8/11 \\ -7/11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6/11 \\ 6/11 \\ -18/11 \end{pmatrix}$$

- DISTANZE:

- Distanza tra due punti nello spazio:

la distanza tra due punti P_1 e P_2 è data da:

$$d(P_1, P_2) = \| \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \| = \| \overrightarrow{P_1P_2} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

dove $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

- Definizione 1: siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ due sottoinsiemi non vuoti dello spazio Euclideo, si definisce la distanza tra A e B:

$$d(A, B) = \inf \{ d(P_1, P_2) \mid P_1 \in A, P_2 \in B \} = \inf_{\substack{P_1 \in A \\ P_2 \in B}} \{ d(P_1, P_2) \}.$$

essendo $d(P_1, P_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow d(A, B)$ è l'estremo inferiore di queste distanze.

- Distanza di un punto da un piano: sia P_1 un punto ed α un piano; la distanza di P_1 da α è data da:

$$d(P_1, \alpha) = d(P_1, H) = \begin{cases} 0 & \text{se } P_1 \in \alpha; \\ \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \text{se } P_1 \notin \alpha. \end{cases}$$

dove x_1, y_1 e z_1 sono le coordinate di P_1;

un'altro modo di calcolare $d(P_1, \alpha)$ è quello di determinare la retta $r \perp \alpha$ passante per P_1 e incidente α in un punto H e determinare $d(P_1, H)$; (fig. 2).

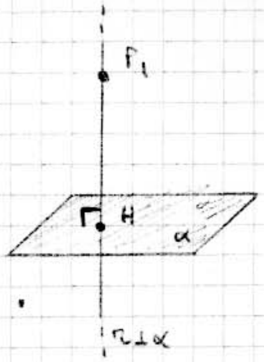
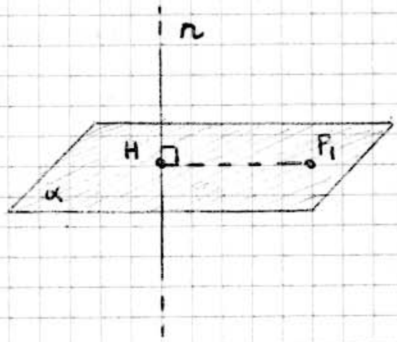


fig. 2.

- Distanza tra un punto ed una retta: sia P_1 un punto ed r una retta; la distanza fra P_1 ed r è data da:

$$d(P_1, r) = \begin{cases} 0 & \text{se } P_1 \in r ; \\ d(P_1, H) & \text{se } P_1 \notin r, \text{ dove } H = r \cap \alpha \text{ con } \alpha \text{ piano tale che} \\ & \alpha \perp r \text{ e } P_1 \subset \alpha \text{ (cioè } P_1 \in \alpha) \text{ fig. 3.} \end{cases}$$



Vediamo un esempio: sia r la retta di eq. parametriche

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{e} \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{determinare } d(P_1, r);$$

$r \parallel v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ il piano α passante per P_1 e $\alpha \perp r$ ha eq. cartesiana

$$\alpha: \ 1 \cdot (x - (-1)) + (-1) \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0$$

$$\alpha: \ x - y + z = -2 ;$$

$$H = r \cap \alpha \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \\ x - y + z = 2 \end{cases} \iff (1+t) - (1-t) + (2+t) = -2 \iff t = -\frac{4}{3}$$

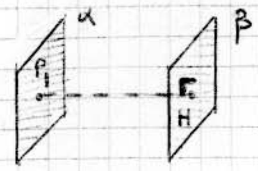
$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4/3 \\ 1 - (-4/3) \\ 2 - 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

quindi $d(P_1, r) = d(P_1, H) = \sqrt{(-1 + 1/3)^2 + (1 - 7/3)^2 + (0 - 2/3)^2} =$

$$= \sqrt{4/9 + 16/9 + 4/9} = \sqrt{24/9} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

- <u>Distanza tra due piani:</u> siano α, β due piani; la distanza tra α e β è data da:

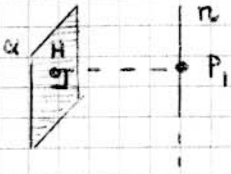
$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \not\parallel \beta ; \\ d(P_1 \in \alpha, \beta) & \text{se } \alpha \parallel \beta . \end{cases}$$



$d(P_1, \beta)$ è il caso già analizzato in precedenza della distanza tra punto e piano.

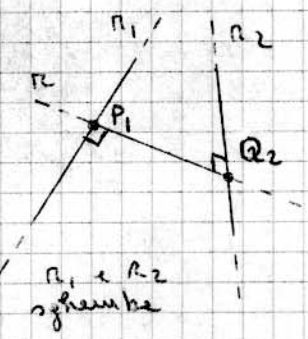
- <u>Distanza tra retta e piano:</u> sia r una retta ed α un piano; la distanza tra r ed α è data da:

$$d(r, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \not\parallel \alpha ; \\ d(P_1 \in r, \alpha) & \text{se } r \parallel \alpha . \end{cases}$$

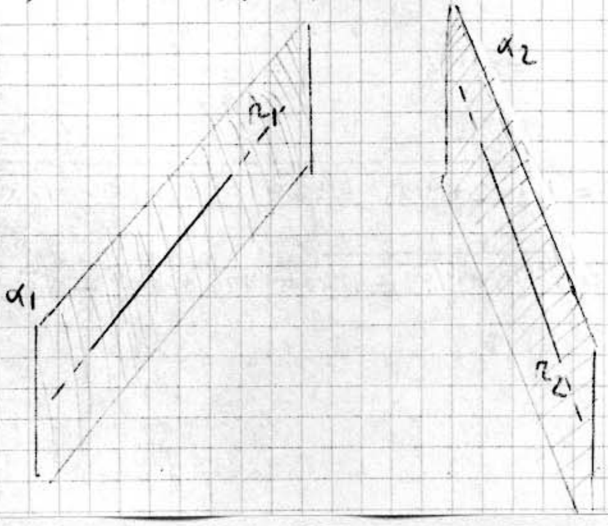


- <u>Distanza tra due rette:</u> siano r_1 ed r_2 due rette; la distanza tra queste due rette è così definita:

$$d(r_1, r_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_1 \cap r_2 \neq 0 \text{ cioè } r_1 \text{ ed } r_2 \text{ sono incidenti} ; \\ d(P_1 \in r_1, r_2) & \text{se } r_1 \parallel r_2 \text{ (caso già analizzato)} ; \\ d(P_1, Q_2) \text{ con } P_1 \in r \cap r_1 \text{ e } Q_2 \in r \cap r_2 \text{ ed} & \\ \quad r \perp r_1 \text{ e } r \perp r_2 & \text{se } r_1 \text{ ed } r_2 \text{ sono sghembe.} \end{cases}$$



Vediamo ora un'altro metodo per determinare la distanza tra due rette sghembe; siano r_1 ed r_2 due rette sghembe allora $\exists!\ \alpha_1$, piano, tale che $\alpha_1 \supset r_1$ e $\alpha_1 \parallel r_2$ mentre in modo analogo $\exists!\ \alpha_2$, piano, tale che $\alpha_2 \supset r_2$ e $\alpha_2 \parallel r_1 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \parallel r_1, r_2$ cioè $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ quindi $d(r_1, r_2) = d(\alpha_1, \alpha_2) = d(r_1, \alpha_2) = d(r_2, \alpha_1)$ ci siamo ricondotti a casi già analizzati.



Vediamo subito un esempio pratico:

Date le rette $r_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -2t_1 \\ z = -1 - t_1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2 - t_2 \\ y = 1 - t_2 \\ z = 1 \end{cases}$

che sappiamo essere sghembe (vedi esercizi precedenti), determinare $d(r_1, r_2)$.

Occorre determinare il piano α_2 tale che $\alpha_2 \supset r_2$ e $\alpha_2 // r_1$

le eq. cartesiane di r_2 sono: $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ ottenute eliminando il parametro t_2

$\alpha_2: \lambda(x-y) + \mu z = \lambda + \mu$ con λ e $\mu \in \mathbb{R}$;

$r_1 // v_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 // r_1 \iff \alpha_2 \supset v_{r_1}$ per cui:

$\alpha_2: \lambda x - \lambda y + \mu z = \lambda + \mu \Rightarrow \lambda \cdot 1 - \lambda \cdot (-2) + \mu \cdot (-1) = 0$

$\iff 3\lambda = \mu$ posto $\lambda = 1$ si ottiene $\mu = 3$ per cui l'eq. cercata è

$\alpha_2: x - y + 3z = 4 \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(\alpha_1, \alpha_2) = d(P_1, \alpha_2)$

dove $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ per $t_1 = 0$, $P_1 \in r_1$;

$$d(P_1, \alpha_2) = \frac{|1 - 0 - 3 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$

Dal precedente esercizio sono stati ricavati i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 7/11 \\ +8/11 \\ -7/11 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 13/11 \\ 2/11 \\ 1 \end{pmatrix}$ delle rette $r \perp r_1$ e $r \perp r_2$ per cui un'altro modo per verificare i risultati ottenuti è il seguente:

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, Q_2) = \sqrt{(7/11 - 13/11)^2 + (8/11 - 2/11)^2 + (-7/11 - 1)^2} =$$
$$= \sqrt{36/11^2 + 36/11^2 + 18^2/11^2} = \frac{6}{\sqrt{11}} \quad \text{ok!}$$

- Osservazione: data una retta $r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

un piano α è parallelo ad r con $\alpha: ax + by + cz = d$

cioè $\alpha // r \iff al + bm + cn = 0$ e se $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \alpha$

$\Rightarrow r \subset \alpha$

• AUTOVALORI ED AUTOVETTORI :

Sia $T: V \to V$ un'endomorfismo (applicazione lineare in cui dominio e codominio coincidono), un numero reale (scalare) λ è autovalore di T se $\exists v \in V$ e $v \neq \vartheta$ (vettore nullo) tale che $T(v) = \lambda \cdot v$; si dice che v è autovettore di T relativo all'autovalore λ.

- Esempio 1: sia $T: V \to V$ tale che $\mathrm{Ker}(T) \neq \{\vartheta\} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ è un autovalore di T infatti se $v \in \mathrm{Ker}(T)$ e $v \neq \vartheta \Rightarrow T(v) = \vartheta$ ma allora $T(v) = \vartheta = 0 \cdot v$ c.v.d.

- Osservazioni: dall'esempio svolto si può dedurre che i concetti appena esposti di autovalore e autovettore derivano in un certo modo dal nucleo di un'applicazione T; si deve far memoria inoltre che i λ_i $(i = 1, \dots, n)$ devono essere un numero finito ed inoltre ogni vettore $v \in \mathrm{Ker}(T)$ e $v \neq \vartheta$ è autovettore relativo a $\lambda = 0$.

- Esempio 2: sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T = L_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$;

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ è autovalore di } L_A$$

mentre gli autovettori di L_A relativi a $\lambda_1 = 0$ sono:

$$v \in \mathrm{Ker}(L_A) \setminus \{\vartheta\} \Rightarrow v \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \setminus \{\vartheta\}.$$

in quanto ϑ non è autovettore.

Un metodo per determinare gli autovalori di un'applicazione lineare $T = L_A$ si basa sulla definizione del polinomio caratteristico di L_A cioè:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$ dove λ è l'incognita da determinare, A è la matrice associata a L_A ed I è la matrice identità.

Se l'applicazione $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow$ grado $(p_A(\lambda)) = n$; con riferimento all'esempio 2) precedentemente svolto si ha che:

$$p_A(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-4-\lambda) - ((-2)\cdot 2) = \cancel{-4} - \lambda + 4\lambda + \lambda^2 \cancel{+4} =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda \quad \text{(che è di 2° grado).}$$

gli autovalori dell'applicazione L_A sono le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ cioè sono tutti i λ_i $(i=1,\dots,n) \in \mathbb{R}$ tali che $P_A(\lambda_i) = 0$; queste radici si determinano fattorizzando il polinomio $P_A(\lambda_i)$ e ponendolo uguale a zero.

$$\Rightarrow \quad p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 3\lambda = 0 \iff \lambda \cdot (\lambda + 3) = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = -3$$

quindi $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$ sono le radici cercate.

* Osservazione: nella matrice $(A - \lambda I)$ il fattore λ compare nella diagonale principale.

- Definizione (autospazio): si definisce autospazio relativo all'autovalore λ_i, l'insieme:

$$V_{\lambda_i}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per specificare} \\ \text{l'applicazione}}}{L_A}) = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda_i \cdot v \} = \{ \text{autovettori relativi a } \lambda_i \} \cup \{ 0 \}$$

si dimostra che $V_{\lambda_i}(L_A)$ è un sottospazio vettoriale di V e si dimostra altresì che è dato da:

$$V_{\lambda_i}(L_A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$$

Riprendendo ancora l'esempio 2) si ha che l'autospazio V_{λ_2} relativo cioè a $\lambda_2 = 3$ è dato da:

$$V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - (-3) I) = \operatorname{Ker}(A + 3I) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

- Continuo: è stato detto che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dove $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e grado $(p_A(\lambda)) = n$; se λ_1 è una radice di $p_A(\lambda) \Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha} \cdot \bar{p}(\lambda)$ dove α si dice molteplicità algebrica dell'autovalore λ_1 e si scrive $m.a.(\lambda_1) = \alpha$ mentre $\bar{p}(\lambda)$ è il polinomio quoziente che non ha come radice λ_1.

- Esempio 3: sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$; il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) = (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) = 0 \iff (2-\lambda) = 0 \vee (-1-\lambda) = 0$$

$\iff \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = -1$; quindi le radici di $p_A(\lambda)$ sono:
$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ quindi gli autovalori dell'applicazione $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A sono:

$$\lambda_1 = 2 \text{ con } m.a.(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \text{ con } m.a.(\lambda_2) = 1$$

gli autovettori relativi ad un autovalore λ_i sono gli elementi di $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I) \setminus \{0\}$;
la dimensione di $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ si dice molteplicità geometrica dell'autovalore λ_i
cioè si pone: $m.g.(\lambda_i) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)) = \dim(\underset{\text{(auto spazio)}}{V_{\lambda_i}(L_A)})$

- Osservazione importante: se A è una matrice triangolare superiore (o triangolare inferiore) cioè:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{mm}$$

oppure $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \; a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{mm}$.

Dimostrazione per induzione:

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ applicando lo sviluppo di Laplace sulla 1ª colonna si ottiene:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$ riapplicando ora lo sviluppo di Laplace

sulla 1ª colonna si ottiene:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$; proseguendo con sviluppi successivi

si arriva alla relazione: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{mm}$ cioè il $\det(A)$ è il prodotto di termini della diagonale principale.

- Proposizione 1: la molteplicità algebrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale alla sua molteplicità geometrica; cioè risulta che: $1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$

Osservazione: le molteplicità non possono essere 0 perché se $\exists \lambda_i \Rightarrow \exists v : T(v) = \lambda_i v$

- Esempio 4: con riferimento all'esercizio 3 sono stati determinati gli autovalori:

$$\lambda_1 = 2 \text{ con } m.a.(\lambda_1) = 2 \Rightarrow 1 \leq m.g.(\lambda_1) \leq 2 = m.a.(\lambda_1);$$
$$\lambda_2 = -1 \text{ con } m.a.(\lambda_2) = 1 \Rightarrow 1 \leq m.g.(\lambda_2) \leq 1 = m.a.(\lambda_2)$$
$$\Rightarrow m.g.(\lambda_2) = 1;$$

per determinare la molteplicità geometrica relativa all'autovalore λ_1 occorre

determinare la dimensione di $Ker(A-\lambda_1 I)$ ricordando che $\dim(Ker(A-\lambda_1 I)) =$
$= n - rg(A-\lambda_1 I)$ cioè:

$$rg(A-\lambda_1 I) = rg(A-2I) = rg\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&-3\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} R_3+3R_2$$

$\Rightarrow rg(A-2I) = 2$ quindi $\dim(Ker(A-2I)) = 3-2 = 1$

$\Rightarrow m.g.(\lambda_1) = 1 < m.a.(\lambda_1) = 2$.

l'autospazio $V_{\lambda_1=2}(A) = Ker(A-2I) \cup \{0\}$ cioè:

$$Ker(A-2I) = \begin{cases} x_2 = 0\\ x_3 = 0\\ x_1 = x_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow Ker(A-2I) = Span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

<u>Verifica:</u> sia $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in Ker(A-2I)$; v autovettore relativo a $\lambda_1 = 2$
allora:

$$L_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+0+0\\0+0+0\\0+0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

mentre:

$\lambda_1\cdot v = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow L_A(v) = \lambda_1\cdot v$, si può porre inoltre $v = e_1$

dove e_1 è il vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

determiniamo l'autospazio $V_{\lambda_2=-1}(A)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$:

$$V_{\lambda_2=-1}(A) = Ker(A-\lambda_2 I) = Ker(A+I) = Ker\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$rg(A+I) = 2 \Rightarrow \dim(Ker(A+I)) = 1$ quindi:

$$Ker\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{cases}3x_1+x_2=0\\3x_2+x_3=0\\x_3=x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_1=-x_2=\frac{1}{3}x_3\\x_2=-\frac{1}{3}x_3\\x_3=x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{9}x_3\\-\frac{1}{3}x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ker(A+I) = x_3\cdot\begin{pmatrix}1/9\\-1/3\\1\end{pmatrix} = Span\left(\begin{pmatrix}+1/9\\-1/3\\1\end{pmatrix}\right)$$

<u>Verifica:</u> sia $u = \begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix} \in V_{\lambda_2}(A)$ cioè u autovettore relativo a $\lambda_2 = -1$ allora:

$$L_A\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3+0\\0-6+9\\0+0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-9\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$$

cioè $L_A(u) = \lambda_2\cdot u$

l'importanza degli ordini di molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di una data matrice A associata ad L_A deriva dal fatto che si può stabilire se la matrice stessa A è diagonalizzabile oppure no.

- Definizione (matrice diagonalizzabile): una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di L_A (oppure A).

- Esempio 6: se $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice diagonale e si supponga che $d_{11} \neq d_{22} \neq d_{33} \neq \ldots \neq d_{nn}$;

gli autovalori di D sono $\lambda_1 = d_{11}$, $\lambda_2 = d_{22}$, ..., $\lambda_n = d_{nn}$ in quanto si ha che $\det(D - \lambda I) = (\lambda - d_{11}) \cdot (\lambda - d_{22}) \cdot (\lambda - d_{33}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - d_{nn})$ mentre gli autovettori relativi sono $e_1, e_2, \ldots, e_n$ che formano una base di $\mathbb{R}^n$, più precisamente sono la base canonica di $\mathbb{R}^n$; infatti si può verificare facilmente che

$$Ker(D - d_{ii} I) = Span(e_i), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n;$$

ed inoltre risulta: $L_D \cdot (e_i) = D \cdot (e_i) = d_{ii} \cdot e_i \Rightarrow D$ é diagonalizzabile.

Da quanto svolto si dimostra inoltre che sussiste la seguente:

- Proposizione 1: se una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é diagonalizzabile allora $\exists\, B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di autovettori di A tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ dove C é la matrice $\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ che ha come colonne i vettori $v_1, \ldots, v_n$ della base B e D é la matrice diagonale.

- Definizione (similitudine tra matrici): due matrici $A, E \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dicono simili se $\exists\, C$ matrice invertibile tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C = E$.

Dalla proposizione 1 e dalla definizione appena enunciate segue che una matrice quadrata A é diagonalizzabile se e solo se é simile ad una matrice diagonale D (le matrici simili si ottengono cambiando la base).

- Criterio di diagonalizzabilità:

  Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora A é diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ sono verificate le seguenti proprietà:

  1) $\forall \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ autovalore di A si ha che $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$;

  2) $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) + \ldots + m.g.(\lambda_r) = \sum m.g.(\lambda_i) = n$ dove n é l'ordine della matrice quadrata A.

- Esempio 7:

  a) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ relativa agli esempi 3 e 4 non é diagonalizzabile in quanto non é verificata la 1ª proprietà infatti risulta che $m.a.(\lambda_1 = 2) = 2 > m.g.(\lambda_1 = 2) = 1$

sil b) sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dimostrare che la matrice suddetta, che è altretutto simmetrica, è anche diagonalizzabile;

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ \boxed{0 \quad 2-\lambda \quad 2} \\ 4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \left[-\lambda(2-\lambda) - 16 \right] - 2 \cdot \left[(2-\lambda) \cdot 2 \right] = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 16) - 4 \cdot (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 16 - 4) = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 20)$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 20) = 0 \iff 2 - \lambda = 0 \lor \lambda^2 - 2\lambda - 20 = 0$$

$\iff \lambda = 2 \lor \lambda = +1 \pm \sqrt{21} \Rightarrow$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{21}$ e $\lambda_3 = 1 - \sqrt{21}$ con $m.a.(\lambda_1) = 1$, $m.a.(\lambda_2) = 1$ e $m.a.(\lambda_3) = 1$

$\Rightarrow m.g.(\lambda_1) = 1$, $m.g.(\lambda_2) = 1$ e $m.g.(\lambda_3) = 1$, in quanto $1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$ per il criterio di diagonalizzabilità essendo verificata la 1) cioè $m.a.(\lambda_1) = m.g.(\lambda_1) = 1$, $m.a.(\lambda_2) = m.g.(\lambda_2) = 1$ e $m.a.(\lambda_3) = m.g.(\lambda_3) = 1$ ed essendo verificata la 2) cioè $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) + m.g.(\lambda_3) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow$ A è diagonalizzabile

c) sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dimostrare che è diagonalizzabile.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

ricordando il teorema di Ruffini e ricordando la seguente regola:
le possibili radici di $p_A(\lambda)$ sono $\frac{m}{n}$ dove m ed n sono rispettivamente i divisori del termine noto e del coefficiente del termine di grado massimo di $p_A(\lambda)$ si ha che:

$m = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$ mentre $n = \pm 1$

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$ per il T. di Ruffini se λ_i è una radice

$\Rightarrow p_A(\lambda_i) = 0$ quindi determiniamo le radici possibili:

$$p_A(1) = -1 + 12 - 36 + 32 = 7 \neq 0$$
$$p_A(-1) = 1 + 12 + 36 + 32 = 81 \neq 0$$
$$p_A(2) = -8 + 48 - 72 + 32 = 0 \Rightarrow 2 \text{ è radice di } p_A(\lambda)$$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot \overline{p}(\lambda)$ determiniamo con la regola di Ruffini $\overline{p}(\lambda)$ in modo da ottenere le eventuali radici $\neq 2$ di $p_A(\lambda)$:

$$\overline{p}(\lambda) = (-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32) : (\lambda - 2)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & +12 & -36 & +32 \\ 2 & & -2 & +20 & -32 \\ \hline & -1 & 10 & -16 & 0 \end{array} \Rightarrow \overline{p}(\lambda) = -\lambda^2 + 10\lambda - 16$$

$$\overline{p}(\lambda) = 0 \iff -\lambda^2 + 10\lambda - 16 = 0 \iff \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm 3 = \Big\langle {8 \atop 2} \Rightarrow \overline{p}(\lambda) = (\lambda - 2)\cdot(\lambda - 8)$$

quindi le radici di $p_A(\lambda)$ sono $\lambda_1 = 2$ con $m.a.(\lambda_1) = 2$ e $\lambda_2 = 8$ con $m.a.(\lambda_2) = 1$.

gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 2$ sono dati da $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \setminus \{\underline{0}\}$ cioè

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A - 2I) = 1$ e $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I)) = 2$

per cui $m.g.(\lambda_1) = 2 = m.a.(\lambda_1)$ ed essendo anche $m.a.(\lambda_2) = m.g.(\lambda_2) = 1$ e $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile

gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 2 \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \setminus \{\underline{0}\}$.

d) determinare gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 2$ del punto b).

$$V_{\lambda_1 = 2} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2\, x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow v \text{ (autovettore relativo a } \lambda_1) \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

- Osservazioni:

1) dall'esempio 7 punto b) si può dedurre che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili comunque esistono anche matrici non simmetriche che sono però diagonalizzabili es. 7 punto c);

2) dall'esempio 7 punto b) si può dedurre che se una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ (anche non simmetrica) ha n autovalori distinti $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile. Infatti se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A e $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$

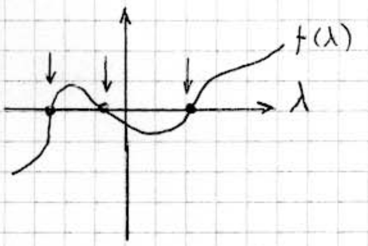
$\Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda-\lambda_3)\cdot \ldots \cdot(\lambda-\lambda_n)$

$\Rightarrow m.a.(\lambda_1) = m.a.(\lambda_2) = m.a.(\lambda_3) = \ldots = m.a.(\lambda_n) = 1$

$\Rightarrow m.g.(\lambda_1) = m.g.(\lambda_2) = m.g.(\lambda_3) = \ldots = m.g.(\lambda_n) = 1$

$\Rightarrow$ per il criterio di diagonalizzabilità appena enunciato A è diagonalizzabile. c.v.d.

3) nei casi in cui la regola di Ruffini e il teorema relativo non siano applicabili ad un polinomio $p_A(\lambda)$ gli eventuali zeri reali di $p_A(\lambda)$ si possono determinare mediante l'analisi della funzione $f(\lambda) = p_A(\lambda)$ associata al polinomio trovato.



Nota: essendo $f(\lambda) \in C[\mathbb{R}]$ continua e se $f(a)\cdot f(b) < 0$ con a, b estremi di un intervallo $\Rightarrow \exists\, \xi_i \in [a, b]$ tale che $f(\xi_i) = 0 \Rightarrow \xi_i$ è lo zero cercato di $p_A(\lambda)$. quindi $\lambda_i = \xi_i$ $(i=1,\ldots,r)$ con $r \leq$ grado di $p_A(\lambda)$.

i ξ_i si possono determinare con il metodo DICOTOMICO (dividendo a metà dell'intervallo in cui f si annulla); se $p_A(\lambda)$ è di 3° grado nella forma $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ si può risolvere più agevolmente con le formule di CARDANO in cui vengono fornite le eventuali radici reali e complesse di $p_A(\lambda)$.

- Teorema 1: sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata; A è simmetrica $\Leftrightarrow$ $\exists\, B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori $v_1, \ldots, v_n$ di L_A ($\Rightarrow A$ è diagonalizzabile per definizione stessa di diagonalizzabilità).

- Osservazioni: con riferimento al teorema 1 appena enunciato si può affermare:

1) se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ esiste una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di autovettori di L_A ma se A non è simmetrica e ortonormalizziamo la base B si trova sicuramente una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ ma non formata da autovettori di L_A;

2) se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è simmetrica e v_1, v_2 sono due autovettori relativi a due autovalori λ_1 e λ_2 distinti (cioè $\lambda_1 \neq \lambda_2$) $\Rightarrow v_1 \perp v_2$; se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di L_A si consideri la matrice $C = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$ avente come colonne i vettori $v_1, \ldots, v_n$

$\Rightarrow C^T \cdot C = I \Rightarrow C^T = C^{-1}$ cioè è l'inversa di C.

infatti si ha che:

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (v_1\ \ldots\ v_n) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

- Definizione (matrice ortogonale): una matrice A si dice ortogonale $\Leftrightarrow$ è invertibile e risulta $A^{-1} = A^T$.
- Osservazione: con riferimento all'osservazione appena fatta A è ortogonale $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ le righe di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

NUMERI COMPLESSI:

- Definizione 1: l'insieme dei numeri complessi è l'insieme:

$$\mathbb{C} := \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1} \right\}$$

Sono definite inoltre:

Somma: $(a+ib) + (c+id) = a + c + ib + id = (a+c) + i(b+d)$;

Prodotto: $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + i(ad+bc) - bd \overset{!}{=} (ac - bd) + i(ad+bc)$

Per le operazioni $(+)$ e $(\cdot)$ appena introdotte si verifica subito (mediante le proprietà di $\mathbb{R}$) che:

i) la $(+)$ è associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro che è $0 + i0 = 0_{\mathbb{C}}$ dove $0_{\mathbb{C}}$ si distingue dallo zero reale, esiste l'opposto di $a+ib$ che è $-a - ib$ infatti $a + ib + (-a) + (-ib) = 0$;

ii) il $(\cdot)$ è associativo, commutativo, esiste l'elemento neutro che è $1 + i0 = 1_{\mathbb{C}}$ per distinguerlo dall'unità reale, esiste l'inverso di $a+ib$ (se $a+ib \neq 0_{\mathbb{C}}$) ed è il numero complesso $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ infatti:

dire che $\exists$ l'inverso di $a+ib \Rightarrow \exists\ c+id$ tale che $(a+ib)\cdot(c+id) = 1_{\mathbb{C}} = 1$

$$\Leftrightarrow (ac - bd) + i(ad+bc) = 1 + i0 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

essendo $a + ib \neq 0_{\mathbb{C}} \Rightarrow a \neq 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$ quindi applicando CRAMER a questo sistema 2×2 si ottiene:

$$\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 \neq 0$$

$$c = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad d = \frac{\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow c + id = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{c.v.d.}$$

Un'altro metodo per determinare $c+id$ è il seguente:

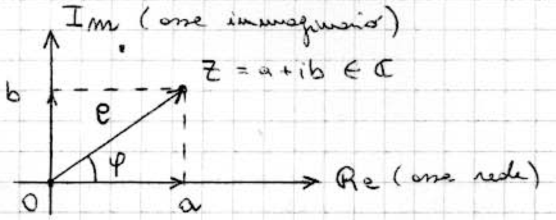
$$c + id = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)\cdot(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Con le operazioni (+) e (·) introdotte si verifica inoltre che l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo con ordinamento parziale ($\mathbb{R}$ invece è un campo con ordinamento totale).

Da quanto detto finora è possibile comporre un'applicazione biettiva $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ cioè che associa ad ogni numero $a+ib \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ una coppia $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di numeri reali.

Dalla corrispondenza biunivoca $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ si può rappresentare in modo unico un numero complesso $a+ib$ sul piano; posto $z = a+ib$ si ottiene:

PIANO DI GAUSS



a = parte reale di $z = \mathrm{Re}(z)$

b = parte immaginaria di $z = \mathrm{Im}(z)$.

$\|z\|$ = modulo $= \sqrt{a^2+b^2} = \rho$

$i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria.

due numeri complessi $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ si dicono uguali $\iff a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$ cioè $\iff \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ e $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

- <u>Definizione 2 (complesso coniugato):</u> dato un numero complesso $z = a+ib$ si dice complesso coniugato di z e si indica con $\bar{z}$ il numero $\bar{z} = a - ib$.

<u>Proprietà di immediata verifica:</u>

i) se $z = a+ib \neq 0_{\mathbb{C}} \neq 0 \implies \dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{\|z\|^2} \implies \|z\|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2+b^2$;

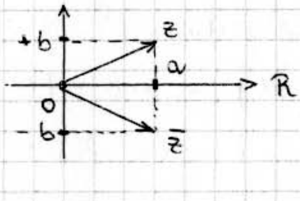
ii) $z = \bar{\bar{z}}$;

iii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;

iv) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$;

v) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

geometricamente il complesso coniugato $\bar{z}$ di z è il vettore simmetrico di z rispetto l'asse delle ascisse (o asse reale):



- <u>Coordinate polari, forma trigonometrica dei numeri complessi:</u>

Si vuole determinare la funzione tale che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \longleftrightarrow \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$ cioè che associa alla coppia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \longmapsto (\rho, \varphi)$ dove $\rho = \|\cdot\|$ è il modulo e φ è l'angolo o argomento.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ \varphi \right)$$ dove φ è l'angolo compreso tra il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e il semiasse positivo delle ascisse; φ si può determinare osservando che

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ora se $z = a + ib$ in forma trigonometrica si può scrivere :

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \,\text{sen}\,\varphi) \quad \text{dove} \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2}\ , \ \cos\varphi = \frac{a}{a^2+b^2}\ , \ \text{sen}\,\varphi = \frac{b}{a^2+b^2}$$

- Esempi di applicazione :

1) Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi :

$$z_1 = \frac{1}{3}\ , \ z_2 = 2i\ , \ z_3 = -1 - i\ , \ z_4 = 1 + i\sqrt{3}\ ;$$

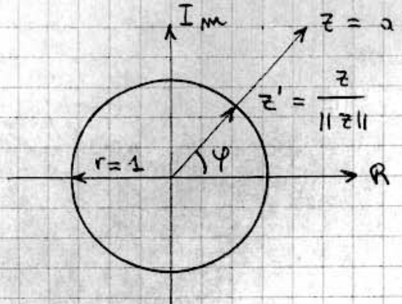
$$z_1 = \frac{1}{3} + i0 = \frac{1}{3}\cdot\left(1 + i0\right) = \frac{1}{3}\left(\cos 0 + i \,\text{sen}\, 0\right)$$

$$z_2 = 2i = 0 + 2i = 2\cdot(0 + i) = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_3 = -1 - i = \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$z_4 = 1 + i\sqrt{3} = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

- Osservazione 1 : con riferimento agli esempi si fa la seguente considerazione :



$z' \in$ circonferenza trigonometrica $\Rightarrow$ si scrive ed è determinato in modo unico come coordinate $(\cos\varphi, \text{sen}\,\varphi)$.

- Prodotto di numeri complessi sotto forma trigonometrica, formula di De Moivre :

Siano $z = \rho\cdot(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ e $w = \rho'\cdot(\cos\varphi' + i\,\text{sen}\,\varphi')$

$$\begin{aligned} z\cdot w &= \rho\cdot\rho'\cdot(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\cdot(\cos\varphi' + i\,\text{sen}\,\varphi') = \rho\cdot\rho'\cdot(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi' + \\ &+ i\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi' + i^2\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi') = \rho\cdot\rho'\cdot[(\cos\varphi\cos\varphi' - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi') + i(\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi' + \\ &+ i\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi')] = \rho\cdot\rho'\cdot(\cos(\varphi+\varphi') + i\,\text{sen}\,(\varphi+\varphi')) \end{aligned}$$

se risulta inoltre $w \neq 0$ allora si ha che :

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\rho'}\cdot\left(\cos(\varphi-\varphi') + i\,\text{sen}\,(\varphi-\varphi')\right)$$

Ragionando per induzione sul prodotto si ottiene la seguente relazione :

$z^n = \rho^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\,\text{sen}(n\varphi))$ che viene detta formula di De Moivre

ed è valida $\forall n \geq 1$.

- Esempio: sia $z_2 = 2i$ allora si ha che:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{2\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 1/2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right).$$

- Radici n-esime di un numero complesso:

- Definizione 1: sia $w \in \mathbb{C}$ ed $n \geq 1$, una radice n-esima di w è un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = w$.

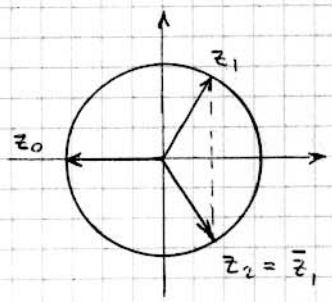
Nei numeri reali si è visto che le radici possono essere al massimo due se n è pari mentre in campo complesso tutto ciò cambia completamente infatti ad esempio l'equazione

$x^3 = -1$ se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = -1$ è soluzione mentre se $x \in \mathbb{C}$ si ottengono ad esempio:

$x = -1$ e $x = \rho\cdot(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

in quanto $\rho^3 = 1$ e $3\varphi = \pi$ cioè $\rho = 1$ e $\varphi = \pi/3$.

Si verifica inoltre, e lo vedremo qui di seguito, che una terza soluzione è $x = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ che è il complesso coniugato di $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ quindi si ottiene la seguente figura:



$z_0 = -1$

$z_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$

$z_2 = \bar{z}_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

- Proposizione: sia $w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \in \mathbb{C}^*$ dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e sia $n \geq 1$

$\Rightarrow \exists\ n$ radici n-esime distinte $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ date dalla relazione:

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\Rightarrow z_k^n = w \quad \forall k = 0, \dots, n-1.$

Dimostrazione: sia $z_k = \rho'(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi')$ radice di $w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

$\Rightarrow z_k^n = w$ cioè $(\rho')^n\cdot(\cos n\varphi' + i \operatorname{sen} n\varphi') = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

$\Leftrightarrow (\rho')^n = \rho$ e $n\varphi' = \varphi + k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \rho' = \rho^{\frac{1}{n}}$ e $\varphi' = \frac{\varphi + k2\pi}{n}$ cioè si ottiene in definitiva

$$z_k = \rho^{1/n}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right) \quad \text{per } k = 0, \dots, n-1$$

Il polinomio $x^n - w$ ha quindi n radici complesse distinte se $w \neq 0$.

- <u>Esempio</u>: calcolare le radici quadrate di un generico numero complesso $w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ dove $w \neq 0$; risulta che:

$$z_0 = \sqrt{\rho} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \right), \quad z_1 = \sqrt{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) \right) = -z_0$$

per le radici quadrate si verifica che $z_1 = -z_0$.

- <u>Teorema fondamentale dell'algebra</u>: un polinomio a coefficienti complessi $p \in \mathbb{C}[z]$ in una variabile z di grado $n \geq 1$ ha esattamente n-radici complesse, contate con la relativa molteplicità.

- <u>Esempio</u>:

1) $(x-1)^2 \Rightarrow x = 1$ è radice con $m.a. = 2$;
2) sia $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow x = \pm i$ sono le radici di $p(x)$.

Dal teorema appena enunciato segue che ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$ si può scrivere nel modo seguente: $p(x) = (x - z_0)^{\alpha_1} \cdot (x - z_1)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (\alpha - z_k)^{\alpha_k}$
dove $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$ e $z_0, z_1, \ldots, z_k$ sono gli zeri del polinomio.
Con l'introduzione dei numeri complessi si può anche parlare di spazi vettoriali infatti sia:

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \middle| \; z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \right\} \quad e \quad V \subseteq \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \quad + : V \times V \to V$$
$$\cdot : \mathbb{C}^n \times V \to V$$

In $\mathbb{R}^2$ il prodotto scalare è così definito: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$
vediamo ora cosa accade in $\mathbb{C}^2$:

sia ad esempio $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$

In $\mathbb{C}^2$ si definisce più precisamente il prodotto scalare hermitiano:

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} \quad \text{dove } z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$$

quindi $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot \overline{1} + i \cdot \overline{i} = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2 > 0$

in $\mathbb{R}^2$ il prodotto hermitiano coincide con il prodotto scalare canonico infatti:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{1} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

essendo $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$